جبر خطی (برای دانشجویان رشته مهندسی صنایع) ـ ترم پاییز ـ سال ۹۸
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
تدریس توسط: حسین جوهری (دانشکده ریاضی)
کتاب مرجع: جبر خطی و کاربردهای آن (گیلبرت استرنگ)

خلاصه‌ی هفته دوم

۱ ضرب ماتریسها

در این درس دستگاه معادلات و الگوریتم حذف گاوسی را از دید ضرب ماتریسی مورد بررسی قرار می‌دهیم. دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} 2u + v - w = 8 \\ -3u - v + 2w = -11 \\ -2u + v + 2w = -3 \end{cases}$$

ضرایب مجهولات را می‌توان بصورت یک ماتریس نمایش داد و دستگاه را با استفاده از ضرب ماتریسی بصورت زیر بیان کرد.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \\ -3 \end{bmatrix}$$

در حالت کلی اگر A ماتریس ضرایب باشد و بردار x مجهولات معادله و بردار b ثابتهای سمت راست باشد، دستگاه معادلات را می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$Ax = b$$

قبل از اینکه به الگوریتم حذف گاوسی از دید ضرب ماتریسی نگاه کنیم، چند تفسیر مختلف را برای ضرب ماتریسها ارائه می‌دهیم که بعدا از آن استفاده خواهیم کرد. ابتدا به تعریف کلاسیک ضرب ماتریسها می‌پردازیم.

تعریف: ضرب ماتریس A در ماتریس B را با $A \times B$ نمایش می‌دهیم. (برای سادگی بیشتر با AB هم نمایش داده می‌شود). ضرب $A \times B$ موقعی قابل تعریف است که تعداد ستونهای A برابر با تعداد سطرهای B باشد. فرض کنید ابعاد A برابر با $n \times p$ و ابعاد B برابر با $c \times m$ باشد، آنگاه ماتریس $C = A \times B$ یک ماتریس با ابعاد $n \times m$ است. درایه واقع در سطر i ام و ستون j ام ماتریس C را با c_{ij} نمایش می‌دهیم که برابر است با

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

۱.۱ تفسیر ستونی ضرب ماتریس

حاصلضرب $C = A \times B$ را در نظر بگیرید. مشابه آنچه در مورد تصویر ستونی دستگاه معادلات گفته شد، هر سطر ماتریس D برابر با ترکیبی خطی از ستونهای ماتریس A است که ضرایب آن از ستون متناظر در B می‌آیند. فرض کنید $A_1, \ldots, A_p$ ستونهای ماتریس A باشند. دقت کنید که هر A_i یک بردار با طول n است.

$$\begin{bmatrix} A_1 & \ldots & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & \ldots & B_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & \ldots & C_m \end{bmatrix}$$

ستون C_i برابر است با ترکیب خطی ستونهای $A_1, \ldots, A_p$ که ضراییش را ستون B_i تامین می‌کند. برای مثال فرض کنید $B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{bmatrix}$ باشد. داریم

$$C_1 = b_{11} \begin{bmatrix} A_1 \end{bmatrix} + \ldots + b_{p1} \begin{bmatrix} A_p \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر **هر ستون ماتریس C جمع ستونهای ماتریس A است بعد از اینکه هر ستون در ضریبی ضرب شود. این ضریبها از ستون متناظر از ماتریس B می‌آیند.**

مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 58 \\ 139 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 11 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 64 \\ 154 \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 10 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 12 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

۲.۱ تفسیر سطری ضرب ماتریس

تفسیر سطری همانند تفسیر ستونی است با این تفاوت این بار هر سطر C برابر با ترکیب خطی سطرهای B است که ضرایب آن از سطر متناظر از ماتریس A می‌آید.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ & & \vdots & \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ & & \vdots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix}$$

برای مثال سطر اول C برابر است با

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \end{bmatrix} + \ldots + a_{1p} \begin{bmatrix} b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pm} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 58 & 64 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 9 & 10 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 11 & 12 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 139 & 154 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 9 & 10 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 11 & 12 \end{bmatrix}$$

۳.۱ تفسیر سطری–ستونی ضرب ماتریس

در این حالت ضرب ماتریس $A \times B$ با جمع p ماتریس بیان می‌شود. این تفسیر در واقع مثل بسط تفسیر ستونی به چندین ماتریس است.

