جبر خطی (برای دانشجویان رشته مهندسی صنایع) ــ ترم پاییز ــ سال ۹۸
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
تدریس توسط: حسین جوهری (دانشکده ریاضی)
کتاب مرجع: جبر خطی و کاربردهای آن (گیلبرت استرنگ)

خلاصه‌ی هفته چهارم و پنجم

۱ پایه یک فضای برداری

تعریف: مجموعه بردارهای $u_1, \ldots, u_k$ تشکیل یک پایه برای فضای برداری V را می‌دهند در صورتیکه دو خاصیت زیر را داشته باشند:

- $u_1, \ldots, u_k$ مستقل خطی باشند.
- $\mathrm{sp}(u_1, \ldots, u_k) = V$

به عبارت دیگر هر بردار V را بتوان بصورت ترکیب خطی بردارهای $u_1, \ldots, u_k$ نوشت و هر ترکیب خطی از بردارهای $u_1, \ldots, u_k$ یک بردار در فضای V باشد. اصطلاحا می‌گویند بردارهای $u_1, \ldots, u_k$ فضای V را تولید کرده‌اند (یا پدید آورده‌اند).

چند مثال:

- بردارهای $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ تشکیل یک پایه برای فضای $\mathbb{R}^2$ را می‌دهند زیرا مستقل خطی هستند و روشن است که هر نقطه در فضای $\mathbb{R}^2$ را می‌توان با ترکیب خطی این دو بردار نوشت.

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

البته نیازی به گفتن نیست که هر ترکیب خطی از این دو بردار در فضای $\mathbb{R}^2$ واقع است.

- به همین ترتیب n بردار واحد $\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$ تشکیل یک پایه برای فضای $\mathbb{R}^n$ را می‌دهند زیرا مستقل خطی هستند و اسپن آنها برابر با فضای $\mathbb{R}^n$ است. برای مثال

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

نکته مهم: یک فضای برداری یک پایه منحصر بفرد ندارد بلکه بیشمار پایه می‌تواند داشته باشد. اما پایه‌های یک فضای برداری همه به تعداد یکسان بردار دارند. برای مثال امکان ندارد یک فضای برداری پایه‌ای با 3 بردار و پایه‌ای دیگر با 4 بردار داشته باشد.

• در قسمت قبلی دیدیم که بردارهای $\left\{ \begin{bmatrix}-4\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix} \right\}$ تشکیل یک پایه را برای فضای پوچ ماتریس $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$ می‌دهند. می‌توانیم یک پایه دیگر برای همین فضا پیدا کنیم. اینبار x_2 را متغیر محوری در نظر می‌گیریم. در این حالت x_1 و x_3 و x_4 متغیرهای آزاد خواهند بود. بدست می‌آید:

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_3 - 2x_4$$

پس فضای پوچ را می‌توانیم بصورت زیر بیان کنیم.

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\-\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_3 - 2x_4\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}0\\-\frac{3}{2}\\1\\0\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}0\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$$

سه بردار بالا تشکیل یک پایه دیگر برای $N(A)$ را می‌دهند.

لم: فرض کنید $u_1, \ldots, u_m$ و $w_1, \ldots, w_n$ دو پایه برای فضای برداری S باشند. آنگاه لزوما $n = m$

اثبات: با برهان خلف. فرض کنید $m < n$. چون $u_1, \ldots, u_m$ یک پایه برای S است، هر بردار w_j را می‌توان بصورت ترکیب خطی از $u_1, \ldots, u_m$ نوشت (بصورت منحصر بفرد!). پس داریم

$$\begin{bmatrix} \\ w_1 \\ \\ \end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix} \\ u_1 \\ \\ \end{bmatrix} + \ldots + a_{m1}\begin{bmatrix} \\ u_m \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \\ w_2 \\ \\ \end{bmatrix} = a_{12}\begin{bmatrix} \\ u_1 \\ \\ \end{bmatrix} + \ldots + a_{m2}\begin{bmatrix} \\ u_m \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} \\ w_n \\ \\ \end{bmatrix} = a_{1n}\begin{bmatrix} \\ u_1 \\ \\ \end{bmatrix} + \ldots + a_{mn}\begin{bmatrix} \\ u_m \\ \\ \end{bmatrix}$$

