جبر خطی (برای دانشجویان رشته مهندسی صنایع) ــ پاییز ۹۸
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
تدریس توسط: حسین جوهری (دانشکده ریاضی)
کتاب مرجع: جبر خطی و کاربردهای آن (گیلبرت استرنگ)

خلاصه‌ی هفته یازدهم و دوازدهم

در فصل جدید به بررسی بردارهای عمود بر هم و فضاهای متعامد می‌پردازیم. به قول دکتر استرنگ، این فصل، فصل نود درجه است. همچنین با دو کاربرد اصلی و مهم فضاهای متعامد آشنا می‌شویم. با استفاده از خواص فضاهای متعامد، روشی را برای محاسبه فاصله یک نقطه از یک صفحه و بطور کلی یک زیرفضا را ارائه می‌دهیم. این همان روش محاسبه خطای کمترین مربعات است که در آمار و مهندسی کاربردهای فراوان دارد. یکی از نتایج این روش، الگوریتمی برای پیدا کردن خطی بهینه است که فاصله‌اش با یک سری نقاط کمترین است. این حالتی ساده از مسئله رگرسیون خطی است.

۱ ضرب داخلی و طول بردار

تعریف: ضرب داخلی یا نقطه‌ای دو بردار $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ در $\mathbb{R}^n$ بصورت تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \end{cases}$$

چون با نمایش ماتریسی و بردارهای ستونی عادت کرده‌ایم، ضرب داخلی را در اینجا بصورت زیر می‌نویسیم.

$$\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}$$

با استفاده از مفهوم ضرب داخلی، طول بردار (یا نرم بردار) قابل تعریف است.

تعریف: طول بردار $\boldsymbol{x}$ برابر با ریشه دوم ضرب داخلی $\boldsymbol{x}$ در خودش است و با نماد $\|\boldsymbol{x}\|$ نشان داده می‌شود.

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

به عبارت دیگر

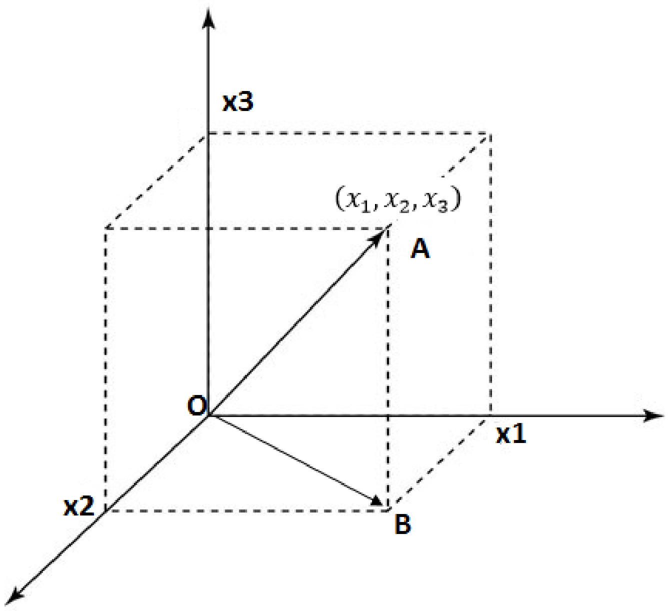
$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

در فضای $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ این دقیقا منطبق با درک شهودی ما از طول یک بردار است. برای مثال شکل زیر را ببینید. با استفاد از قضیه فیثاغورث داریم

$$(OB)^2 = x_1^2 + x_2^2$$
$$(OA)^2 = (OB)^2 + x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

پس

$$OA = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$



۲ بردارهای متعامد orthogonal vectors

تعریف: دو بردار متعامدند (بر هم عمودند) اگر و فقط اگر ضرب داخلی آنها صفر باشد.

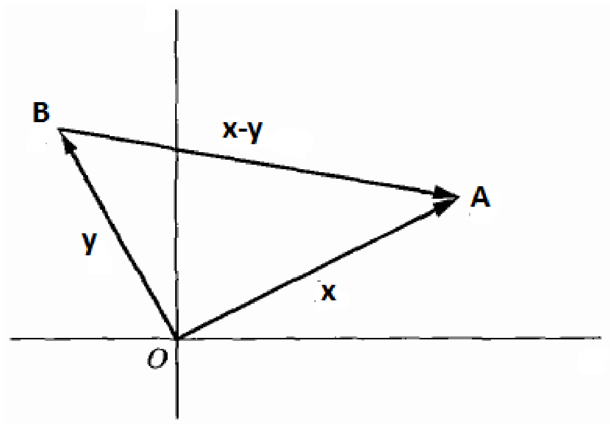
$$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = 0$$

تعامد را می‌توان با طول بردار نیز بیان کرد.

تعریف: دو بردار $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ متعامدند اگر و فقط اگر رابطه زیر برقرار باشد.

$$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2$$

در فضای دو بعدی این رابطه را می‌توان با شکل مشاهده کرد.



یک تعریف دیگر برای عمود بودن دو بردار از طریق زاویه است.

