جبر خطی (برای دانشجویان رشته مهندسی صنایع) ــ ترم پاییز ــ سال ۹۸
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
تدریس توسط: حسین جوهری (دانشکده ریاضی)
کتاب مرجع: جبر خطی و کاربردهای آن (گیلبرت استرنگ)

خلاصه‌ی هفته های هفتم و هشتم

این هفته فصل جدیدی از درس شروع می‌شود که به خواص دترمینان می‌پردازد. ابتدا دترمینان را بدون ارائه تعریف مستقیم و تنها با استفاده از خواص آن معرفی می‌کنیم. سپس دو فرمول مستقیم برای محاسبه دترمینان ارائه می‌دهیم و در انتها به نقش دترمینان در محاسبه وارون ماتریس و توصیف هندسی آن می‌پردازیم.

۱ خواص دترمینان

دترمینان یک ماتریس مربعی A روی میدان $\mathbb{R}$ با نماد $det\ A$ یا بصورت $|A|$ نشان داده می‌شود یک عدد حقیقی است که تابعی از درایه‌های ماتریس است. قبل از اینکه تعریفی مستقیم برای $det\ A$ ارائه دهیم، دترمینان را با استفاده از چند خاصیت آن توصیف می‌کنیم. از خواص ذکر شده، خواص اول تا سوم مستقل هستند. بقیه خواص از سه خاصیت اول نتیجه می‌شوند.

۱. **دترمینان ماتریس همانی I برابر با یک است. به عبارت دیگر** $det\ I = 1$

مثال: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

۲. **اگر جای دو سطر ماتریس را عوض کنیم علامت دترمینان عوض می‌شود.** از این خاصیت نتیجه می‌شود که دترمینان ماتریسهای جایگشت یا 1 است یا -1 است. برای یادآوری ماتریس جایگشت ماتریسی است که از جابجایی سطرهای ماتریس همانی بدست می‌آید. پس برای ماتریس جایگشت P

$$det\ P \in \{-1, +1\}$$

مثال: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ ، $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1,$

۳. **دترمینان نسبت به سطر اول خطی است** (در واقع نسبت به هر سطر خطی است اما خواهیم دید که برقراری این خاصیت تنها برای سطر اول کافی است تا برای همه سطرها درست باشد). حال ببینیم خطی بودن نسبت به یک سطر به چه معنی است.

اول اینکه **اگر سطر اول در t ضرب شود، دترمینان هم در t ضرب می‌شود.**

$$\begin{vmatrix} ta & tb & tc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

یک نتیجه این خاصیت این است که برای ماتریس A با ابعاد $n \times n$ داریم $det\ 2A = 2^n (det\ A)$

دوم اینکه **اگر سطر اول A جمع دو بردار $u+v$ باشد، آنگاه دترمینان A را می‌توان بر حسب جمع دترمینان دو ماتریس A' و A'' نوشت بطوریکه سطر اول A' بردار u و سطر اول A'' بردار v است و سطرهای دیگر A' و A'' یکسان هستند.**

مثال:

$$\begin{vmatrix} 1+2 & 3+(-4) & 5+7 \\ 3 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

این خاصیت در واقع برای هر سطری برقرار است. (با استفاده از خاصیت دوم) کافی است جای سطر مورد نظر را با سطر اول عوض کنیم. این کار باعث می‌شود دترمینان در یک منفی ضرب شود. عمل بسط که انجام شد، جای سطرها دوباره عوض می‌شود که اثر منفی را خنثی می‌کند.

مثال:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1+2 & 3+(-4) & 5+7 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 1+2 & 3+(-4) & 5+7 \\ 3 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \times \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & -4 & 7 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

۴. **اگر A دو سطر یکسان داشته باشد آنگاه $det\ A = 0$.** این خاصیت به راحتی از خاصیت دوم نتیجه می‌شود. اگر جای دو سطر یکسان را عوض کنیم، ماتریس تغییری نمی‌کند اما علامت دترمینان عوض می‌شود. پس حتما باید دترمینان صفر باشد تا تناقض پیش نیاید.

