جبر خطی (برای دانشجویان رشته مهندسی صنایع) ــ ترم پاییز ــ سال ۹۸
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
تدریس توسط: حسین جوهری (دانشکده ریاضی)
کتاب مرجع: مبانی جبر خطی و ماتریسها (گیلبرت استرنگ)

خلاصه هفته اول

۱ میدان

تعریف: میدان $F = (S, +, .)$ یک مجموعه S همراه با دو عملگر متمایز است که به آنها جمع و ضرب گفته می‌شود که خواص زیر را دارد.

۱. $\forall a, b \in S, a + b \in S$

۲. $\forall a, b \in S, a.b \in S$

۳. شرکت پذیری جمع و ضرب

$$\forall a, b, c \in S, a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$\forall a, b, c \in S, a.(b.c) = (a.b).c$$

۴. جابجایی در ضرب و جمع

$$\forall a, b \in S, a + b = b + a$$
$$\forall a, b \in S, a.b = b.a$$

۵. وجود دو عنصر منحصر بفرد. صفر جمع 0 و یک ضرب 1

$$\forall a \in S, a + 0 = a$$

$$\forall a \in S, a.1 = a$$

۶. وجود وارون جمع

$$\forall a \in S, \exists -a \in S, a + (-a) = 0$$

۷. وجود وارون ضرب

$$\forall a \in S/\{0\}, \exists a^{-1} \in S, a.a^{-1} = 1$$

۸. توضیع پذیری ضرب روی جمع

$$\forall a, b, c \in S, a.(b + c) = a.b + a.c$$

چند مثال:

- میدان اعداد حقیقی $(\mathbb{R}, +, \times)$
- میدان اعداد موهومی $(\mathbb{C}, +, \times)$
- میدان اعداد گویا

مسئله: نشان دهید وارون جمع هر عنصر میدان منحصر بفرد است.
اثبات: فرض کنید b و c هر دو وارون جمع a باشند. بنا به خواص میدان داریم:

$$b = b + 0 = b + (a + c) = (b + a) + c = 0 + c = c$$

پس b و c باید یکسان باشند.

مسئله: نشان دهید برای هر عنصر $\alpha \in F$ داریم $\alpha.0 = 0$.
اثبات:

$$\alpha = \alpha.1 = \alpha.(1 + 0) = \alpha.1 + \alpha.0 = \alpha + \alpha.0$$

به طرفین وارون جمع α را اضافه می‌کنیم.

$$\alpha + (-\alpha) = \alpha + \alpha.0 + (-\alpha)$$

بدست می‌آید

$$0 = \alpha.0$$

۱.۱ میدان متناهی

یک میدان لزوما نامتناهی نیست. میدان متناهی با دو عضو هم حتی قابل تعریف است. در کل میدان متناهی با n عضو زمانی که $n = p^k$ برای هر عدد اول p وجود دارد. میدان متناهی با n عضو را با $GF(n)$ نمایش می‌دهند. $GF(2)$ تنها شامل 0 و 1 است بطوریکه $1 + 1 = 0$. این بدین معنی است که 1 هم وارون جمع و هم وارون ضرب خودش است. جدول اعمال جمع و ضرب $GF(2)$ در زیر نشان داده شده است.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

$GF(3)$ را می‌توان با می‌توان با استفاده از سه عنصر $0, 1, 2$ و انجام عمل و جمع و ضرب (در هنگ 3) ساخت. جدول جمع و ضرب این میدان در شکل زیر نشان داده شده است.

$$2 + 2 = 1 \mod 3$$

GF(3)

+	2	0	1
2	1	2	0
0	2	0	1
1	0	1	2

•	2	0	1
2	1	0	2
0	0	0	0
1	2	0	1

۲ بردار

تعریف: برای میدان F، $F^n = \overbrace{F \times \ldots \times F}^{n}$ مجموعه همه nـتایی های مرتبی است با اعضای F ساخته می‌شود. به عبارت دیگر

$$F^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\}, a_i \in F\}$$

هر عضو F^n را یک بردار گویند.
مثال: $\mathbb{R}^2$ مجموعه همه نقاط در فضای دو بعدی است.