هر ماتریس در مجموع سمت راست حاصلضرب یک ستون A در سطر متناظر آن در B است.

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ C_{11} & \dots & C_{1m} \\ \\ \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \\ C_{p1} & \dots & C_{pm} \\ \\ \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 11 & 12 \end{bmatrix}$$

۴.۱ تفسیر الگوریتم حذف گاوسی با ضرب ماتریسها

گامهای الگوریتم حذف گاوسی (ضرب یک معادله در یک عدد، جمع کردن معادله‌ای با معادله‌ای دیگر، جابجایی معادلات) را می‌توان با استفاده از ضرب ماتریسها نمایش داد. فرض کنید ضرایب دستگاه بصورت ماتریس زیر باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

می‌خواهیم این ماتریس را پس از یک سری عملیات (جابجایی سطرها، ضرب یک سطر در یک عدد و جمع آن با سطر دیگر) به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل کنیم. در گام اول سطر اول را در $3/2$ ضرب کرده و با سطر دوم جمع می‌زنیم.

$$3/2R_1 + R_2 \to R_2$$

این کار را می‌توان با یک ضرب ماتریسی انجام داد. در اینجا از تفسیر سطری ضرب ماتریسی کمک می‌گیریم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 + R_3 \to R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

به همین ترتیب

$$R_3 - 4R_2 \to R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U$$

اگر اسم ماتریسهایی که در ماتریس A ضرب کردیم تا ماتریس بالا مثلثی U را بدست آوریم، به ترتیب E_{12} و E_{13} و E_{23} بگذاریم، تساوی زیر عملیات بالا را خلاصه می‌کند.

$$E_{23}E_{13}E_{12}A = U$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

اگر دقت کنید ماتریسهای ضریب همه پایین مثلثی هستند. این یک امر اتفاقی نیست. در واقع در هر اجرای الگوریتم حذف گاوسی ماتریس ضرایب بصورت پایین مثلثی خواهند بود. ماتریس $E_{23} \times E_{13} \times E_{12}$ هم پایین مثلثی خواهد بود (چرا؟).

می‌توانیم عملیات انجام شده روی ماتریس A را معکوس کنیم و از ماتریس U به ماتریس A برگردیم. کافی است اول اثر ضرب ماتریس E_{23} را خنثی کنیم، و سپس به ترتیب اثر ماتریس E_{13} و اثر ماتریس E_{12} را از بین ببریم. برای مثال برای خنثی کردن اثر E_{23} باید 4 برابر سطر دوم را با سطر سوم جمع کنیم. خب این معادل با ضرب در ماتریس زیر است.

$$E_{23}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ما هنوز ماتریس معکوس را بطور رسمی تعریف نکرده‌ایم اما این دقیقا همان معکوس ماتریس E_{23} است. پس می‌توانیم بنویسیم

$$A = (E_{12}^{-1} \times E_{13}^{-1} \times E_{23}^{-1}) \times U$$

در واقع

$$A = LU$$

زمانی که

$$L = E_{12}^{-1} \times E_{13}^{-1} \times E_{23}^{-1}$$

طبیعی است که ماتریس L پایین مثلثی است. چیزی که بدست آورده‌ایم تجزیه ماتریس A به دو ماتریس پایین مثلثی و بالا مثلثی است. به علاوه ماتریس پایین مثلثی درایه‌های قطری اصلی‌اش همه 1 هستند. این کار را نمی‌توان برای همه ماتریسهای مربعی انجام داد. روشن است برای اینکه همه گامها با موفقیت انجام شود ماتریس A باید حداقل غیرمنفرد non-singular باشد (دستگاه متناظر باید جواب منحصر بفرد داشته باشد) در غیر اینصورت روش حذف گاوسی به بن بست می‌رسد و ما نمی‌توانیم کار را ادامه بدهیم.

