جبر خطی (برای دانشجویان رشته مهندسی صنایع) ـ ترم پاییز ـ سال ۹۸
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
تدریس توسط: حسین جوهری (دانشکده ریاضی)
کتاب مرجع: جبر خطی و کاربردهای آن (گیلبرت استرنگ)

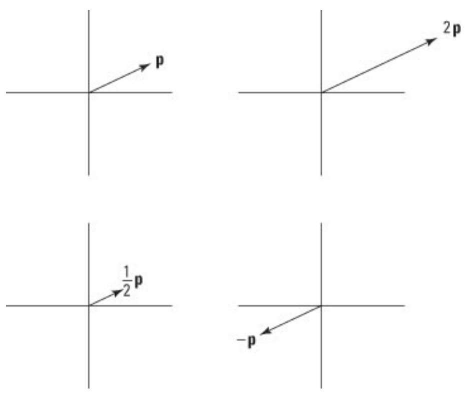
خلاصه‌ی هفته ششم

۱ تبدیل خطی

در درسهای قبلی، بیشتر توجه ما روی حل دستگاه معادلات $Ax = b$ و فضایی که سطرها و ستونهای یک ماتریس ایجاد می‌کنند معطوف بود. در این فصل، ماتریس را مانند یک تابع که روی یک بردار اعمال می‌شود و آن را تغییر می‌دهد می‌بینیم. می‌خواهیم بدانیم ماتریس A که مانند یک تبدیل عمل می‌کند و بردار x را به بردار Ax می‌برد، چه ویژگی‌هایی دارد. آیا می‌توان آن را به شکل صریح و ساده‌ای توصیف کرد؟ آیا می‌توان تاثیر A بر x را بدون محاسبه Ax پیش بینی کرد؟ آیا می‌توان توصیفی شهودی از Ax نسبت به x ارائه کرد؟
ابتدا مقدماتی را در مورد ماتریسها و تبدیلات خطی ارائه می‌کنیم و سپس به مبحث بردارهای ویژه و مقادیر ویژه می‌پردازیم که هدف اصلی ما در این فصل است. قبل از اینکه تبدیلات خطی را بصورت رسمی معرفی کنیم، چند تبدیل خطی ساده در فضای دو بعدی را ذکر می‌کنیم.

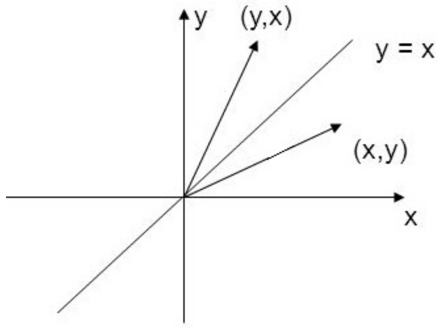
- انبساط یا کشش stretch. ضرب بردار در یک اسکالر باعث انبساط (یا انقباض) آن بردار می‌شود و البته می‌تواند جهت آن را نیز به اندازه 180 درجه بچرخاند. این یکی از ساده‌ترین نمونه‌های تبدیل خطی است. این تبدیل را می‌توان با یک ماتریس بیان کرد.

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx \\ cy \end{bmatrix}$$



- انعکاس reflection. انعکاس نسبت به یک محور یا صفحه نیز جزو تبدیلات خطی معمول است. برای مثال ماتریس زیر بردار داده شده را نسبت به خط $x = y$ منعکس می‌کند.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

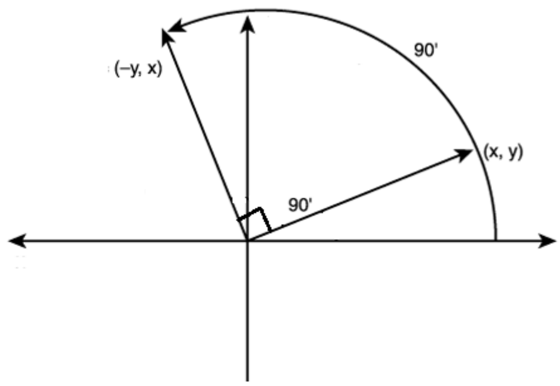


- تصویر projection. تصویر یک شی سه بعدی روی سطحی دو بعدی یکی از پرکاربردترین تبدیلات خطی است. برای مثال تصویر اشعه ایکس که در رادیولوژی انجام می‌شود نمونه‌ای از یک تبدیل خطی است. ماتریس زیر تصویر بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ روی محور x ها را تولید می‌کند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