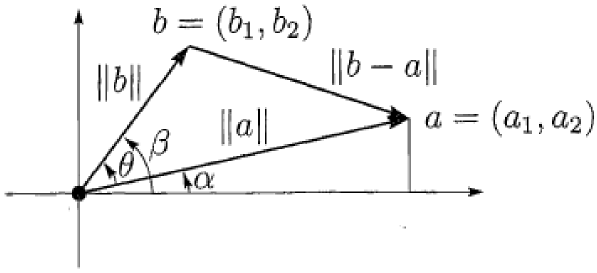
تعریف: θ زاویه بین دو بردار $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ برابر است با زاویه بین دو ضلع OA و OB از مثلث OAB که طول ضلعهای آن به ترتیب $OA = \|\boldsymbol{x}\|$ و $OB = \|\boldsymbol{y}\|$ و $AB = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ است.

دقت کنید زاویه بین دو بردار تعریف شده است چون نامساوی مثلثی برای $\|\boldsymbol{x}\|$ و $\|\boldsymbol{y}\|$ و $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ همیشه صادق است. علاوه بر این، زاویه بین دو بردار همواره بین 0 و π خواهد بود.

قضیه: اگر θ زاویه بین دو بردار $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ باشد آنگاه

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$$

قضیه را برای فضای $\mathbb{R}^2$ ثابت می‌کنیم. شکل زیر را ببینید.



مجموعه روابط زیر را داریم

$$\sin\alpha = \frac{a_2}{\|\boldsymbol{a}\|}, \qquad \cos\alpha = \frac{a_1}{\|\boldsymbol{a}\|}, \qquad \sin\beta = \frac{b_2}{\|\boldsymbol{b}\|}, \qquad \cos\beta = \frac{b_1}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

$$\theta = \beta - \alpha$$

$$\cos\theta = \cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$$

از قضیه بالا نامساوی معروف کوشی ـ شوارتز نتیجه می‌شود.

$$|\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

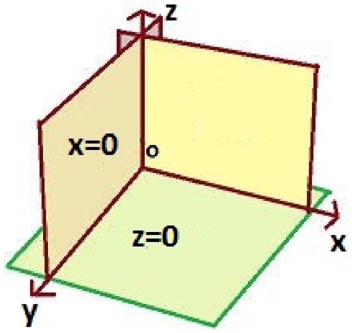
تساوی هنگامی برقرار است که $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ در یک راستا باشند. همچنین وقتی $\theta = 90$ ضرب داخلی برابر با صفر است. نتیجه‌ای که انتظارش را داشتیم.

۳ زیرفضاهای متعامد orthogonal subspaces

تعریف: دو زیرفضای V و U متعامدند اگر هر بردار V بر هر بردار U عمود باشد. به عبارت دیگر

$$\forall \boldsymbol{u} \in U,\ \boldsymbol{v} \in V \qquad \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = 0$$

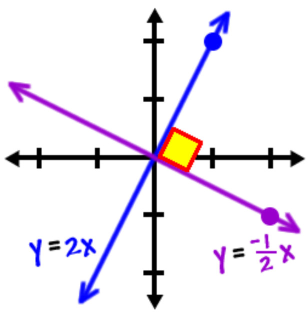
چند مثال:
آیا دو صفحه $z = 0$ و $x = 0$ در فضای سه بعدی $x - y - z$ متعامدند؟ از لحاظ هندسی اینطور به نظر می‌رسد



اما از نظر جبری، با توجه به تعریفی که از زیرفضاهای متعامد ارائه کردیم این دو زیرفضا متعامد نیستند چون شامل بی نهایت بردار مشترک غیر صفر هستند. (تنها برداری که بر خودش عمود است بردار صفر است)

بزودی خواهیم دید که در فضای سه بعدی هیچ دو صفحه‌ای متعامد نیستند.

اما دو خط $y = 2x$ و $y = -\frac{1}{2}x$ در فضای دو بعدی متعامدند. هر دو بردار که در این دو خط در نظر بگیری بر هم عمودند.



۱.۳ تعامد زیرفضاهای اساسی

قضیه: فضای سطری و فضای پوچ ماتریس A متعامدند.

قبل از اینکه قضیه را اثبات کنیم، یک مثال می‌آوریم. صفحه $2x + 3y + 5z = 0$ را در نظر بگیرید. همه جوابهای این معادله (فضای پوچ) بردارهای مثل $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ است که بر بردار $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ عمود است. دقت کنید فضای سطری ماتریس مربوطه بصورت $c\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ است. این بردارها همه بر صفحه مذکور عمودند.

اثبات: فرض کنید $\boldsymbol{x}$ برداری در فضای پوچ A باشد. به عبارت دیگر

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

فرض کنید $\boldsymbol{u}$ برداری در فضای سطری A باشد. نشان می‌دهیم که $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{u}$ متعامدند. یعنی

$$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x} = 0$$

$\boldsymbol{u}$ را می‌توان بصورت ترکیبی خطی از سطرهای A نوشت. یا به عبارت دیگر $\boldsymbol{u}$ را می‌توان بصورت ترکیب خطی از ستونهای A^T نوشت. پس بردار $\boldsymbol{z}$ وجود دارد که

$$A^T\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u}$$

در نتیجه

$$\boldsymbol{z}^T A = \boldsymbol{u}^T$$

پس

$$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{z}^T A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}^T(A\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{z}^T\mathbf{0} = 0$$

□

قضیه: فضای ستونی A و فضای پوچ A^T متعامدند.
اثبات: از قضیه قبلی نتیجه می‌شود.