روابط بالا را می‌توان بصورت یک ضرب ماتریسی نوشت (به تفسیر ستونی از ضرب ماتریسها فکر کنید)

$$\begin{bmatrix} & & & \\ w_1 & w_2 & \ldots & w_n \\ & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_m \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

اسم ماتریس سمت راست را W می‌گذاریم. ماتریس سمت دوم را U و ماتریس ضرایب را A می‌نامیم. به این ترتیب داریم

$$W = UA$$

به ماتریس A دقت کنید. چون فرض کردیم $m < n$، تعداد سطرهای ماتریس A که m است از تعداد ستونهایش کمتر است. قبلا دیدیم که فضای پوچ ماتریسی که تعداد سطرهایش از ستونهایش کمتر باشد همواره بیشمار عضو دارد. یعنی دستگاه زیر بیشمار جواب دارد.

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

پس این دستگاه یک جواب غیر صفر دارد. در نتیجه دستگاه زیر نیز یک جواب غیر صفر دارد.

$$UA\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

چون $W = UA$ پس دستگاه زیر نیز یک جواب غیر صفر دارد.

$$W\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

در نتیجه ترکیبی خطی از ستونهای W با ضرایب غیر صفر وجود دارد که حاصلش بردار صفر شده است.

$$x_1 \begin{bmatrix} \\ w_1 \\ \\ \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} \\ w_2 \\ \\ \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} \\ w_n \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ 0 \\ \\ \end{bmatrix}$$

این با استقلال خطی بردارهای $w_1, \ldots, w_n$ در تناقض است. پس فرض ما $n > m$ نمی‌تواند درست باشد. مشابه این می‌توان اثبات کرد که $m > n$ هم به تناقض می‌رسد (کافی است اینبار uها بر حسب بردارهای w بنویسیم).
در نتیجه تنها گزینه $m = n$ باقی می‌ماند. $\square$

۲ حل کلی دستگاه معادلات $Ax = b$

۱.۲ چه زمانی دستگاه $Ax = b$ جواب دارد؟

برای پاسخ دادن به این سوال دستگاه $Ax = b$ را بصورت زیر می‌نویسیم. دقت کنید A_1 تا A_n به ترتیب ستونهای ماتریس A هستند.

$$x_1 \begin{bmatrix} \\ A_1 \\ \\ \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} \\ A_2 \\ \\ \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} \\ A_n \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ b \\ \\ \end{bmatrix}$$

حال می‌توان گفت زمانی دستگاه $Ax = b$ جواب دارد که بردار b را بتوان بصورت ترکیبی خطی از ستونهای A نوشت. به عبارت دیگر b در اسپن ستونهای A واقع باشد (یا برداری در فضای ستونی A باشد.) پس اگر b در فضای ستونی ماتریس A نباشد آنگاه دستگاه مربوطه جواب ندارد.

مثال: دستگاه زیر را داریم. می‌خواهیم شرایطی را پیدا کنیم که تحت آنها دستگاه زیر جواب داشته باشد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

پس از عملیات سطری دستگاه بصورت زیر در می‌آید. (ماتریس را پلکانی می‌کنیم)

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\0 & 0 & 2 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2-2b_1\\b_3-b_2-b_1\end{bmatrix}$$

پس شرط اساسی برای وجود جواب این است که $b_3-b_2-b_1=0$ چون معادله سوم دستگاه بصورت زیر در آمده است.

$$0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=b_3-b_2-b_1$$

برای مثال برای بردار $b=\begin{bmatrix}1\\5\\6\end{bmatrix}$ دستگاه جواب دارد.

۲.۲ محاسبه جواب کلی دستگاه $Ax=b$

لم: فرض کنید دستگاه $Ax=b$ جواب داشته باشد و x_p یک جواب دلخواه آن باشد. آنگاه مجموعه S که بصورت زیر تعریف شده است شامل همه جوابهای دستگاه است.

$$S=\{x_p+x_n \mid Ax_n=0\}$$

به عبارت دیگر،

- برای هر $y\in S$ داریم $Ay=b$
- اگر $Ay=b$ آنگاه $y\in S$

اثبات: برای اثبات قسمت اول، فرض کنید $y\in S$. پس $y=x_p+x_n$ بطوری که $Ax_n=0$. با جمع زدن دو معادله بدست می‌آید.