- دوران rotation. دوران با زاویه‌ای دلخواه نیز جزو تبدیلات خطی است. ماتریس زیر دوران با زاویه 90 درجه در جهت عکس عقربه‌های ساعت را نشان می‌دهد. همانطور که انتظار می‌رود، ضرب داخلی بردار حاصل در بردار مبدا برابر با صفر است.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$



می‌توان دوران با زاویه دلخواه θ را هم با یک ماتریس نشان داد. در پایان این درس روشی ساده و کلی برای یافتن ماتریس تبدیلاتی از این دست را یاد می‌گیریم.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

همه نمونه‌هایی که ذکر کردیم جزو تبدیلات خطی بودند. تبدیلات خطی ویژگی‌ها و محدودیتهای خاص خود را دارند. برای مثال یک تبدیل خطی نمی‌تواند مبدا مختصات را جابجا کند. به عبارت دیگر اگر f یک تبدیل خطی

باشد، $f(0)$ همیشه 0 است. همچنین اگر تبدیل روی جمع دو بردار اعمال شود، مثل این است که تبدیل دو بردار را جمع زده باشیم. بطور کلی تعریف زیر را برای تبدیلهای خطی داریم.

تعریف: فرض کنید U و V دو فضای برداری باشند. تبدیل $f : U \to V$ یک تبدیل خطی است اگر و فقط اگر

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) & \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U \\ f(c\boldsymbol{u}) = cf(\boldsymbol{u}) & \forall \boldsymbol{u} \in U \end{cases}$$

چند نمونه از تبدیلاتی که خطی نیستند

$$f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$g(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} xy \\ y \\ z-1 \end{bmatrix}$$

روشن است با توجه به تعریف بالا، هر ماتریس یک تبدیل خطی را بیان می‌کند. اما آیا می‌توان هر تبدیل خطی را با یک ماتریس بیان کرد؟ در ادامه می‌بینیم که هر تبدیل خطی یک ماتریس متناظر دارد. قبل از آن، دو تبدیل خطی متداول در ریاضیات را مرور می‌کنیم.

۱.۱ مشتق و انتگرال

فرض کنید P_n فضای چندجمله‌ای های یک متغیره با درجه حداکثر n روی میدان $\mathbb{R}$ باشد.

$$a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$$

P_n یک فضای برداری است. روشن است، جمع دو چند جمله‌ای با درجه حداکثر n یک چندجمله‌ای با درجه حداکثر n خواهد بود و ضرب یک چند جمله‌ای درجه n در یک عدد نیز یک چند جمله‌ای با درجه حداکثر n خواهد بود. گذشته از این، هر چند جمله‌ای از درجه n معادل است با یک بردار در فضای $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \qquad \cong \qquad \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

- مشتق یک چند جمله‌ای با درجه n (نسبت به متغیر t) در واقع یک تبدیل خطی از فضای P_n به فضای P_{n-1} است.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} : P_n \to P_{n-1} \\ \frac{d}{dt}(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) = a_1 + \ldots + n a_n t^{n-1} \end{cases}$$

فضای پوچ تبدیل $\frac{d}{dt}$ یک فضای تک بعدی است (همه چند جمله‌ای‌های با درجه صفر).

- انتگرال ($\int_0^t$) نیز یک تبدیل خطی از فضای P_n به فضای P_{n+1} است.

$$\begin{cases} \int_0^t : P_n \to P_{n+1} \\ \int_0^t a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n = a_0 t + \frac{a_1}{2} t^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} \end{cases}$$

در ادامه خواهیم دید که چگونه می‌توان تبدیلات خطی مشتق و انتگرال روی چند جمله‌ای‌ها را با استفاده از یک ماتریس بیان کرد.

۲ ماتریس متناظر با یک تبدیل خطی

فرض کنید U و V دو فضای برداری باشند و $f : U \to V$ یک تبدیل خطی باشد. قضیه اساسی زیر را داریم.

قضیه: فرض کنید $B = \{\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_n}\}$ یک پایه برای فضای برداری U باشد. گر $f(\boldsymbol{u_i})$ را برای هر بردار در پایه B بدانیم، آنگاه $f(\boldsymbol{x})$ را می‌توانیم برای هر $\boldsymbol{x} \in U$ محاسبه کنیم (بدون داشتن توصیف f)

اثبات: چون $B = \{\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_n}\}$ یک پایه برای فضای U است، هر بردار $\boldsymbol{x} \in U$ را می‌توان بصورت ترکیب خطی بردارهای پایه بیان کرد.