چند نکته:

- ماتریس $A_{m\times n}$ فضای $\mathbb{R}^n$ را تبدیل به فضای ستونی‌اش می‌کند. به عبارت دیگر هر بردار در فضای $\mathbb{R}^n$ را به یک بردار در فضای ستونی نگاشت می‌کند.

  پس اگر $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ آنگاه $A\boldsymbol{x} \in C(A)$ چون

$$A\boldsymbol{x} = A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} \\ A_1 \\ \\ \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} \\ A_2 \\ \\ \end{bmatrix} + \ldots + x_n\begin{bmatrix} \\ A_n \\ \\ \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \text{ترکیب خطی از ستونها}$$

- دو بردار متفاوت در فضای سطری به برداری یکسان در فضای ستونی نگاشت نمی‌شوند.

  اثبات: فرض کنید دو بردار $\boldsymbol{x}_r$ و $\boldsymbol{x}'_r$ در فضای سطری باشند و داشته باشیم

$$A\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{b}, \qquad A\boldsymbol{x}'_r = \boldsymbol{b}$$

پس

$$A(\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}'_r) = \mathbf{0}$$

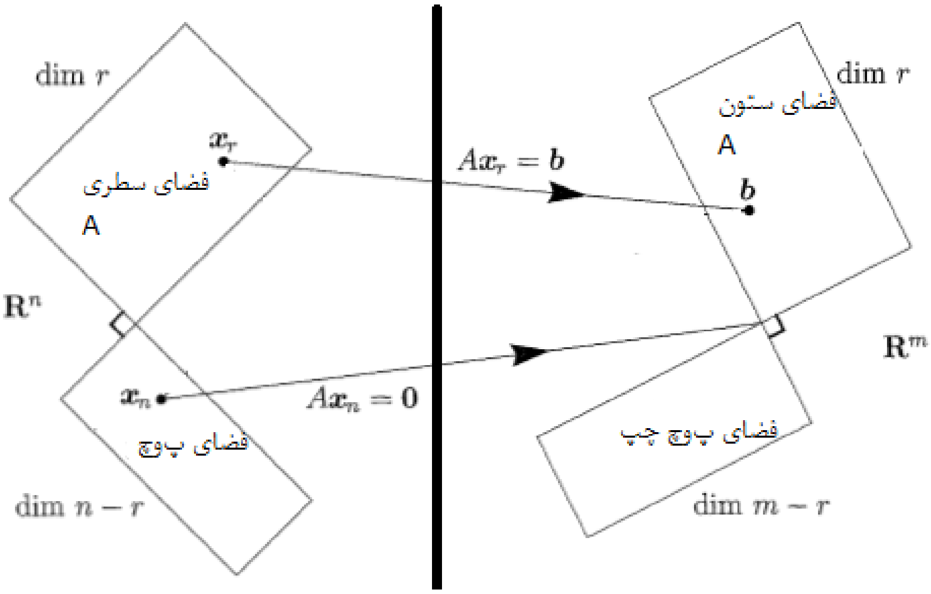
پس بردار $\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}'_r$ در فضای پوچ است. این بردار در فضای سطری نیز است چون از ترکیب خطی دو بردار در فضای سطری بدست آمده است. چون فضای سطری و فضای پوچ متعامدند پس باید $\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}'_r$ بر خودش عمود باشد.

$$\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}'_r \perp \boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}'_r$$

تنها برداری که بر خودش عمود است بردار صفر است. پس

$$\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{x}'_r$$

- هیچ برداری توسط A به فضای پوچ چپ نگاشت نمی‌شود.

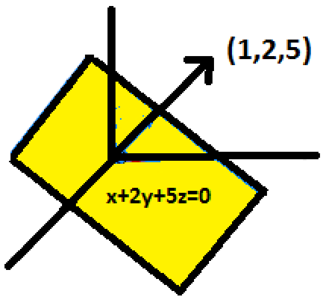


مثال: ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

رتبه ماتریس یک است. سطر دوم ضریبی از سطر اول است. فضای سطری یک خط است $\leftarrow c\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}$

فضای پوچ نیز همان صفحه $x + 2y + 5z = 0$ است.



تعریف: اگر V یک زیرفضا از $\mathbb{R}^n$ باشد، فضای تمام بردارهای متعامد با V را مکمل متعامد V گویند و آن را با نماد $V^\perp$ نمایش می‌دهند.