$$A(x_p+x_n)=b$$

پس $Ay=b$

برای اثبات قسمت دوم، فرض کنید داشته باشیم $Ay=b$. باید نشان دهیم $y\in S$. تعریف می‌کنیم $x'=y-x_p$. داریم

$$Ax'=Ay-Ax_p=b-b=0$$

پس x' در فضای پوچ A واقع شده است. در نتیجه x_p+x' عضوی از S است. اما y همان x_p+x' است. پس $y\in S$. □

از لم بالا نتیجه می‌گیریم که برای یافتن حل دستگاه $Ax=b$ تنها کافی است یک جواب دلخواه (x_p) برای دستگاه را پیدا کنیم و سپس دستگاه $Ax=0$ را حل کنیم. مجموعه زیر جواب کلی یا عمومی دستگاه خواهد بود.

$$S=\{x_p+x_n \mid Ax_n=0\}$$

به x_p جواب خصوصی دستگاه و مجموعه $\{x_n|Ax_n=0\}$ جواب همگن دستگاه است.

جواب عمومی = جواب خصوصی + جواب همگن

چند مثال:

- جواب عمومی دستگاه زیر را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

این دستگاه جواب دارد. به دلخواه یک جواب را انتخاب می‌کنیم. برای مثال $x_p=\begin{bmatrix}1/2\\ 1/2\end{bmatrix}$. حال فضای پوچ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

با عملیات سطری ماتریس را بصورت پلکانی در می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

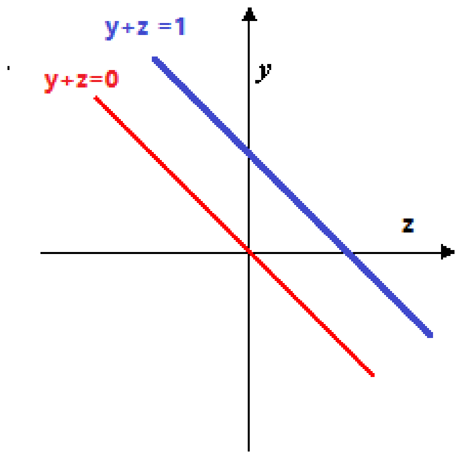
z یک متغیر آزاد است. بردار $\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ یک جواب مخصوص است. پس جواب دستگاه بصورت زیر خواهد بود.

$$\forall c\in\mathbb{R},\ c\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

که همان خط $y+z=0$ است. پس جواب عمومی دستگاه بصورت زیر خواهد بود.

$$S=\{\forall c,\begin{bmatrix}1/2\\ 1/2\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\}$$

که همان خط $y+z=0$ با این اختلاف که مقداری شیفت داده شده است. معادل با خط $y+z=1$ می‌باشد.



- جواب عمومی دستگاه زیر را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 6 & 8 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 5\\ 6\end{bmatrix}$$

با عملیات سطری ماتریس را بصورت پلکانی در می‌آوریم. قبلا این کار را در شروع درس انجام دادیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

که این معادل دستگاه زیر است.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

متغیرهای x_2 و x_4 متغیرهای آزاد هستند. این متغیرها را برابر با صفر قرار داده و یک جواب خصوصی برای دستگاه بدست می‌آوریم.

$$x_p = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حال فضای پوچ دستگاه را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

دو جواب مخصوص را پیدا می‌کنیم. فضای پوچ بصورت ترکیب خطی دو جواب مخصوص است.

$$c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جواب عمومی دستگاه بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جواب در واقع یک صفحه در فضای چهار بعدی است. دقت کنید که این صفحه از مبدا نمی‌گذرد.

۳ بُعد یک زیرفضا dimension

قبلا مفهوم پایه یک زیرفضا را تعریف کردیم. یک پایه برای زیرفضای S یک مجموعه بردار B در زیرفضای S است که دو شرط را برآورده کنند: مستقل خطی باشند و بتوانند کل فضای S را تولید کنند (اصطلاحا اسپن آنها زیرفضای S باشد.) یک نکته مهم در مورد پایه این است که پایه یک زیرفضا منحصر بفرد نیست و بیشمار پایه برای یک زیرفضا می‌توان پیدا کرد. نکته مهم دیگر در مورد پایه این است که همه پایه‌های یک زیرفضا به تعداد یکسان بردار دارند. از این واقعیت تعریف زیر نتیجه می‌شود.