۵.۱ ماتریس جایگشت

اگر به یاد داشته باشید، در روش حذف گاوسی بعضی اوقات ناچار می‌شدیم که جای دو تا سطر را عوض کنیم. در مثال قسمت قبل این کار لازم نبود اما مواردی وجود دارد که ناچاریم سطرها را جابجا کنیم. جابجایی سطرها را هم می‌توانیم با ضرب ماتریس بیان کنیم. فرض کنید می‌خواهیم دو سطر اول و دوم A را جابجا کنیم. کافی است A را در ماتریس زیر ضرب کنیم.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریسی که در آن ضرب کردیم یک نمونه از ماتریس جایگشت است. در ماتریسهای جایگشت، همه سطرها تنها یک درایه‌ی 1 دارند و بقیه درایه‌ها صفر هستند. ستونها هم همینطور.

برای جابجایی ستونها هم می‌توانیم از ماتریس جایگشت استفاده می‌کنیم. با این تفاوت که اینجا موقع ضرب کردن ماتریس جایگشت در سمت راست قرار می‌گیرد. فرض کنید می‌خواهیم ستون دوم و سوم A را جابجا کنیم.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

سوال: آیا تغییر دادن بردار b در دستگاه معادلات $Ax = b$ تاثیری بر نامنفرد بودن دستگاه می‌گذارد؟ به عبارت دیگر آیا می‌شود b را تغییر داد و دستگاه را از حالت منفرد بودن خارج کرد؟

جواب: خیر. از حذف گاوسی نتیجه می‌شود که بردار b تاثیری بر منفرد بودن یا نبودن دستگاه ندارد. اگر بتوانیم با یک سری عملیات سطری ماتریس A را به ماتریس بالا مثلثی تبدیل کنیم به شرطی که درایه‌های قطر اصلی همه غیر صفر باشند، آنگاه دستگاه جواب یکتا دارد در غیر این صورت دستگاه جواب یکتا ندارد. روشن است موفقیت این پروسه ربطی به بردار b ندارد.

پس می‌توانیم خاصیت منفرد بودن یا نامنفرد بودن را صرفا برای ماتریس A بکار بریم. از بحثهایی که تا حالا کردیم نتیجه می‌شود:

ماتریس مربعی A نامنفرد (ناتکین) است اگر و فقط اگر برای هر b دستگاه $Ax = b$ جواب یکتا داشته باشد. در واقع اگر $Ax = b$ برای یک b جواب یکتا داشته باشد، آنگاه برای هر b جواب یکتا دارد. برای ماتریس نامنفرد A نگاشت Ax یک (تناظر یک به یک) میان $x \in F^n$ و $Ax \in F^n$ ایجاد می‌کند. هر بردار فضا به برداری یکتا نگاشت می‌شود.

۲ ادامه بحث تجزیه مثلثی

از مشاهدات ما در مورد تجزیه مثلثی نتیجه می‌شود که برای هر ماتریس مربعی نامنفرد A یک ماتریس جایگشت P وجود دارد که

$$PA = LU$$

هنگامی که U یک ماتریس بالا مثلثی است (با درایه‌های غیرصفر در قطر اصلی) و L یک ماتریس پایین مثلثی است که درایه‌های قطر اصلی همه 1 هستند. در حالتی که نیازی به جابجایی سطری نباشد ماتریس جایگشت ماترسی واحد (همانی) I است و می‌توانیم بنویسیم $A = LU$. البته اگر A منفرد باشد، باز هم تجزیه مثلثی وجود دارد اما درایه‌های قطر اصلی U همه غیرصفر نخواهند بود.