۵. **اگر سطر iام را در l ضرب کنیم و آن را با سطر kام جمع کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.**

این خاصیت هم از سه خاصیت دوم و سوم نتیجه می‌شود. مثال زیر قابل تعمیم به همه ابعاد است.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c+la & d+lb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ la & lb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

۶. **اگر A یک سطر کاملا صفر داشته باشد آنگاه $det\ A = 0$.** این از خاصیت ۵ و خاصیت ۴ نتیجه می‌شود.

۷. **اگر A بالا مثلثی (یا پایین مثلثی) باشد دترمینان برابر با حاصلضرب درایه‌های قطر اصلی است.**

$$|U| = \begin{vmatrix} d_1 & \times & \times & \times & \times & \times \\ & d_2 & \times & \times & \times & \times \\ & & d_3 & \times & \times & \times \\ & & & \ddots & \times & \times \\ & \text{\Huge 0} & & & \ddots & \times \\ & & & & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 d_3 \dots d_n$$

برای اثبات این خاصیت از عملیات سطری استفاده می‌کنیم. با وجود خاصیت ۵ می‌دانیم که عملیات سطری دترمینان را تغییر نمی‌دهد. می‌توانیم با عملیات سطری ماتریس بالا مثلثی U را به ماتریس قطری تبدیل کنیم طوری که قطر اصلی بدون تغییر بماند. (دقت کنید موفقیت این پروسه بستگی به این دارد که d_i ها

همه غیرصفر باشند. اگر یکی از درایه‌های قطر اصلی صفر باشد، طی عملیات سطری یک سطر کاملا صفر ایجاد می‌شود که دترمینان را صفر می‌کند. دقیقا همان نتیجه‌ای که انتظارش را داشتیم! پس می‌توانیم فرض کنیم که درایه‌های قطر اصلی همه غیرصفرند.)

$$|U| = \begin{vmatrix} d_1 & \times & \times & \times & \times & \times \\ & d_2 & \times & \times & \times & \times \\ & & d_3 & \times & \times & \times \\ & & & \ddots & \times & \times \\ & \text{\Large 0} & & & \ddots & \times \\ & & & & & d_n \end{vmatrix} = \rightarrow \text{عملیات سطری} \rightarrow = \begin{vmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \text{\Large 0} \\ & & & \ddots & \\ & \text{\Large 0} & & & \ddots \\ & & & & & d_n \end{vmatrix}$$

حال با استفاده از خاصیت ۳ می‌توانیم درایه‌های قطر اصلی را فاکتور بگیریم.

$$\begin{vmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \text{\Large 0} \\ & & & \ddots & \\ & \text{\Large 0} & & & \ddots \\ & & & & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 d_3 \ldots d_n \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \text{\Large 0} \\ & & & \ddots & \\ & \text{\Large 0} & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} = d_1 d_2 d_3 \ldots d_n$$

۸. $\boldsymbol{det\ AB = (det\ A) \times (det\ B)}$ این خاصیت هم از خواص قبل نتیجه می‌شود. فعلا آن را بدون اثبات می‌پذیریم. یک نتیجه خوب این خاصیت این است که

$$det\ A^{-1} = \frac{det\ I}{det\ A} = \frac{1}{det\ A}$$

همچنین

$$det\ A^2 = (det\ A)^2$$

۹. **ماتریس A منفرد (تکین) است اگر و فقط اگر $|A| = 0$.**

ماتریس مربعی A منفرد است اگر دستگاه $Ax = b$ جواب نداشته باشد یا بیشمار جواب داشته باشد. این وقتی رخ می‌دهد که سطرهای ماتریس A مستقل خطی نباشند (به عبارت دیگر $rank(A) < n$.) چون سطرهای A مستقل خطی نیستند یکی از سطرها برابر با ترکیب خطی سطرهای دیگر است. در نتیجه با عملیات سطری می‌توان یک سطر کاملا صفر در ماتریس پیدا کرد. بنا به خاصیت ۶ دترمینان صفر خواهد بود.