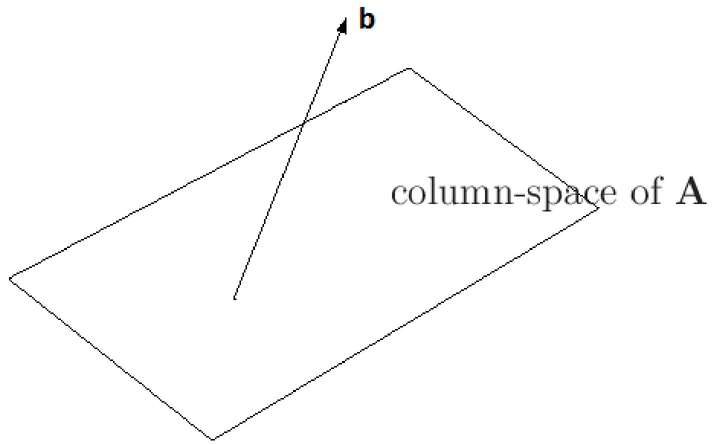
$V^\perp$ نیز یک زیرفضاست. $(V^\perp)^\perp$ برابر با V است. همچنین داریم

$$\dim V + \dim V^\perp = n$$

قضیه: $R(A)$ مکمل متعامد $N(A)$ است. همچنین $C(A)$ مکمل متعامد $N(A^T)$ است.

۴ حل تقریبی دستگاه معادلات با روش کمترین مربعات

فرض کنید دستگاه معادلات $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ جوابی نداشته باشد. در این حالت هیچ ترکیب خطی از ستونهای A وجود ندارد که بردار $\boldsymbol{b}$ را تولید کند. به عبارت دیگر $\boldsymbol{b}$ خارج از فضای ستونی A واقع شده است. شکل زیر را ببینید.



با این وجود، بعضی مواقع نیاز داریم هر طور شده حلی را برای دستگاه پیدا کنیم. یک راهش این است که قید بعضی از معادلات دستگاه را بزنیم و محدودیتها را کمتر کنیم تا دستگاه جواب داشته باشد. اما راه حل دیگری نیز وجود دارد بدون اینکه دستگاه را تغییر دهیم، به جای حل مستقیم، برداری را در فضای ستونی A پیدا می‌کنیم که کمترین فاصله را با $\boldsymbol{b}$ داشته باشد. فرض کنید $A\hat{\boldsymbol{x}}$ نزدیکترین بردار به $\boldsymbol{b}$ باشد. دقت کنید هر بردار در فضای ستونی A را می‌توان بصورت $A\boldsymbol{z}$ نمایش داد زمانی که $\boldsymbol{z}$ ضرایب ترکیب خطی مربوطه باشد. به عبارت دیگر، فرض کنید $\boldsymbol{u} \in C(A)$. آنگاه $\boldsymbol{z}$ وجود دارد که

$$\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{z} = z_1 \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \end{bmatrix} + \ldots + z_n \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

در اینجا $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ ستونهای A هستند. (یادآور می‌شویم که اگر ستونهای A مستقل خطی باشند، این ترکیب خطی منحصر بفرد است.)

حال با فرض اینکه $A\hat{\boldsymbol{x}}$ کمترین فاصله را با $\boldsymbol{b}$ داشته باشد، چند سوال پیش می‌آید. بردار $A\hat{\boldsymbol{x}}$ چه رابطه‌ای با $\boldsymbol{b}$ دارد؟ بردار $A\hat{\boldsymbol{x}}$ را چگونه پیدا کنیم؟ در ادامه به این سوالات پاسخ می‌دهیم.

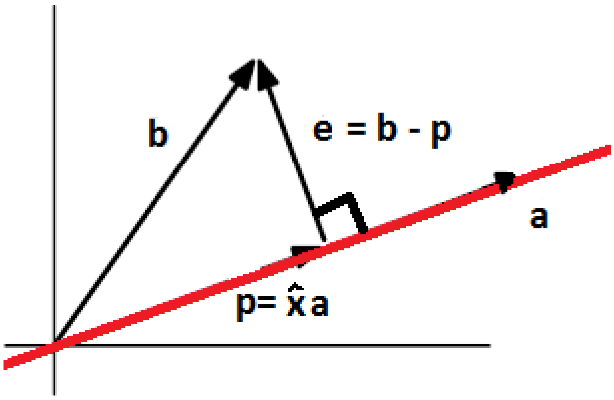
۱.۴ تصویر بردار روی خط

برای سادگی، فرض کنید ماتریس A فقط یک ستون دارد. در این حالت فضای ستونی A یک خط است. خطی که از بردار ستونی $\boldsymbol{a}$ می‌گذرد.

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$$

در این حالت می‌خواهیم نزدیکترین بردار به $\boldsymbol{b}$ روی خطی که از $\boldsymbol{a}$ می‌گذرد را پیدا کنیم. به عبارت دیگر، می‌خواهیم بردار $\boldsymbol{p}$ را پیدا کنیم بطوریکه $\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}\|$ حداقل باشد. از نظر هندسی روشن است که تصویر قائم $\boldsymbol{b}$ روی خط مذکور نزدیکترین بردار به $\boldsymbol{b}$ است. یعنی اگر $\boldsymbol{p}$ تصویر قائم $\boldsymbol{b}$ روی خطی باشد که از $\boldsymbol{a}$ می‌گذرد، باید داشته باشیم