تعریف: بُعد زیرفضای S برابر با تعداد بردارهای یک پایه برای S می‌باشد و آن را با $dim(S)$ یا $dim\ S$ نشان می‌دهند.

۱.۳ بُعد فضای ستونی

ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

برای پیدا کردن بُعد فضای ستونی این ماتریس یعنی $C(A)$ باید یک پایه برای آن پیدا کنیم. روشن است اگر ستون اول را انتخاب کنیم ستون آخر نمی‌تواند در پایه باشد. اگر ستون دوم را هم به پایه اضافه کنیم ستون سوم نمی‌تواند در پایه باشد چون برابر با حاصلجمع ستون اول و دوم است (وابستگی خطی دارد). چون ستون اول و دوم مستقل خطی هستند، از این مشاهدات نتیجه می‌شود که یک پایه برای $C(A)$ می‌تواند دو ستون اول و دوم باشد. درنتیجه $dim(C(A)) = 2$.

۴ محاسبه پایه

فرض کنید می‌خواهیم پایه‌ای برای فضای تولیدی توسط یک سری بردار حساب کنیم. بردارهای ستونی زیر داده شده‌اند.

$$\begin{bmatrix} \\ \boldsymbol{u_1} \\ \\ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \\ \boldsymbol{u_2} \\ \\ \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \\ \boldsymbol{u_n} \\ \\ \end{bmatrix}$$

در واقع می‌خواهیم یک پایه برای $sp(\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_n})$ پیدا کنیم.
بردارها را بصورت سطری در یک ماتریس A قرار می‌دهیم. پس $R(A) = sp(\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_n})$.

$$A = \begin{bmatrix} -- & -- & \boldsymbol{u_1^T} & -- & -- \\ -- & -- & \boldsymbol{u_2^T} & -- & -- \\ -- & -- & \vdots & -- & -- \\ -- & -- & \boldsymbol{u_n^T} & -- & -- \end{bmatrix}$$

حال عملیات سطری را انجام می‌دهیم. فرض کنید U ماتریس پلکانی حاصل باشد. چون عملیات سطری تغییری در فضای سطری ماتریس نمی‌دهد داریم.

$$R(A) = R(U)$$

سطرهای غیر صفر ماتریس U تشکیل یک پایه را برای $R(U)$ می‌دهند. در نتیجه این سطرها تشکیل یک پایه را برای $R(A)$ و متعاقبا برای $sp(\boldsymbol{u_1},\dots,\boldsymbol{u_n})$ می‌دهند.

مثال: یک پایه برای فضای تولیدی توسط بردارهای زیر بدست آورید.

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\\4\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\4\\7\\4\end{bmatrix}$$

بردارها را بصورت سطری در ماتریس A قرار می‌دهیم.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\-1&2&4&0\\0&4&7&4\end{bmatrix}$$

حال عملیات سطری را انجام می‌دهیم. بدست می‌آید:

$$U=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&4&7&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

پس دو سطر اول تشکیل یک پایه را برای $R(A)$ خواهند داد که همان فضای تولیدی توسط بردارهای داده شده است.

۵ بُعد فضای پوچ

قبلا شیوه محاسبه فضای پوچ را یاد گرفتیم. فضای پوچ را با ترکیب خطی چند جواب مخصوص بیان کردیم. برای مثال، فضای پوچ ماتریس A در بخش قبلی بصورت زیر بیان می‌شود. دو ستون جوابهای مخصوص هستند.

$$c\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

از شیوه بیان فضای پوچ، براحتی یک پایه برای آن پیدا می‌شوند.

قضیه: جواب های مخصوص تشکیل یک پایه را برای فضای پوچ $N(A)$ می‌دهند.

۶ اثبات یک قضیه اساسی

قضیه: بعد فضای سطری و ستونی یک ماتریس یکسان است. به عبارت دیگر

$$dim(C(A))=dim(R(A))$$

اثبات: ماتریس A با ابعاد $m\times n$ را در نظر بگیرید. در زیر ثابت می‌کنیم که

$$dim(R(A))\le dim(C(A)) \tag{۱}$$

چون نامساوی بالا برای A^T هم صحت دارد داریم

$$dim(R(A^T)) \leq dim(C(A^T))$$

اما $C(A^T)$ همان $R(A)$ است و $R(A^T)$ همان $C(A)$ است. پس ثابت می‌شود

$$dim(C(A)) \leq dim(R(A)) \tag{۲}$$

(۱) و (۲) را که کنار هم بگذاریم ادعای قضیه ثابت می‌شود.