حال اگر فرض کنید $det\ A = 0$. نشان می‌دهیم A منفرد است. فرض کنید A منفرد نباشد. بنا به آنچه در فصل اول یاد گرفتیم، در صورتی که A نامنفرد باشد، می‌توان با انجام عملیات سطری A را به حاصلضرب PLU تجزیه کرد بطوری که P یک ماتریس جایگشت، L یک ماتریس پایین مثلثی با درایه‌های قطر اصلی همه 1 و U یک ماتریس بالامثلثی است بطوری که درایه‌های قطر اصلی همه غیر صفرند. بنا به خاصیت ۹ و خاصیت ۷ داریم

$$|A| = |PLU| = |P||L||U| = \text{یک عدد غیر صفر}$$

پس A حتما باید منفرد باشد.

۱۰. $det\ A^T = det\ A$

اگر A منفرد باشد حتما A^T هم منفرد است (چرا؟) و در نتیجه هر دو دترمینان صفر خواهند بود (بنا به خاصیت ۹). پس می‌توانیم فرض کنیم که A و A^T نامنفردند. در نتیجه می‌توان نوشت.

$$|A^T| = |A|$$

$$|(PLU)^T| = |PLU|$$

بنا به خاصیت ترانهاده داریم

$$|U^T L^T P^T| = |PLU|$$

با استفاده از خاصیت ۸ داریم

$$|U^T||L^T||P^T| = |P||L||U|$$

روشن است که $|P^T| = |P|$. همچنین L یک ماتریس پایین مثلثی است که قطر اصلی اش همه 1 است. پس $|L| = 1$. به همین ترتیب L^T یک ماتریس بالامثلثی خواهد بود که قطر اصلی‌اش همه 1 است. پس $|L^T| = 1$ می‌ماند

$$|U^T| = |U|$$

این هم مشابه حالت L قطرهای اصلی طرفین برابر است (یکی بالا مثلی و یکی پایین مثلثی است). پس دو دترمینان برابرند.

۲ یک فرمول جبری برای دترمینان

در درس قبل دترمینان را بر استفاد از یک سری خاصیت توصیف کردیم. در واقع سه خاصیت اول برای تعریف دترمینان لازم و کافی بود.

۱. **دترمینان ماتریس همانی I برابر با یک است. به عبارت دیگر** $det\ I = 1$

۲. **اگر جای دو سطر ماتریس را عوض کنیم علامت دترمینان عوض می‌شود.**

۳. **دترمینان نسبت به سطر اول (در واقع هر سطر و ستون) خطی است.**

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

با استفاده از این سه خاصیت، یک فرمول جبری مستقیم برای $det\ A$ ارائه می‌دهیم که بیشتر از لحاظ تئوری حایز اهمیت است. بگذارید با ماتریس دو در دو شروع کنیم. می‌توانیم با استفاده از خاصیت سوم آن را بدین شکل بسط دهیم. ترمهایی که ستون صفر داشته باشند حذف می‌شوند.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix}$$

می‌توان همین ایده را به بعدهای بالاتر تعمیم داد. برای بعد 3، بعد از حذف ترمهایی که ستون صفر دارند بدست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ملاحظه می‌کنید ماتریسهایی که باقی می‌مانند در هر سطر و ستون تنها یک عنصر غیرصفر می‌توانند داشته باشند. گذشته از این، می‌توانیم با جابجایی سطرها ماتریس را قطری کنیم. بسته به تعداد جابجاییهای مورد نیاز، دترمینان ضرب در $+1$ یا -1 می‌شود. این در واقع علامت ماتریس جایگشت مربوطه است.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (+1)a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)a_{11}a_{23}a_{32} +$$

$$(-1)a_{12}a_{21}a_{33} + (+1)a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$(+1)a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)a_{13}a_{22}a_{31}$$

برای حالت $n \times n$ چون در مجموع $n!$ جایگشت می‌توانیم داشته باشیم بدست می‌آید.

$$det\ A = \sum_{n!} \text{sign}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \times (a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n})$$

اینجا $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ جایگشتی از $1, 2, \dots, n$ است. علامت جایگشت $+1$ است اگر تعداد جابجایی لازم برای تبدیل به جایگشت همانی عددی زوج باشد در غیر اینصورت علامت جایگشت -1 است.