کاربردهای تجزیه مثلثی. در صورتی که تجزیه مثلثی $PA = LU$ وجود داشته باشد حل دستگاه $Ax = b$ ساده‌تر خواهد شد. روشن است که جوابهای دستگاه $Ax = b$ و $PAx = b$ یکسان است. پس بدون کاهش عمومیت مسئله فرض می‌کنیم که $A = LU$ (نیازی به جابجایی سطری وجود ندارد). در این حالت داریم

$$Ax = LUx = b$$

فرض کنید $Ux = y$. ابتدا دستگاه $Ly = b$ را حل می‌کنیم و y را بدست می‌آوریم. چون ضرایب دستگاه یک ماتریس پایین مثلثی است، این دستگاه براحتی حل می‌شود. حال دستگاه بالامثلثی $Ux = y$ را حل می‌کنیم. این دستگاه هم چون بالا مثلثی است براحتی حل می‌شود. درنتیجه دستگاه $Ax = b$ با وجود ماتریسهای L و U براحتی قابل حل است.

همچنین در بخشهای بعدی درس خواهیم دید که دترمینان حاصلضرب AB برابر با دترمینان A ضرب در دترمینان B است. نتیجه اینکه $det(A) = det(L)det(U)$ دترمینان ماتریسهای L و U بدلیل مثلثی بودنشان براحتی قابل محاسبه است (حاصلضرب درایه‌های قطر اصلی). پس دترمینان A براحتی قابل محاسبه است.

۳ ماتریس وارون

تعریف: در صورتی که داشته باشیم $AB = I$ آنگاه اصطلاحا گفته می‌شود B وارون راست ماتریس A است. اگر $BA = I$ آنگاه B وارون چپ A است.

اگر ماتریس A مربعی باشد، وارون چپ و راست آن (در صورت وجود) یکسان است.

اثبات: فرض کنید برای ماتریس مربعی A داشته باشیم $AB = I$ و $CA = I$. ثابت می‌کنیم $B = C$. چون ضرب ماتریسی شرکت پذیر است

$$B = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

نتیجه اینکه برای ماتریس مربعی A، ماتریس وارون A^{-1} قابل تعریف است. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ پس $(A^{-1})^{-1} = A$

همه ماتریسها وارون ندارند. برای مثال ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ وارون ندارد. چون هیچ a و b و c و d وجود ندارد که

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چون دستگاههای زیر هیچ کدام جواب ندارند.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

اما تفسیر جالبتری برای عدم وجود وارون برای ماتریس A وجود دارد. بردار غیر صفر x وجود دارد که در دستگاه $Ax = 0$ صدق می‌کند. برای مثال

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اگر A^{-1} وجود داشته باشد آنگاه به تناقض زیر می‌رسیم.

$$A^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از این مثال یک نتیجه کلی بدست می‌آید. **اگر A وارون پذیر باشد، آنگاه Ax هیچ بردار غیر صفری را به بردار صفر نگاشت نمی‌کند. عکس این مطلب هم درست است. اگر A وارون پذیر نباشد آنگاه دستگاه $Ax = 0$ حتما یک جواب غیر بدیهی دارد. در حقیقت این دستگاه بیشمار جواب خواهد داشت (چرا؟)** در مورد این مطلب در دروس بعدی به تفصیل بحث خواهد شد.

۴ روش گاوس-جردن برای محاسبه ماتریس وارون

همانطور که در مثال قسمت قبل مشاهده شد، ماتریس وارون را می‌توان با حل یک سری دستگاه معادلات بدست آورد. در واقع برای ماتریس n در n حل n دستگاه معادلات کفایت می‌کند. اما برای محاسبه وارون الگوریتمهای کاراتر وجود دارد. برای مثال روش گاوس-جردن با استفاده از عملیات سطری (همانند روش حذف گاوسی) ماتریس وارون را بدست می‌آورد. اگر به یاد داشته باشید، هر عملیات سطری را توانستیم با یک ضرب ماتریسی بیان کنیم. در اینجا هم از ماتریس A شروع می‌کنیم و پس از یک سری عملیات سطری به ماتریس واحد I می‌رسیم. ماتریسهایی که در این پروسه بکار می‌بریم (ماتریسهای مربوط به جابجایی سطر و جمع دو سطر و ضرب یک