حال فرض کنید $V = \{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_k}\}$ یک پایه برای فضای ستونی A باشد. پس هر ستون A را می‌توان با ترکیب خطی بردارهای V نوشت. در اینجا $\boldsymbol{c_i}$ ستون iام ماتریس A است.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c_1} &= \alpha_{11}\,\boldsymbol{v_1} + \ldots + \alpha_{k1}\,\boldsymbol{v_k}\\
\boldsymbol{c_2} &= \alpha_{12}\,\boldsymbol{v_1} + \ldots + \alpha_{k2}\,\boldsymbol{v_k}\\
&\vdots\\
\boldsymbol{c_n} &= \alpha_{1n}\,\boldsymbol{v_1} + \ldots + \alpha_{kn}\,\boldsymbol{v_k}
\end{aligned}$$

روابط بالا را می‌توان با یک ضرب ماتریسی بیان کرد.

$$A = B \times C$$

در سمت چپ ماتریس A قرار دارد. ماتریس B با ابعاد $m \times k$ شامل بردارهای پایه V است. هر ستون ماتریس B یکی از بردارهای پایه است. ماتریس C با ابعاد $k \times n$ شامل ضرایب ترکیبهای خطی بالا است. ستون iام ماتریس C ضرایب مربوط به ستون $\boldsymbol{c_i}$ است. (به تصویر ستونی ضرب ماتریسها فکر کنید.)

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \begin{bmatrix} | & | & & | \\ | & | & & | \\ \boldsymbol{c_1} & \boldsymbol{c_2} & \ldots & \boldsymbol{c_n} \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} | & | & & | \\ | & | & & | \\ \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \ldots & \boldsymbol{v_k} \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kn} \end{bmatrix} \end{array}$$

حال اگر به حاصلضرب بالا بصورت سطری نگاه کنیم، هر سطر ماتریس A ترکیبی خطی از سطرهای ماتریس C خواهد شد که ضرایب آن از ماتریس B آمده است. فرض کنید $\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_k}$ به ترتیب سطرهای C باشند و $\boldsymbol{r_i}$ سطر iام ماتریس A باشد. داریم

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r_1} &= \beta_{11}\,\boldsymbol{u_1} + \ldots + \beta_{1k}\,\boldsymbol{u_k}\\
\boldsymbol{r_2} &= \beta_{21}\,\boldsymbol{u_1} + \ldots + \beta_{2k}\,\boldsymbol{u_k}\\
&\vdots\\
\boldsymbol{r_m} &= \beta_{m1}\,\boldsymbol{u_1} + \ldots + \beta_{mk}\,\boldsymbol{u_k}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \begin{bmatrix} -- & -- & \boldsymbol{r_1} & -- & -- \\ -- & -- & \boldsymbol{r_2} & -- & -- \\ -- & -- & \vdots & -- & -- \\ -- & -- & \boldsymbol{r_m} & -- & -- \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1k} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \ldots & \beta_{mk} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -- & \boldsymbol{u_1} & -- \\ -- & \boldsymbol{u_2} & -- \\ -- & \vdots & -- \\ -- & \boldsymbol{u_k} & -- \end{bmatrix} \end{array}$$

حال ماتریس B به عنوان ماتریس ضرایب عمل می‌کند. چون هر سطر A را با استفاده از ترکیب خطی k بردار نوشته‌ایم پس بعد فضای سطری A حداکثر k می‌باشد. پس

$$dim(R(A)) \leq k = dim(C(A))$$

این اثبات ما را کامل می‌کند. □

نتیجه: هر ماتریس A با ابعاد $m \times n$ را می‌توان به صورت حاصلضرب دو ماتریس $B \times C$ نوشت بطوریکه ستونهای B تشکیل یک پایه برای فضای ستونی A می‌دهند و سطرهای C تشکیل یک پایه برای فضای سطری A می‌دهند.