مثال:

$$\text{sign}(1, 3, 2, 4, 5, 7, 6) = +1$$
$$\text{sign}(7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) = -1$$

مثال:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) + (+1) = 0$$

در مثال بالا همانطور که انتظارش را داشتیم دترمینان صفر شد چون سطرهای ماتریس مستقل خطی نیستند.

۱.۲ کهاد و همساز

در فرمول محاسبه دترمینان ماتریس 3×3 اگر از درایه‌های سطر اول یعنی a_{11} و a_{12} و a_{13} فاکتور بگیریم، بدست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

عبارت درون اولین پرانتز در واقع دترمینان ماتریس 2 در 2یی است که از حذف سطر و ستون اول حاصل می‌شود. به همین ترتیب عبارات درون دیگر پرانتزها برابر با دترمینان ماتریسی است که از حذف سطر و ستون مربوطه حاصل می‌شود. البته در مورد پرانتز دوم، علامت دترمینان معکوس شده است.

تعریف: کهاد درایه a_{ij} که با M_{ij} نشان داده می‌شود برابر با دترمینان ماتریسی است که از حذف سطر iام و ستون j ام ماتریس A حاصل می‌شود.

تعریف: همساز درایه a_{ij} برابر است با $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

با توجه به مشاهدات بالا داریم

$$det\ A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}$$

۳ محاسبه دترمینان

یادآور می‌شویم که فرمول جایگشت برای محاسبه دترمینان جنبه عملی ندارد (در حالت کلی نیاز به محاسبه $n!$ حاصلضرب دارد). برای محاسبه سریع دترمینان، ماتریس را با عملیات سطری به شکل بالامثلثی در می‌آوریم. حاصلضرب درایه‌های قطر اصلی برابر با دترمینان خواهد بود (البته علامت دترمینان بستگی به تعداد جابجایی سطرها دارد). اگر A نامنفرد باشد، ماتریس جایگشت P وجود دارد که

$$PA = LU$$

پس

$$A = P^{-1}LU$$

$$det(A) = det(P^{-1})det(L)det(U)$$

چون L پایین مثلثی است و درایه‌های قطر اصلی اش همه یک است $det(L) = 1$. پس

$$det(A) = det(P^{-1})det(U)$$

مثال:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} =?$$

ماتریس با یک جابجایی سطری به بالامثلثی تبدیل می‌شود. پس

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -(1 \times 3 \times 5 \times 7)$$

۴ رابطه دترمینان و ماتریس وارون

تعریف: ماتریس همساز A را با C نشان می‌دهیم. درایه ijام ماتریس C همان همساز درایه a_{ij} است.

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

قضیه: اگر A^{-1} وجود داشته باشد آنگاه

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} C^T$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

اثبات: طرفین را در A ضرب می‌کنیم. بدست می‌آید

$$AC^T = det(A) I$$

به عبارت دیگر

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} det(A) & & \\ & det(A) & & \Huge{0} \\ \Huge{0} & & \ddots & \\ & & & det(A) \end{bmatrix}$$

ضرب داخلی سطر اول A در ستون اول C^T در واقع همان دترمینان A است.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ \vdots \\ C_{1n} \end{bmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \dots + a_{1n}C_{1n} = det(A)$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که درایه‌های قطر اصلی ماتریس سمت چپ باید همه $det(A)$ باشند. بسیار خوب. چرا درایه‌های دیگر صفر هستند؟ درایه‌ی سطر اول و ستون دوم ماتریس سمت چپ را در نظر بگیرید. این درایه برابر است با ضرب داخلی سطر اول A در ستون دوم C^T.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \\ \vdots \\ C_{2n} \end{bmatrix} = a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + \dots + a_{1n}C_{2n}$$

این در واقع دترمینان ماتریسی است که از کپی کردن سطر اول A در سطر دوم بدست می‌آید.