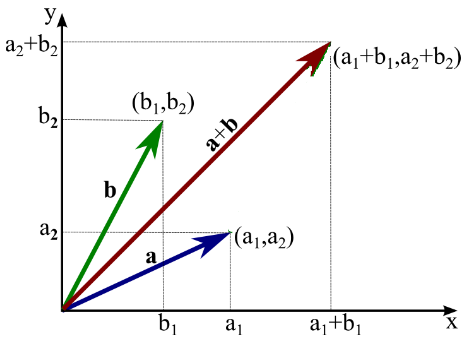
۱.۲ جمع برداری و ضرب اسکالر

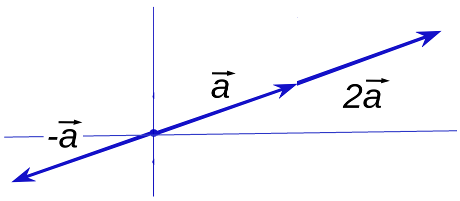
جمع برداری. برای دو بردار $u = (u_1, \ldots, u_n)$ و $v = (v_1, \ldots, v_n)$ در F^n داریم

$$u + v = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$$

ضرب اسکالر. برای $a \in F$ و $u \in F^n$ داریم

$$au = (au_1, \ldots, au_n)$$





ضرب نقطه‌ای. برای دو بردار $u, v \in F^n$ ضرب نقطه‌ی (یا ضرب داخلی) بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$u.v = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$$

تعریف: دو بردار $u, v \in F^n$ متعامد (یا عمود بر هم) هستند اگر و فقط اگر

$$u.v = 0$$

۳ ابرصفحه

مجموعه همه بردارهای $x \in F^n$ که بر بردار $(a_1, \ldots, a_n)$ عمود هستند تشکیل یک ابرصفحه را می‌دهند.

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$$

این ابرصفحه در واقع یک زیرفضای (برداری) $n-1$ بعدی در F^n است. در دروس بعد به این مطلب بطور مفصل پرداخته می‌شود.

دقت کنید که بطور کلی برای هر $c \in F$، مجموعه همه بردارهایی $x \in F^n$ که در معادله زیر صدق می‌کنند

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = c$$

تشکیل یک ابرصفحه را می‌دهند ولی این ابرصفحه یک زیرفضای برداری نیست (چون لزوما از مبدا نمی‌گذرد. بعدا خواهیم دید که یک زیرفضای برداری حتما باید شامل بردار صفر باشد).

در فضای سه بعدی ابرصفحه یک صفحه است. در فضای دو بعدی ابرصفحه یک خط است.

۴ دستگاه معادلات خطی

یک دستگاه معادلات خطی در F^n شامل مجموعه‌ای از معادلات خطی است که هر معادله آن یک ابرصفحه را در F^n بیان می‌کند. جواب یک دستگاه معادلات خطی مجموعه‌ای از بردارهاست که در همه معادلات صدق می‌کند.

برای مثال در فضای $\mathbb{R}^3$ یک دستگاه معادلات بصورت زیر است. هر معادله بیانگر یک صفحه در فضای سه بعدی است.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ \quad 4y - 6z = -2 \\ -2x + 7y + 2z = 9 \end{cases}$$

توجه: در بخش اول درس، تنها به مطالعه دستگاه n معادله با n مجهول می‌پردازیم. در بخش بعدی درس، راه حلی کلی این معادلات را بیان می‌کنیم. همچنین در این درس برای درک هندسی بهتر معادلات را در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ حل می‌کنیم. البته بیشتر قضایا و راه حلهای ما برای هر میدانی صادق است.

حل یک دستگاه معادلات خطی (مجموعه بردارهایی که در همه معادلات صدق می‌کنند) را می‌توان با دو دیدگاه مورد بررسی قرار داد: تصویر سطری و تصویر ستونی.

۱.۴ تصویر سطری

از آنجا که هر سطر معادل با یک ابرصفحه در $\mathbb{R}^n$ است، نقاط اشتراک ابرصفحه‌ها جواب دستگاه خواهد بود. این تصویر سطری دستگاه معادلات است.