۷ رتبه ماتریس

تعریف: رتبه ماتریس A که با $rank(A)$ یا $r(A)$ نمایش داده می‌شود برابر با تعداد ستونهای محوری بعد از انجام عملیات سطری است. از این تعریف و مشاهدات قبلی نتیجه می‌شود که

$$rank(A) = A \text{ رتبه ماتریس } = dim(R(A)) = dim(C(A))$$

مثال: ماتریس زیر یک ماتریس با رتبه یک است (روشن است بعد فضای ستونی و فضای سطری آن یک است.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$
$$A = B \times C$$

۸ رابطه رتبه ماتریس با تعداد جوابهای دستگاه

در این قسمت تعداد جوابهای دستگاه معادلات $Ax = b$ را با توجه به رتبه ماتریس ضرایب مورد بررسی قرار می‌دهیم و حالات مختلف را بررسی می‌کنیم.

$n =$ **تعداد ستونهای ماتریس** A
$m =$ **تعداد سطرهای ماتریس**
$r =$ **رتبه ماتریس**

نکته: از تعریف رتبه نتیجه می‌شود که $r \leq n$ و $r \leq m$.

- $r = n$

  در این حالت گفته می‌شود ماتریس A دارای رتبه کامل ستونی است (یا تمام رتبه ستونی است).

  full column rank

  از $r = n$ نتیجه می‌شود که ستونها همه مستقل خطی هستند. پس فضای پوچ A تنها شامل بردار صفر است. $N(A) = \{zero\ vector\}$

  اگر $Ax = b$ جواب داشته باشد (که بستگی به b دارد) جواب یکتا دارد که همان جواب خصوصی x_p است.

- $r = m$

در این حالت گفته می‌شود ماتریس A دارای رتبه کامل سطری است (یا تمام رتبه سطری است).

full row rank

از $r = m$ نتیجه می‌شود که سطرها همه مستقل خطی هستند و بعد از عملیات سطری، سطر تماما صفر ایجاد نمی‌شود. پس برای هر b دستگاه جواب دارد. تعداد متغیرهای آزاد برابر با $n - r = n - m$ است. اگر متغیر آزاد وجود داشته باشد دستگاه بیشمار جواب دارد در غیر اینصورت جواب یکتا دارد.

- $r = m = n$

در این حالت گفته می‌شود ماتریس A دارای رتبه کامل است (یا تمام رتبه است).

full rank

از $r = m$ نتیجه می‌شود که برای هر b دستگاه جواب دارد و از $r = n$ نتیجه می‌شود که دستگاه جواب یکتا دارد. پس در این حالت دستگاه برای هر b جواب یکتا دارد. همچنین در این حالت ماتریس A مربعی است و وارون پذیر است.

- $r = m < n$

بنا به مشاهدات بالا دستگاه حتما جواب دارد و چون $m < n$ پس حداقل یک متغیر آزاد وجود دارد. در این حالت دستگاه بیشمار جواب دارد.

- $r = n < m$

بنا به مشاهدات بالا دستگاه یا جواب یکتا دارد و یا جواب ندارد (بستگی به بردار b دارد)

- $r < m,\ r < n$

دستگاه یا جواب ندارد یا در صورت داشتن جواب بیشمار جواب دارد (چون حتما متغیر آزاد خواهیم داشت)

۹ چهار زیرفضای اساسی مربوط به ماتریس A

چهار زیرفضای اساسی برای ماتریس $A_{m\times n}$ قابل تعریف است.

- فضای ستونی A یا همان $C(A)$

$$C(A) \subseteq \mathbb{R}^m \qquad dim(C(A)) = r$$

- فضای سطری A یا $R(A)$

همانند فضای ستونی است با این تفاوت که در اینجا ترکیبهای خطی سطرها را در نظر می‌گیریم. چون به فضای ستونی عادت کرده‌ایم، می‌توانیم با جابجایی سطرها و ستونهای ماتریس A فضای سطری ماتریس A را با $C(A^T)$ بیان کنیم. می‌دانیم که بعد فضای سطری و بعد فضای ستونی یکسانند.

$$R(A) = C(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n \qquad dim(C(A^T)) = dim(R(A)) = r$$

- فضای پوچ A یا همان $N(A)$

$$N(A) \subseteq \mathbb{R}^n \qquad dim(N(A)) = n - r$$

- فضای پوچ A^T یا $N(A^T)$: فضای پوچ چپ A

مجموعه همه بردارهای y است که در دستگاه $A^Ty = 0$ صدق می‌کند. داریم

$$N(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m \qquad dim(N(A^T)) = m - r$$