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{p}$$



اگر $\boldsymbol{p} = \hat{x}\boldsymbol{a}$ ($\hat{x}$ همان ضریب مجهولی است که دنبالش می‌گردیم) آنگاه

$$(\boldsymbol{b} - \hat{x}\boldsymbol{a}) \perp \boldsymbol{a}$$

ضرب داخلی این دو بردار صفر است.

$$\boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{b} - \hat{x}\boldsymbol{a}) = 0$$

بعد از جابجایی و ساده کردن بدست می‌آید

$$\hat{x} = \frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$$

پس تصویر $\boldsymbol{b}$ روی خطی که از $\boldsymbol{a}$ می‌گذرد برابر است با

$$\boldsymbol{p} = \hat{x}\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$$

مثال: تصویر بردار $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ روی خطی که از بردار $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ می‌گذرد را پیدا کنید.

حل:

$$\boldsymbol{p} = \hat{x}\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a} = \frac{2\times 1 + 1\times 2}{2\times 2 + 1\times 1}\boldsymbol{a} = \frac{4}{5}\boldsymbol{a} = \frac{4}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

۵ تصویر بردار روی یک زیرفضا

اکنون حالت کلی را در نظر می‌گیریم. ماتریس A به تعداد دلخواه می‌تواند ستون داشته باشد. ستونهای A تشکیل یک زیرفضا را می‌دهند و ما می‌خواهیم برداری در این زیرفضا پیدا کنیم که فاصله‌اش با $\boldsymbol{b}$ حداقل باشد. به عبارت دیگر، یک $\hat{\boldsymbol{x}}$ را پیدا کنیم که

$$\|\boldsymbol{b} - A\hat{\boldsymbol{x}}\|$$

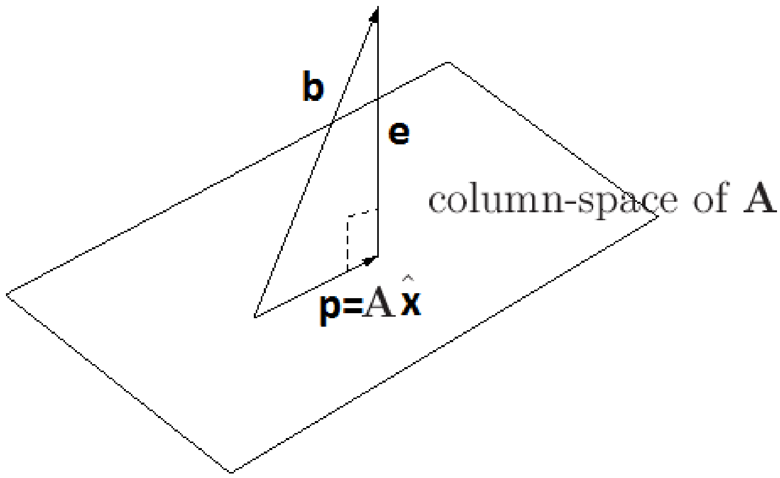
مینیمم شود. در اینجا فرض می‌گیریم که ستونهای A مستقل خطی هستند. اگر فضای ستونی A را با یک صفحه نمایش دهیم، نزدیکترین بردار به $\boldsymbol{b}$ ، تصویر قائم $\boldsymbol{b}$ روی صفحه مذکور است. دقت کنید در اینجا $\hat{\boldsymbol{x}}$ یک بردار است چون بیش از یک مجهول داریم.

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{b} - A\hat{\boldsymbol{x}}$$

در اینجا به $\boldsymbol{e}$ بردار فاصله یا خطا گفته می‌شود. از رابطه بالا نتیجه می‌شود.

$$\|e\|^2 = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}\|^2 = (b_1 - p_1)^2 + \ldots + (b_k - p_k)^2$$

از آنجا که می‌خواهیم $\|\boldsymbol{e}\|^2$ را مینیمم کنیم، به این روش، روش کمترین مربعات گفته می‌شود.



در اینجا $\boldsymbol{e}$ بر فضای ستونی A عمود است. از درس قبلی یاد گرفتیم که بردارهایی که بر فضای ستونی A عمود هستند، در فضای پوچ چپ A واقع شده‌اند. در نتیجه

$$A^T\boldsymbol{e} = 0$$

پس

$$A^T(\boldsymbol{b} - A\hat{\boldsymbol{x}}) = 0$$

که معادل است با

$$A^TA\hat{\boldsymbol{x}} = A^T\boldsymbol{b}$$

اگر ستونهای A مستقل خطی باشند، A^TA وارون پذیر خواهد بود. پس با این فرض بدست می‌آید

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\boldsymbol{b}$$

پس تصویر $\boldsymbol{b}$ برابر خواهد بود با

$$\boldsymbol{p} = A(A^TA)^{-1}A^T\boldsymbol{b}$$

$A(A^TA)^{-1}A^T$ یک نوع ماتریس تصویر projection matrix است. ماتریسهای تصویر ویژگیهای جالبی دارند. برای مثال اگر J یک ماتریس تصویر باشد آنگاه $J^2 = J$. چون وقتی برداری در یک زیرفضا تصویر شد، تصویرهای بعدی همان تصویر قبلی را بدست می‌دهند.