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + \dots + a_{1n}C_{2n}$$

دقت کنید در بالا دترمینان را با استفاده از همسازهای سطر دوم محاسبه کرده‌ایم. می‌دانیم دترمینان ماتریسی که سطری تکراری دارد صفر است. دقیقا چیزی که دنبالش بودیم. □

۵ قاعده کرامر

در درس قبل نشان دادیم که $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}C^T$. از این رابطه یک فرمول برای حل دستگاه $Ax = b$ بدست می‌آید.

$$x = \frac{1}{det(A)}C^T b$$

اگر بخواهیم مولفه اول x یعنی x_1 را با این رابطه توصیف کنیم، سطر اول C^T در بردار b ضرب داخلی می‌شود و نهایتا حاصل تقسیم بر $det(A)$ می‌شود.

$$x_1 = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

سطر اول C^T همان ستون اول C است. ضرب داخلی بالا مثل این است که دترمینان ماتریس A را با استفاده از همساز درایه‌های ستون اول محاسبه کرده باشیم با این تفاوت که به جای ستون اول، بردار b را قرار داده باشیم. از این مشاهده قاعده کرامر بدست می‌آید.

$$x_1 = \frac{det(B_1)}{det(A)}$$

اینجا B_1 ماتریسی است که از قرار دادن بردار b در ستون اول ماتریس A بدست می‌آید.

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

بطور کلی برای مولفه x_i رابطه زیر برقرار است. ماتریس B_i از قرار دادن بردار b در ستون iام ماتریس A بدست می‌آید.

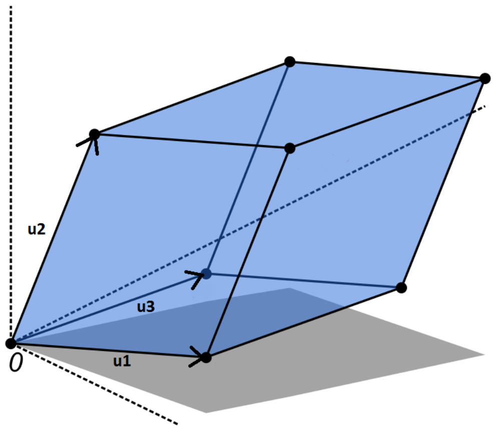
$$x_i = \frac{det(B_i)}{det(A)}$$

۶ تصویر هندسی دترمینان

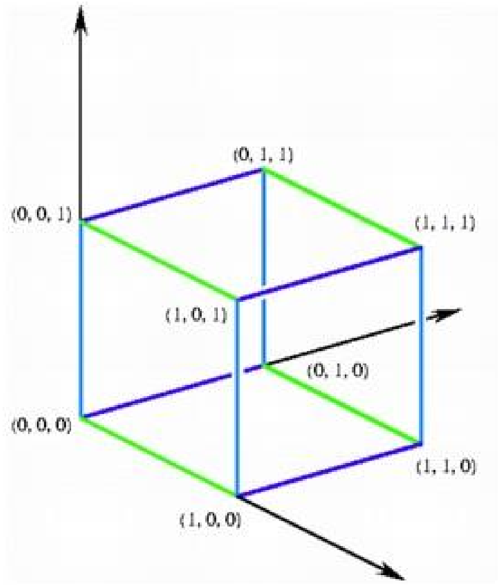
قضیه: قدر مطلق دترمینان ماتریس A برابر با حجم متوازی السطوح n بعدی است که توسط بردارهای مربوط به سطرهای A ایجاد می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} & u_1 & \\ & u_2 & \\ & u_3 & \end{bmatrix}$$

$|det(A)| =$ حجم متوازی السطوح ایجاد شده توسط سطرهای A



قضیه بالا را اثبات نمی‌کنیم اما چند شاهد در مورد آن می آوریم. ماتریس همانی 3×3 را در نظر بگیرید. روشن است مکعب ایجاد شده توسط سطرها حجمی برابر با 1 دارد.