سه حالت کلی می‌تواند رخ دهد:

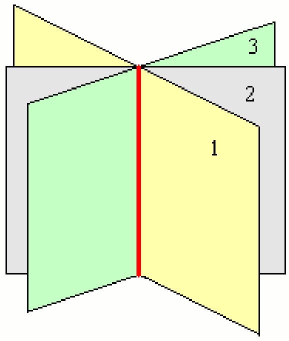
- **دستگاه یک جواب منحصر بفرد دارد.** در این حالت نقطه اشتراک ابرصفحه‌ها شامل تنها یک نقطه است. هر ابرصفحه (بعد) فضای جواب را یکی کاهش می‌دهد تا اینکه به یک نقطه واحد می‌رسیم. در مثال بالا، اشتراک دو معادله اول یک خط را در فضای سه بعدی نشان می‌دهد.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ \quad 4y - 6z = -2 \end{cases}$$

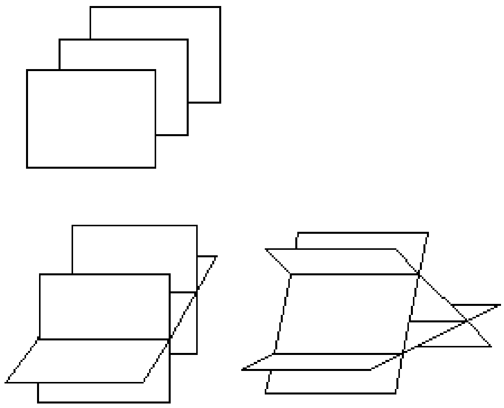
معادله سوم خط مذبور را در یک نقطه قطع می‌کند.

- **دستگاه بیشمار جواب دارد.** در این حالت ابرصفحه‌ها در یک زیرفضای نامتناهی مشترک هستند (برای مثال یکی از صفحه‌ها جمع دو صفحه دیگر است و اطلاعات جدیدی به دستگاه اضافه نمی‌کند)

$$\begin{cases} 2x+y+z=5 \\ \quad 4y-6z=-2 \\ 2x+5y-5z=3 \end{cases} \Leftarrow \text{معادله سوم جمع دو معادله اول است}$$



- **دستگاه جوابی ندارد.** در این حالت صفحات نقطه اشتراکی ندارند. در فضای سه بعدی، یکی از چند موقعیت زیر ممکن است رخ دهد.



حالت اول، وقتی که دستگاه یک جواب منحصر بفرد دارد، اصطلاحا گفته می‌شود که دستگاه نامنفرد یا ناتکین (non-singular) است. دو حالت دیگر وقتی که دستگاه بیشمار جواب دارد یا جوابی ندارد گفته می‌شود که دستگاه منفرد یا تکین singular است.

۵ تصویر ستونی دستگاه معادلات خطی

$$\begin{cases} 2u+v+w=5 \\ \quad 4u-6v=-2 \\ -2u+7v+2w=9 \end{cases}$$

دستگاه معادلات خطی بالا را می‌توان با استفاده از جمع برداری و ضرب اسکالر نوشت.

$$u\begin{bmatrix}2\\4\\-2\end{bmatrix}+v\begin{bmatrix}1\\-6\\7\end{bmatrix}+w\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-2\\9\end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر آیا یک **ترکیب خطی** از سه بردار $\begin{bmatrix}2\\4\\-2\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\-6\\7\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ وجود دارد که حاصلش بردار $\begin{bmatrix}5\\-2\\9\end{bmatrix}$ شود؟

تعریف: فرض کنید $u_1, \dots, u_k$ بردارهایی در F^n هستند و $a_1, \dots, a_k$ عناصری از میدان F می‌باشند. به عبارت $a_1u_1 + \dots + a_ku_k$ یک ترکیب خطی از بردارهای $u_1, \dots, u_k$ گفته می‌شود. ترکیب خطی خود برداری در F^n را بدست می‌دهد.

فرض کنید $c_1, \dots, c_n$ بردارهای ستونی دستگاه باشند و b بردار سمت راست باشد.

$$x_1\begin{bmatrix}\\c_1\\\\\end{bmatrix}+\dots+x_n\begin{bmatrix}\\c_n\\\\\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\\b\\\\\end{bmatrix}$$

همانند تصویر سطری، سه حالت کلی می‌تواند رخ دهد:

- **دستگاه یک جواب منحصر بفرد دارد.** در این حالت یک ترکیب خطی منحصر بفرد از $c_1, \dots, c_n$ وجود دارد که حاصلش بردار b است. در این حالت، ترکیبهای خطی متفاوت از ستونها همه $\mathbb{R}^n$ را پوشش می‌دهد. یعنی به ازای هر b یک ترکیب خطی از ستونها وجود دارد که حاصلش بردار b است.