$$J(J\boldsymbol{b}) = J\boldsymbol{b}$$

مثال: تصویر بردار $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$ روی فضای ستونی ماتریس $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 3\\0 & 0\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل: ماتریس تصویر متناظر با ماتریس A را حساب می‌کنیم.

$$A(A^TA)^{-1}A^T = \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 3\\0 & 0\end{bmatrix} (\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\2 & 3 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 3\\0 & 0\end{bmatrix})^{-1} \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\2 & 3 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\-1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

تصویر $\boldsymbol{b}$ برابر است با

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\-1 & 1 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

چند حالت خاص

- بردار $\boldsymbol{b}$ در فضای ستونی A واقع شده است. در این حالت تصویر $\boldsymbol{b}$ منطبق بر خودش است. همین طور هم هست. از آنجا که $\boldsymbol{b}$ در فضای ستونی A واقع شده است، بردار $\boldsymbol{x}$ وجود دارد که $\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}$. تصویر $\boldsymbol{b}$ برابر است با

$$\boldsymbol{p} = A(A^TA)^{-1}A^T\boldsymbol{b} = A(A^TA)^{-1}A^TA\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

- $\boldsymbol{b}$ بر فضای ستونی A عمود است. پس باید داشته باشیم

$$A^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

تصویر $\boldsymbol{b}$ برابر است با

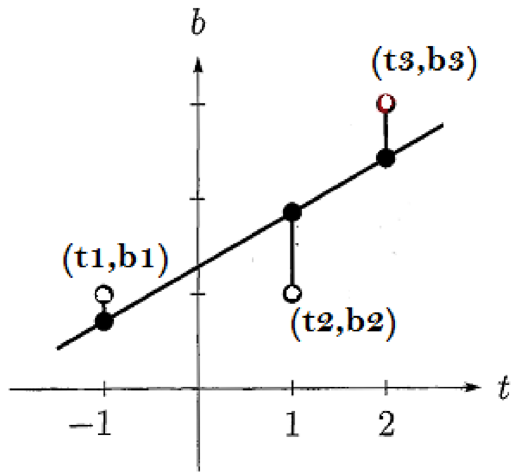
$$\boldsymbol{p} = A(A^TA)^{-1}A^T\boldsymbol{b} = A(A^TA)^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

- ماتریس A مربعی است و وارون پذیر است. پس فضای ستونی کل $\mathbb{R}^n$ را پوشش می‌دهد. در نتیجه $\boldsymbol{b}$ در فضای ستونی واقع شده است. مانند حالت اول است.

۶ برازش خطی با استفاده از کمترین مربعات

می‌خواهیم خطی را پیدا کنیم که کمترین فاصله را با یک سری نقاط داشته باشد. این مسئله کاربردهای فراوانی در علوم و مهندسی دارد. در علم آمار به این مسئله رگرسیون خطی گفته می‌شود. شکل زیر را ببینید.

می‌خواهیم خط $b = C + Dt$ را مشخص کنیم که از سه نقطه داده شده کمترین فاصله را داشته باشد. در اینجا C و D مجهول هستند. فاصله کل را مجموع مربع فاصله نقاط از خط در نظر می‌گیریم. همانطور که در شکل نشان



داده شده است فاصله را بصورت عمودی در راستای محور b در نظر می‌گیریم (بر خلاف بخش قبلی که فاصله قائم بر خط در نظر می‌گرفتیم). فرض کنید مختصات نقاط داده شده بصورت زیر باشد.

$$(b_1, t_1) = (1, -1) \qquad (b_2, t_2) = (1, 1) \qquad (b_3, t_3) = (3, 2)$$

اگر خط $b = C + Dt$ وجود داشته باشد که از هر سه نقطه عبور کند (که البته چنین خطی وجود ندارد) آنگاه دستگاه زیر یک جواب برای C و D خواهد داشت.

$$\begin{cases} C + Dt_1 = b_1 \\ C + Dt_2 = b_2 \\ C + Dt_3 = b_3 \end{cases}$$

اگر به شکل ماتریسی دستگاه را بنویسیم

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

اما می‌دانیم این دستگاه جواب ندارد. ایرادی ندارد. ما دنبال یک C و D می‌گردیم که مجموع زیر را مینیمم کند.

$$(b_1 - C - t_1 D)^2 + (b_2 - C - Dt_2)^2 + (b_3 - C - Dt_3)^2$$

خب این همان فاصله بردار $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ از فضای ستونی ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \end{bmatrix}$ است. از بخش قبلی شیوه حل این مسئله را می‌دانیم. پس می‌بینید که مسئله برازش خطی (یا رگرسیون خطی) تبدیل به مسئله پیدا کردن تصویر یک بردار در یک زیرفضا شد. در مثال مورد بحث داریم

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

در اینجا داریم $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \end{bmatrix}$. بعد از محاسبات بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

پس خط بهینه مورد نظر خط $b = \frac{9}{7} + \frac{4}{7}t$ است.

