جبر خطی (برای دانشجویان رشته مهندسی صنایع) ــ پاییز ۹۸
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
تدریس توسط: حسین جوهری (دانشکده ریاضی)
کتاب مرجع: جبر خطی و کاربردهای آن (گیلبرت استرنگ)

خلاصه‌ی هفته نهم و دهم

۱ مقادیر ویژه، بردارهای ویژه

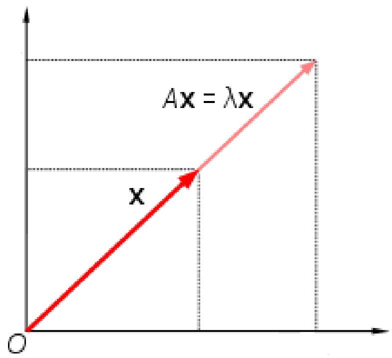
در دروس قبلی دیدیم که با دانستن یک پایه برای فضای برداری $\mathbb{R}^n$ می‌توانیم ماتریس متناظر با هر تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را بدست آوریم. در ادامه خواهیم دید که برای تبدیل $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ بعضی پایه‌های $\mathbb{R}^n$ نسبت به دیگران ارجحیت دارند. این پایه‌ها در واقع بر اساس بردارهای ویژه A ساخته شده‌اند.

تعریف: بردار غیر صفر $\boldsymbol{x}$ یک بردار ویژه برای ماتریس مربعی A است اگر ثابت λ وجود داشته باشد بطوریکه

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

در این حالت گفته می‌شود λ یک مقدار ویژه برای ماتریس A است و بردار $\boldsymbol{x}$ یک بردار ویژه وابسته به مقدار ویژه λ است.

از لحاظ هندسی، بردار $\boldsymbol{x}$ یک بردار ویژه برای A است اگر تبدیل A راستای بردار $\boldsymbol{x}$ را عوض نکند. چون $\lambda\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{x}$ در یک راستا هستند. دقت کنید بردار مورد نظر ما باید مخالف صفر باشد، چون بدیهی است بردار صفر در معادله بالا صدق می‌کند. از این گذشته می‌خواهیم بردارهای ویژه ما یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ تشکیل دهند. پس بردار صفر را قبول نمی‌کنیم.



چند مثال:

- بنا به تعریف، فضای پوچ A (غیر از بردار صفر آن) همگی بردارهای ویژه برای ماتریس A با مقدار ویژه $\lambda = 0$ هستند.

$$A\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = 0$$

- برای ماتریس همانی I هر بردار (غیر از بردار صفر) یک بردار ویژه است. تنها مقدار ویژه ماتریس همانی 1 است.

$$I\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x}$$

- برای ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ دو مقدار ویژه وجود دارد: $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در واقع هر بردار بصورت $c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه وابسته به مقدار ویژه $\lambda_1 = 1$ است.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

همچنین هر بردار بصورت $c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه وابسته به مقدار ویژه $\lambda_2 = -1$ است.

- برای ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ نیز دو مقدار ویژه وجود دارد: $\lambda_1 = 4$ و $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (4) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (2) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

دقت کنید بردارهای ویژه $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ یکی هستند اما مقادیر ویژه متفاوتند (با هم اختلاف 3 دارند که همان درایه قطر اصلی است). این امری تصادفی نیست.

نکته: اگر $\boldsymbol{x}$ و λ یک جفت بردار ویژه و مقدار ویژه متناظر با ماتریس A باشند آنگاه $\boldsymbol{x}$ و $\lambda + k$ نیز یک جفت بردار ویژه و مقدار ویژه متناظر با ماتریس $A + kI$ هستند.

$$(A + kI)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + kI\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + k\boldsymbol{x} = (\lambda + k)\boldsymbol{x}$$

۱.۱ محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

از آنجا که معادله $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ یک معادله غیرخطی است، نمی‌توان با روشهای معمول مجهولهای آن را پیدا کنیم. باید از طریقی λ و $\boldsymbol{x}$ را هم جدا کنیم. معادله را به شکل زیر می‌نویسیم.

$$A\boldsymbol{x} = \lambda I\boldsymbol{x}$$

در اینجا I ماتریس همانی n در n است. $\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x}$. حال معادله را می‌توانیم به این شکل بنویسیم.