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{u_1} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{u_n}$$

حال با توجه به خطی بودن تبدیل f داریم

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(\alpha_1 \boldsymbol{u_1} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{u_n}) \\ &= f(\alpha_1 \boldsymbol{u_1} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{u_n}) \\ &= f(\alpha_1 \boldsymbol{u_1}) + \ldots + f(\alpha_n \boldsymbol{u_n}) \\ &= \alpha_1 f(\boldsymbol{u_1}) + \ldots + \alpha_n f(\boldsymbol{u_n}) \end{aligned}$$

$\square$

قضیه بالا یک روش برای محاسبه $f(\boldsymbol{x})$ ارائه می‌دهد. با توجه به این مشاهده، نتیجه زیر را می‌گیریم.

نتیجه: هر تبدیل خطی $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ را می‌توان بصورت یک ماتریس A با ابعاد $n \times m$ بیان کرد.

اثبات: فرض کنید $B = \{\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_n}\}$ یک پایه برای فضای برداری U باشد. در ستون iام ماتریس A بردار $f(\boldsymbol{u_i})$ را قرار می‌دهیم. اگر هر بردار $\boldsymbol{x}$ را با ضرایب ترکیب خطی حاصل از بردارهای پایه B بیان کنیم، $A\boldsymbol{x}$ برابر با $f(\boldsymbol{x})$ خواهد بود.

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ | & | & & | \\ f(\boldsymbol{u_1}) & f(\boldsymbol{u_1}) & \ldots & f(\boldsymbol{u_n}) \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \alpha_1 f(\boldsymbol{u_1}) + \ldots + \alpha_n f(\boldsymbol{u_n}) = f(\boldsymbol{x})$$

$\square$

چند مثال:

۱. ماتریس متناظر تبدیل زیر را بنویسید.

$$\frac{d}{dt} : P_4 \to P_3$$

از ساده‌ترین پایه برای فضای P_n استفاده می‌کنیم. چند جمله‌ای‌های زیر تشکیل یک پایه برای P_n را می‌دهند.

$$\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$$

پس یک پایه برای P_4 بصورت زیر است.

$$\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$$

حال باید $\frac{d}{dt}$ را روی هر بردار پایه اعمال کنیم و بردار حاصل را در ستون متناظر در ماتریس A قرار دهیم.
برای مثال داریم:

$$\frac{d}{dt}(t^3) = \frac{d}{dt}(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}0\\0\\3\\0\end{bmatrix} \cong 3t^2$$

ماتریس زیر برای تبدیل $\frac{d}{dt}$ بدست می‌آید.

$$A_{\frac{d}{dt}} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

مشاهده می‌کنید همانطور که انتظار می‌رفت فضای پوچ ماتریس A یک فضای تک بعدی است.

۲. ماتریس متناظر تبدیل زیر را بنویسید.

$$\int_0^t : P_3 \to P_4$$

همانند مثال قبل باید تبدیل را روی بردارهای پایه اعمال کنیم و در ستونهای متناظر در ماتریس A قرار دهیم.
برای مثال

$$\int_0^t t^2 = \int_0^t (\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\\frac{1}{3}\\0\end{bmatrix} \cong \frac{1}{3}t^3$$

ماتریس زیر برای تبدیل $\int_0^t$ بدست می‌آید.

$$A_{\int_0^t} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\0 & 0 & \frac{1}{3} & 0\\0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

همانطور که انتظارش را داشتیم، اگر دو تبدیل را پشت سر هم اعمال کنیم (یعنی اول انتگرال بگیریم و سپس مشتق را اعمال کنیم) همان چندجمله‌ای بدست می‌آید. برای همین ماتریس حاصلضرب دو ماتریس $A_{\frac{d}{dt}}$ و $A_{\int_0^t}$ ماتریس همانی I است.

$$\frac{d}{dt}\int_0^t : P_3 \to P_3$$

$$A_{\frac{d}{dt}} \times A_{\int_0^t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

۳. ماتریس متناظر با تبدیل دوران با زاویه θ در فضای $\mathbb{R}^2$ را پیدا کنید.

فرض کنید $R_\theta(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix})$ حاصل دوران بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ باشد. R_θ را روی بردارهای پایه $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ اعمال می‌کنیم. بدست می‌آید

$$R_\theta(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$R_\theta(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

پس ماتریس متناظر با تبدیل R_θ برابر است با

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$$