۷ بردارهای متعامد

در این قسمت به بررسی خواص بردارهای متعامد خواهیم پرداخت. مجموعه بردار Q را متعامد گویند هر گاه هر دو بردار $u \in Q$ و $v \in Q$ $(u \neq v)$ بر هم عمود باشند.

سوال: نشان دهید اگر Q یک مجموعه بردار متعامد باشد و شامل بردار صفر نباشد آنگاه بردارهای Q مستقل خطی هستند.

حل: فرض کنید مجموعه بردار $Q = \{v_1, \ldots, v_k\}$ مستقل خطی نباشند. پس $\boldsymbol{v}_1$ را می‌توان با ترکیبی خطی از $\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ نوشت.

$$\boldsymbol{v}_1 = \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{v}_k$$

طرفین را ضرب در $\boldsymbol{v}_1^T$ می‌کنیم.

$$\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_1 = \alpha_2 \boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_k$$

چون $\boldsymbol{v}_1$ بر بقیه بردارها عمود است، پس طرف سمت راست صفر است.

$$\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_1 = 0$$

از این نتیجه می‌شود که $\boldsymbol{v}_1$ باید صفر باشد که با فرض مسئله متناقض است. □

بردارهای متعامد کاربرد فراوانی دارند. بویژه در تسهیل محاسبات و ساده‌سازی فرمولها بسیار مفید هستند. برای مثال در قسمت قبل دیدیم که تصویر بردار b روی فضای ستونی ماتریس A (به شرطی که ستونهای A مستقل خطی باشند) از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$A(A^TA)^{-1}A^Tb$$

اگر ستونهای ماتریس A علاوه بر استقلال خطی، متعامد نیز باشند آنگاه A^TA یک ماتریس قطری خواهد بود.

$$A^TA = D$$

وارون یک ماتریس قطری (با وارون کردن درایه‌های روی قطر اصلی) براحتی بدست می‌آید. این حجم محاسبات را تا حد زیادی کاهش می‌دهد.

۱.۷ پایه متعامد

فرض کنید $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ یک پایه برای زیرفضای $V \subseteq \mathbb{R}^n$ باشد. اگر B یک مجموعه بردار متعامد باشد آنگاه B را یک پایه متعامد برای V گویند. اگر هر بردار در B طول واحد نیز داشته باشند آنگاه B را یک پایه متعامد نرمال orthonormal برای V گویند. به عبارت دیگر:

$$\forall i,\ \|v_i\| = 1, \qquad \forall i, j\ (i \neq j)\ v_i.v_j = 0$$

یک پایه متعامد را می‌توان به راحتی به یک پایه متعامد نرمال تبدیل کرد. کافیست هر بردار در پایه را بر طولش تقسیم کنیم.

$$Q = \{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \ldots, \frac{v_k}{\|v_k\|}\}$$

نمایش بردار $u \in V$ در پایه متعامد B براحتی قابل محاسبه است. هدف ما محاسبه ضرایب ترکیب خطی زیر است.

$$u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$$

اگر B متعامد نباشد، برای محاسبه ضرایب α_i نیاز به حل یک دستگاه معادلات داریم ولی با متعامد بودن B نیازی به این کار نیست. برای این منظور، فرض کنید طرفین تساوی بالا را در v_1 ضرب داخلی کنیم.

$$u.v_1 = \alpha_1 v_1.v_1 + \ldots + \alpha_k v_k.v_1$$

با توجه به متعامد بودن v_1 و بقیه بردارهای در B، بدست می‌آید:

$$u.v_1 = \alpha_1 v_1.v_1 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1 = \frac{u.v_1}{v_1.v_1}$$

به همین طریق بدست می‌آید:

$$u.v_j = \alpha_1 v_j.v_j \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_j = \frac{u.v_j}{v_j.v_j}$$

اگر B یک پایه متعامد نرمال باشد آنگاه

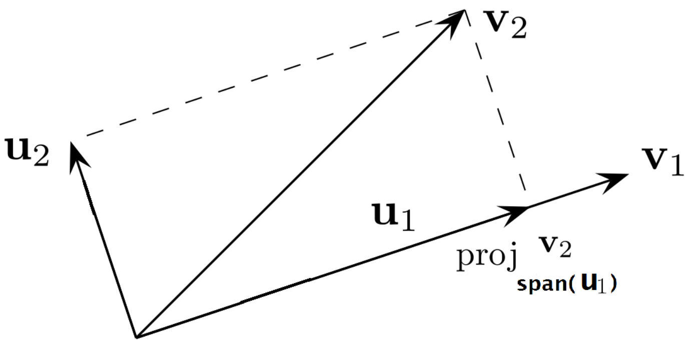
$$\alpha_j = u.v_j$$

۲.۷ پروسه گرام‌ـ اشمیت

برای هر زیرفضا در $\mathbb{R}^n$ می‌توان یک پایه متعامد نرمال پیدا کرد. این کار را می‌توان با استفاده از پروسه گرام‌ـاشمیت Gram- Schmidt انجام داد. فرض کنید بخواهیم یک پایه متعامد برای زیرفضای $V \subseteq \mathbb{R}^n$ پیدا کنیم. پروسه گرام ـ اشمیت از یک پایه دلخواه B برای V شروع می‌کند و رفته رفته بردارهای B را متعامد می‌کند. در اینجا پروسه گرام اشمیت را برای بعدهای ۲ و ۳ توضیح می‌دهیم. شیوه کار برای بعدهای بالاتر مطابق همین روند خواهد بود.