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

برای اینکه این معادله جواب غیر صفر داشته باشد، باید ماتریس $A - \lambda I$ فضای پوچش غیربدیهی باشد. به بیان دیگر باید ماتریس $A - \lambda I$ وارون پذیر نباشد. پس باید

$$\det\,(A - \lambda I) = 0$$

این معادله تنها یک مجهول دارد. باید λ هایی را پیدا کنیم که باعث شوند ماتریس $A - \lambda I$ منفرد شود (به بیان دیگر دترمینانش صفر شود). ریشه‌های این معادله مقادیر ویژه ماتریس A خواهند بود. این معادله را **معادله سرشت نمای** ماتریس A می‌گویند. با پیدا کردن مقادیر ویژه، حال می‌توانیم معادله $A\boldsymbol{x} = \lambda I\boldsymbol{x}$ را حل کنیم و همه بردارهای ویژه را پیدا کنیم. این روش کلی محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه است.

چند مثال:

- مقادیر ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ را دوباره محاسبه می‌کنیم. این بار با روش استاندارد. معادله سرشت نما را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0$$

ریشه‌های معادله را پیدا می‌کنیم.

$$\lambda_1 = 4, \qquad \lambda_2 = 2$$

برای محاسبه بردارهای ویژه، باید فضای پوچ ماتریسهای $A - \lambda_1 I$ و $A - \lambda_2 I$ را محاسبه کنیم.

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \qquad \begin{bmatrix} 3-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

هر برداری در فضای پوچ این ماتریسها، یک بردار ویژه است. می‌توانیم همان جوابهای مخصوص را به عنوان بردارهای ویژه انتخاب کنیم. در مثال ما بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای ویژه زیر یکی از جوابهای معادلات بالا هستند. (که اتفاقا مستقل خطی هم هستند.)

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- مقادیر ویژه ماتریس زیر را بدست می‌آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

معادله سرشت نما را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

این معادله جواب حقیقی ندارد. آیا این بدین معنی است که ماتریس A مقادیر ویژه ندارد؟ هم بله و هم نه. درستش این است که A مقادیر ویژه حقیقی ندارد اما در فضایی جامعتر یعنی $\mathbb{C}^2$، صفحه اعداد مختلط، این ماتریس مقادیر ویژه و بردارهای ویژه دارد. باید هم همینطور باشد. معادله سرشت نما ریشه‌های مختلط دارد (i و $-i$). از طرف دیگر A در فضای $\mathbb{R}^2$ ماتریس دوران با زاویه 90 درجه است. طبیعی است هیچ بردار حقیقی $\boldsymbol{x}$ نمی‌تواند وجود داشته باشد که $A\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{x}$ در یک راستا باشند. در فضای $\mathbb{C}^2$، بردارهای ویژه زیر برای A بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = (i) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = (-i) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

- مقادیر ویژه ماتریس زیر را بدست می‌آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

معادله سرشت نما را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 = 0$$

ریشه‌های تکراری $\lambda_1 = 3$ و $\lambda_2 = 3$ بدست آمد. مقادیر ویژه یک ماتریس لزوما متمایز نیستند. می‌توانند تکراری باشند! این اشکالی ندارد، اما خبر بد این است که ممکن است نتوانیم دو بردار ویژه مستقل پیدا کنیم. در این مثال همین اتفاق هم می‌افتد. فضای پوچ ماتریس $A - \lambda I$ را محاسبه میکنیم.

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} 3-3 & 1 \\ 0 & 3-3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

فقط یک جواب مخصوص بدست می‌آید.

$$v_1 = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بعضی از ماتریسها n بردار ویژه مستقل خطی (چه حقیقی و چه مختلط) ندارند و این یکی از این موارد است.