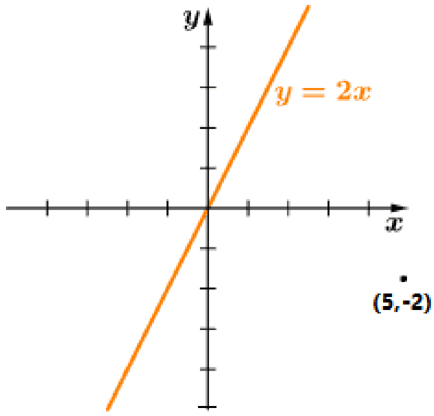
- **دستگاه جواب ندارد.** در این حالت ترکیب خطی ستونها توانایی تولید کل فضا را ندارد. در واقع فضایی که از ترکیب خطی بردارهای $c_1, \dots, c_n$ ایجاد می‌شود یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ است که بعدش از n کمتر است. برای مثال در دستگاه زیر بردارهای ستونی هر دو در یک امتداد قرار دارند و در نتیجه هر ترکیب خطی از آنها در همان امتداد خواهد بود (زیر فضای حاصل یک خط را در فضای دو بعدی تشکیل می‌دهد). اما نقطه $\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}$ روی این خط واقع نیست. پس دستگاه جواب ندارد.

$$u\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}+v\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}$$

- **دستگاه بیشمار جواب دارد.** در این حالت ترکیب خطی بردارهای $c_1, \dots, c_n$ مثل حالت قبل نمی‌تواند کل فضا را تولید و تنها یک زیرفضا از $\mathbb{R}^n$ را تولید می‌کند. اما در این حالت بردار b در فضای ترکیب خطی بردارهای $c_1, \dots, c_n$ واقع شده است و به بی نهایت حالت قابل تولید است. برای نمونه، اگر در مثال قبل بردار $\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ روی خط $y = 2x$ واقع شود، بی نهایت ترکیب خطی از ستونها وجود دارد که می‌تواند این بردار را تولید کند.

۱.۵ حل دستگاه معادلات با روش حذف گاوسی

در این روش با انجام یک سری اعمال (ضرب یک معادله در یک عدد، جمع کردن معادله‌ای با معادله‌ای دیگر، جابجایی معادلات) دستگاه به شکلی در می‌آید که به سادگی قابل حل است. به دستگاه زیر توجه کنید.



$$\begin{cases} 2u+v-w=8 \\ -3u-v+2w=-11 \\ -2u+v+2w=-3 \end{cases}$$

برای سادگی نمایش، ضرایب این دستگاه را بشکل یک ماتریس نمایش می‌دهیم. ستون سمت راست دستگاه را هم به ماتریس اضافه می‌کنیم (ستون الحاقی).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

در روش حذف گاوسی، هدف این است که ماتریس مربعی سمت چپ بشکل بالا مثلثی درآید بطوری که درایه‌های قطر اصلی غیر صفر باشند و درایه‌های زیر قطر صفر شوند. برای رسیدن به این هدف، یک سری اعمال رو سطرهای ماتریس انجام می‌دهیم. در هر مرحله دو گزینه داریم.

- می‌توانیم جای دو سطر را با هم عوض کنیم
- می‌توانیم یک سطر را در عددی ضرب کنیم و به سطری دیگر اضافه کنیم

واضح است هر جوابی که در دستگاه اولیه صدق کند در دستگاه تغییر یافته نیز صدق می‌کند.

برای حل مثال بالا، سری اعمال زیر را انجام می‌دهیم. (در اینجا R_i به معنی سطر iام است)

$$3/2R_1+R_2 \to R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$$R_1+R_3 \to R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

$$R_3 - 4R_2 \to R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

در نتیجه دستگاه معادلات اولیه بصورت زیر ساده می‌شود.

$$\begin{cases} 2u + v - w = 8 \\ \quad \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w = 1 \\ \qquad\quad -w = 1 \end{cases}$$

حال دستگاه را می‌توان از پایین به بالا بسادگی حل کرد. ابتدا مقدار w پیدا می‌شود و سپس با استفاده از معادله دوم مقدار v بدست می‌آید و سپس با استفاده از معادله اول مقدار u حاصل می‌شود.

$$w = -1, v = 3, u = 2$$