$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

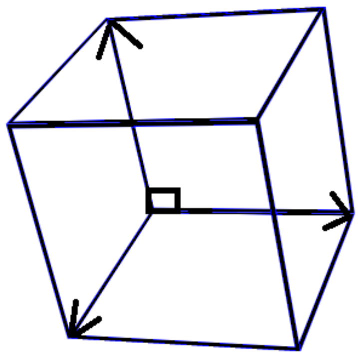
اگر مکعب را بچرخانیم، روشن است حجم آن تغییری نمی‌کند اما بردارهای سازنده آن تغییر می‌کنند. با این وجود می‌دانیم طول بردارهای سازنده کماکان 1 است و بر هم عمودند.

فرض کنید n بردار داریم که طول هر کدام 1 است و همه بر هم عمودند. این بردارها یک مکعب n بعدی با حجم 1 ایجاد می‌کنند. فرض کنید بردارها سطرهای ماتریس Q باشند. چون سطرهای Q بر هم عمودند و طول واحد دارند، داریم

$$QQ^T = I$$

با توجه به خاصیت دترمینان

$$det(Q)det(Q^T) = det(I) = 1$$



چون $det(Q) = det(Q^T)$ پس

$$det(Q)^2 = 1$$

در نتیجه

$$|det(Q)| = 1$$

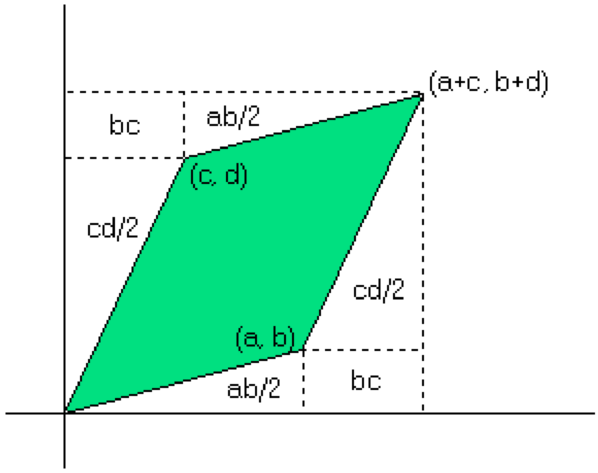
همین انتظار را هم داشتیم. دترمینان برابر با حجم مکعب ایجاد شده است.

جابجایی سطرها تنها علامت دترمینان را عوض می‌کند و در قدر مطلق تاثیری ندارد. از دید هندسی هم جابجایی دو ضلع متوازی السطوح تاثیر بر حجم آن ندارد.

اگر سطری را در t ضرب کنیم، دترمینان در t ضرب می‌شود. این معادل این است که ضلعی از متوازی السطوح را در t ضرب کنیم. روشن است حجم حاصل هم در t ضرب می‌شود.

اگر دترمینان صفر باشد، یکی از سطرها وابسته به سطرهای دیگر است. در حالت سه بعدی، یکی از بردارها در صفحه‌ی ایجاد شده توسط دو بردار دیگر واقع شده است. پس بردارها توانایی ایجاد یک فضای سه بعدی را ندارد و قاعدتا حجم حاصل باید صفر باشد.

در حالت دو بعدی، دترمینان به جای حجم مساحت یک محدوده است. شکل زیر رابطه دترمینان و مساحت تولید شده توسط دو بردار سطری را نشان می‌دهد.



$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$