- چه مقادیری به جای m بگذاریم تا اینکه ماتریس زیر راستای همه بردارهای $\mathbb{R}^2$ را تغییر دهد؟

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ m & 3 \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر A نباید بردار ویژه حقیقی داشته باشد. به عبارت دیگر، معادله سرشت نمای A نباید ریشه حقیقی داشته باشد.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ m & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2m - 3 = 0$$

باید دلتا منفی باشد.

$$\Delta = 4 - 4(2m-3) < 0$$

پس

$$m > 2$$

- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

معادله سرشت نما را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & -3 \\ -9 & -2-\lambda & 3 \\ 18 & 0 & -8-\lambda \end{vmatrix} &= (-2-\lambda)(-1)^4 \begin{vmatrix} 7-\lambda & -3 \\ 18 & -8-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda+2)(\lambda^2+\lambda-2) \\ &= (\lambda+2)^2(\lambda-1) = 0 \end{aligned}$$

ریشه‌های زیر بدست می‌آید.

$$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = -2 \qquad \lambda_3 = 1$$

بردارهای ویژه وابسته دو ریشه اول را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 7-(-2) & 0 & -3 \\ -9 & -2-(-2) & 3 \\ 18 & 0 & -8-(-2) \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -3 \\ -9 & 0 & 3 \\ 18 & 0 & -6 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

جوابهای مخصوص را پیدا می‌کنیم. فضای پوچ را با استفاده از آنها بیان می‌کنیم.

$$N(A-\lambda_1 I) = c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

دو بردار ویژه بدست آمد. دقت کنید با وجود اینکه ریشه‌ها تکراری بودند، اما دو بردار ویژه مستقل خطی بدست آمد. حال بردار ویژه وابسته به ریشه سوم را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 7-(1) & 0 & -3 \\ -9 & -2-(1) & 3 \\ 18 & 0 & -8-(1) \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -9 & -3 & 3 \\ 18 & 0 & -9 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

جوابهای مخصوص را پیدا می‌کنیم.

$$N(A-\lambda_3 I) = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

جفت مقدار ویژه و بردارهای ویژه زیر بدست آمد.

$$\lambda_1 = -2, \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = -2, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_3 = 1, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۲ چند نکته و قضیه

- هر ماتریس مربعی A با ابعاد $n \times n$، دارای n مقدار ویژه $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ است که لزوما متمایز و حقیقی نیستند. دلیل این مسئله این است که معادله سرشت نما $|A - \lambda I| = 0$ یک معادله با درجه n است و طبق قضیه اساسی جبر، هر معادله با درجه n، به تعداد n ریشه دارد (حقیقی یا مختلط).

- بعضی از ماتریسها با وجود داشتن n مقدار ویژه، به تعداد n بردار ویژه مستقل خطی ندارند.

- مجموع مقادیر ویژه یک ماتریس، برابر با مجموع درایه‌های قطر اصلی آن است. مجموع درایه‌های قطر اصلی یک ماتریس اثر آن ماتریس trace گفته می‌شود و با $\mathrm{tr}(A)$ نشان داده می‌شود.

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$$

- حاصلضرب مقادیر ویژه برابر با دترمینان ماتریس است.

$$\det A = \lambda_1 \times \ldots \times \lambda_n$$

۳ قطری سازی Diagonalization

در این جلسه **قطری سازی** یکی از کاربردهای مقادیر ویژه، را معرفی می‌کنیم و یک مسئله کاربردی را با استفاده از قطری سازی حل می‌کنیم. ابتدا دو قضیه زیر را یادآور می‌شویم.

قضیه: هر ماتریس مربعی با ابعاد $n \times n$ که روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ تعریف شده باشد، اگر n مقدار ویژه متمایز داشته باشد، آنگاه n بردار ویژه مستقل خطی دارد.
قضیه: ماتریس متقارن A با ابعاد $n \times n$ که درایه‌های آن اعداد حقیقی باشند، n مقدار ویژه حقیقی و n بردار ویژه مستقل خطی در فضای $\mathbb{R}^n$ دارد.

لازم به ذکر است در صورت وقوع تکرار در مقادیر ویژه، ماتریس مورد بحث ممکن است n بردار ویژه مستقل خطی نداشته باشد.