سطر در یک عدد) ضرب همه این ماتریسها، ماتریس وارون A را بدست می‌دهد. برای مثال فرض کنید با ضرب E, F, G, H, K در ماتریس A ماتریس واحد بدست آمده است.

$$E \times (F \times (G \times (H \times (K \times A)))) = I$$

روشن است که

$$E \times F \times G \times H \times K = A^{-1}$$

بجای اینکه حاصلضرب بالا را بطور مجزا حساب کنیم، روش گاوس_جردن همزمان که تاثیر ضرب ماتریسهای K تا E در A را ثبت می‌کند، ضرب متوالی بالا را هم در قالب تغییراتی که در ماتریس واحد انجام می‌شود (تا اینکه به A^{-1} برسد) ثبت می‌کند. مثالهای زیر طرز کار الگوریتم را روشن می‌کند. دو ماتریس A و I را در کنار هم می‌نویسیم تا تاثیر عملیات سطری روی هر دو ثبت شود.

فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad -2R_1 + R_2 \to R_2 \qquad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

روش حذف گاوسی در اینجا خاتمه می‌یابد چون ماتریس A بالا مثلثی شده است. اما روش گاوس_جردن ادامه پیدا می‌کند تا اینکه A تبدیل به I شود.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] -3R_2 + R_1 \to R_1 \qquad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

نتیجه می‌شود

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

یک مثال دیگر.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad 3/2R_1 + R_2 \to R_2 \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad R_1 + R_3 \to R_3 \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad R_3 - 4R_2 \to R_3 \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

حالا ماتریس بالا مثلثی شده است. عملیات سطری را ادامه می‌دهیم تا اینکه همه درایه‌ها غیر از قطر اصلی صفر شوند.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -4 & 1 \end{array}\right] \qquad R_3 + 2R_2 \to R_2 \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -4 & 1 \end{array}\right] \quad -R_3+R_1 \to R_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 6 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 6 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -4 & 1 \end{array}\right] \quad -R_2+R_1 \to R_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 8 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

حال کافی است هر سطر را در عددی مناسب ضرب تا درایه‌های قطر اصلی همه 1 شوند.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

نتیجه می‌شود

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

۵ ماتریس ترانهاده

تعریف: ترانهاده ماتریس A خود یک ماتریس است که از جابجایی سطرها با ستونهای ماتریس A بدست می‌آید. ترانهاده ماتریس A را با نماد A^T نمایش می‌دهند. از تعریف نتیجه می‌شود

$$\forall i,j \;\; a_{ij} = a^T_{ji}$$

پس اگر ماتریس A ابعاد $n \times m$ داشته باشد ماتریس A^T به ابعاد $m \times n$ خواهد بود.

چند نکته در مورد ماتریس ترانهاده:

- ترانهاده یک ماتریس جایگشت برابر با وارون آن است. به عبارت دیگر

$$P^{-1} = P^T$$

فرض کنید

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

این ماتریس سطرها را بصورت زیر جابجا خواهد کرد.

$1 \leftarrow 1$
$2 \leftarrow 4$
$3 \leftarrow 2$
$4 \leftarrow 5$
$5 \leftarrow 3$

داریم

$$P^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس P^T سطرها را بصورت زیر جابجا می‌کند.

$$\begin{aligned} 1 &\leftarrow 1 \\ 2 &\leftarrow 3 \\ 3 &\leftarrow 5 \\ 4 &\leftarrow 2 \\ 5 &\leftarrow 4 \end{aligned}$$

اگر دقت کنید دقیقا برعکس ماتریس P عمل می‌کند (اثر ماتریس P را خنثی می‌کند). این تساوی

$$P^{-1} = P^T$$

را تایید می‌کند.

- برای ماتریسهای مربعی، وارون ترانهاده برابر با ترانهاده وارون است. به عبارت دیگر

$$(A^{-1})^T A^T = I$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$