- $\dim V = 2$

فرض کنید $B = \{v_1, v_2\}$ یک پایه برای V باشد.



با بردار v_1 شروع می‌کنیم. ابتدا این بردار را نرمال می‌کنیم. بدست می‌آید

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

واضح است که $span(v_1, v_2) = span(u_1, v_2)$ چون v_1 را تنها با ضریبی غیر صفر از خودش جایگزین کرده‌ایم. پس مجموعه $B' = \{u_1, v_2\}$ یک پایه برای V خواهد بود. حال به سراغ v_2 می‌رویم و آن را با برداری جایگزین می‌کنیم که بر u_1 عمود باشد و اسپن حاصل هم تغییری نکند. فرض کنید بردار x تصویر v_2 روی $span(u_1)$ باشد.

$$x = Proj_{span(u_1)}(v_2) = \alpha u_1 = \frac{v_2.u_1}{u_1.u_1}u_1 = (v_2.u_1)u_1$$

$\alpha = v_2.u_1$ در اینجا یک اسکالر است. تعریف می‌کنیم

$$y_2 = v_2 - x = v_2 - \alpha u_1$$

بنا به تعریف، بردار y_2 بر u_1 عمود است. از طرفی دیگر

$$span(u_1, v_2) = span(u_1, y_2)$$

چون y_2 ترکیبی خطی از u_1 و v_2 است. برای فهم این مطلب فرض کنید بردار z در $span(u_1, v_2)$ باشد پس

$$z = c_1u_1 + c_2v_2 = c_1u_1 + c_2(y_2 + \alpha u_1) = (c_1 + \alpha)u_1 + c_2y_2$$

پس z در $span(u_1, y_2)$ است. حال فرض کنید z در $span(u_1, y_2)$ باشد. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که z در $span(u_1, v_2)$ است. حال کافی است که y_2 را نرمال کنیم.

$$u_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$$

دو بردار $\{u_1, u_2\}$ یک پایه متعامد نرمال برای V خواهد بود.

- $\dim V = 3$

فرض کنید $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ یک پایه برای V باشد. مانند حالت دو بعدی ابتدا دو بردار v_1 و v_2 را متعامد میکنیم. پایه جدید زیر برای V بدست می‌آید.

$$B' = \{u_1, u_2, v_3\}$$

حال مانند قبل کافیست که تصویر v_3 روی $span(u_1, u_2)$ را بدست آوریم. فرض کنید x تصویر v_3 روی $span(u_1, u_2)$ باشد.

$$x = Proj_{span(u_1,u_2)}(v_3) = (u_1.v_3)u_1 + (u_2.v_3)u_2$$

تعریف می‌کنیم:

$$y_3 = v_3 - x$$

حال y_3 را نرمال میکنیم.

$$u_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|}$$

مجموعه بردار $\{u_1, u_2, u_3\}$ یک پایه متعامد نرمال برای V خواهد بود.

۳.۷ ماتریس متعامد

تعریف: ماتریس مربعی A را متعامد orthogonal گویند اگر سطرهایش برهم عمود باشند و هر سطر طول واحد داشته باشد. به عبارت دیگر $AA^T = I$

از تعریف بالا نتیجه می‌شود که اگر A متعامد باشد آنگاه

$$A^T = A^{-1}$$

پس

$$A^T A = I$$

به عبارت دیگر ستونهای یک ماتریس متعامد نیز بر همدیگر عمودند و طول واحد دارند.

در زیر چند نمونه از ماتریسهای متعامد آورده شده است.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

ماتریسهای متعامد در صورتی که مانند یک نگاشت عمل کنند طول بردار را حفظ می‌کنند. به عبارت دیگر اگر A یک ماتریس متعامد باشد آنگاه

$$\|x\| = \|Ax\|$$

اثبات:

$$\|Ax\|^2 = Ax.Ax = (Ax)^T Ax = x^T A^T Ax = x^T Ix = x^T x = \|x\|^2$$

آنها همچنین زاویه بین دو بردار را تغییر نمی‌دهند. به عبارت دیگر اگر A ماتریسی متعامد باشد و $\theta_{x,y}$ زاویه بین دو بردار x و y را نشان دهد آنگاه

$$\theta_{x,y} = \theta_{Ax,Ay}$$

اثبات:

$$\cos\theta_{Ax,Ay} = \frac{Ax.Ay}{\|Ax\|\|Ay\|} = \frac{(Ax)^T Ay}{\|x\|\|y\|} = \frac{x^T A^T Ay}{\|x\|\|y\|} = \frac{x^T y}{\|x\|\|y\|} = \frac{x.y}{\|x\|\|y\|} = \cos\theta_{x,y}$$

چون $0 \leq \theta_{x,y} \leq \pi$ نتیجه می‌شود

$$\theta_{x,y} = \theta_{Ax,Ay}$$