فرض کنید ماتریس A، n بردار ویژه مستقل خطی $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ وابسته به مقادیر ویژه $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ داشته باشد.

$$\forall i \qquad A\boldsymbol{v_i} = \lambda_i \boldsymbol{v_i}$$

بردارهای ویژه را بصورت ستونی در ماتریس S می‌گذاریم. ماتریس S را ماتریس بردارهای ویژه A می‌گوییم.

$$S = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ | & | & & | \\ \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \ldots & \boldsymbol{v_n} \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

حال A را از سمت راست در S ضرب می‌کنیم. بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} AS = A \times \begin{bmatrix} | & | & & | \\ | & | & & | \\ \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \ldots & \boldsymbol{v_n} \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ | & | & & | \\ A\boldsymbol{v_1} & A\boldsymbol{v_2} & \ldots & A\boldsymbol{v_n} \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ | & | & & | \\ \lambda_1\boldsymbol{v_1} & \lambda_2\boldsymbol{v_2} & \ldots & \lambda_n\boldsymbol{v_n} \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ | & | & & | \\ \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \ldots & \boldsymbol{v_n} \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= S\Lambda \end{aligned}$$

ماتریس $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ را ماتریس مقادیر ویژه می‌گوییم. پس رابطه زیر بدست می‌آید.

$$AS = S\Lambda$$

چون ستونهای S مستقل خطی هستند، پس وارون S وجود دارد. حال اگر طرفین را از سمت چپ در S^{-1} ضرب کنیم، داریم

$$ASS^{-1} = S\Lambda S^{-1}$$

رابطه زیر یک تجزیه از ماتریس A بدست می‌دهد و به آن قطری سازی ماتریس A می‌گوییم.

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

ذکر دو نکته ضروری است:

- هر ماتریس مربعی به شیوه بالا قطری شدنی نیست. ماتریس A باید n بردار ویژه مستقل خطی داشته باشد تا قطری شدنی باشد.
- چون یک ماتریس می‌تواند مجموعه بردارهای ویژه مستقل خطی متفاوتی داشته باشد، ماتریس S منحصربفرد نیست. ماتریس مقادیر ویژه Λ نیز بستگی به این دارد که بردارهای ویژه را با چه ترتیبی در ستونهای S قرار داده باشیم. پس Λ هم منحصر بفرد نیست.

۱.۳ محاسبه A^k

یکی از کاربردهای اصلی قطری سازی در پیداکردن سریع توانهای یک ماتریس است. با توجه به رابطه $A = S\Lambda S^{-1}$ توان دوم A را بدست می‌آوریم.

$$A^2 = S\Lambda \underbrace{S^{-1}S}_{I} \Lambda S^{-1} = S\Lambda\Lambda S^{-1} = S\Lambda^2 S^{-1}$$

از این می‌توانیم نتیجه بگیریم که مقادیر ویژه ماتریس A^2 همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند که به توان 2 رسیده‌اند چون برای ماتریسهای قطری داریم

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2 \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر،

$$A^2 = S \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2 \end{bmatrix} S^{-1}$$

این مطلب را می‌توان جور دیگر هم اثبات کرد. فرض کنید λ و $\boldsymbol{v}$ یک جفت مقدار ویژه و بردار ویژه برای ماتریس A باشند.

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

آنگاه

$$A^2\boldsymbol{v} = A\lambda\boldsymbol{v} = \lambda A\boldsymbol{v} = \lambda\lambda\boldsymbol{v} = \lambda^2\boldsymbol{v}$$

به همین ترتیب برای توانهای بالاتر بدست می‌آید.

$$A^k = S\Lambda^k S^{-1} = S \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} S^{-1}$$

از رابطه بالا نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه: اگر A قطری شدنی باشد و برای هر i داشته باشیم $|\lambda_i| < 1$ آنگاه

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \mathbf{0}$$

۴ حل چند مسئله در مورد مقادیر ویژه و کاربردهای آن

۱. مقادیر ویژه ماتریس زیر را بدست آورید.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حل: P یک ماتریس جایگشت است. ماتریس جایگشت همیشه یک مقدار ویژه‌اش برابر با 1 است چون بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ را به خودش می‌برد.

$$P \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پس قرار میدهیم $\lambda_1 = 1$. حال باید λ_2 و λ_3 را پیدا کنیم. از دو رابطه زیر استفاده می‌کنیم. در اینجا $\mathrm{tr}(P)$ مجموع درایه‌های قطری اصلی است.

$$\mathrm{tr}(P) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \qquad \det(P) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = -1$$

بدست می‌آید

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 \times \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

یک جواب بصورت زیر است.

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = -1$$

۲. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ را قطری کنید.

حل: ابتدا مقادیر ویژه را پیدا می‌کنیم. معادله سرشت نما را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$$

بدست می‌آید

$$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = 5$$

بردارهای ویژه متناظر را پیدا می‌کنیم. برای λ_1 داریم

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$$

یک جواب برای $\boldsymbol{v}_1$ بصورت زیر است.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای λ_2 داریم

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$$

یک جواب برای $\boldsymbol{v}_2$ بصورت زیر است.

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس A بصورت زیر قطری می‌شود.

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

۱.۴ سری فیبوناچی

لئوناردو فیبوناچی، ریاضیدان ایتالیایی قرن سیزدهم میلادی، سری عددی زیر را در حین مطالعات روی نرخ زاد و ولد و افزایش نسل خرگوشها بدست آورد. دو عدد اول سری به ترتیب 0 و 1 هستند. هر عدد بعدی، حاصلجمع دو عدد قبل از خود است.

$$0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

فرض کنید عدد kام این سری را با F_k نمایش دهیم. آیا می‌توانیم رابطه مستقیمی را برای F_k ارائه دهیم؟ مقادیر ویژه و قطری سازی یک روش را برای این مسئله پیشنهاد می‌دهد. فرض کنید بردار $\boldsymbol{u}_k$ بصورت زیر تعریف شده باشد.

$$\boldsymbol{u}_k = \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix}$$

به جای A چه ماتریسی قرار دهیم تا رابطه زیر برقرار باشد.

$$\boldsymbol{u}_{k+1} = A\boldsymbol{u}_k$$

با توجه به رابطه $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$، بدست می‌آید

$$\boldsymbol{u}_{k+1} = \begin{bmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_k$$

برای بدست آوردن $A^k\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}_k$ باید مقادیر ویژه و بردارهای ویژه $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ را پیدا کنیم. معادله سرشت نما را تشکیل می‌دهیم.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2-\lambda-1=0$$

بدست می‌آید

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

حال باید بردارهای ویژه متناظر را بدست آوریم.

$$(A-\lambda_1 I)\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1-\lambda_1 & 1\\ 1 & -\lambda_1\end{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix}1-\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1\\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$$

یک جواب این دستگاه بصورت زیر است.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ 1\end{bmatrix}$$

به همین ترتیب برای λ_2 داریم

$$(A-\lambda_2 I)\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}1-\lambda_2 & 1\\ 1 & -\lambda_2\end{bmatrix}\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix}1-\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1\\ 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$$

یک جواب این دستگاه بصورت زیر است.

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ 1\end{bmatrix}$$

حال باید $\boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ را بصورت ترکیبی خطی از $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ بنویسیم. بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_0 = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 &= \alpha_1\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ 1\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ 1\end{bmatrix}\\ &= (\frac{1}{\sqrt{5}})\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ 1\end{bmatrix} + (-\frac{1}{\sqrt{5}})\begin{bmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

پس

$$A^k\boldsymbol{u}_0 = (\frac{1}{\sqrt{5}})\lambda_1^k \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + (-\frac{1}{\sqrt{5}})\lambda_2^k \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

در نهایت

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{u}_k = A^k\boldsymbol{u}_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

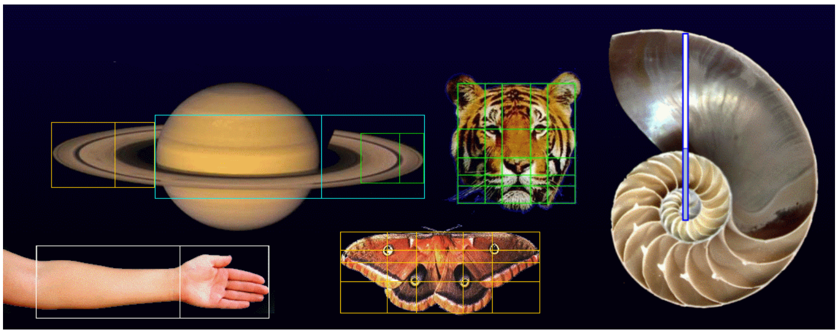
از این نتیجه می‌شود

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k\Big)$$

$\varphi = \lim_{k\to\infty}\frac{F_{k+1}}{F_k} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803...$ را نسبت طلایی گویند که در بسیاری از روابط ریاضی و همچنین نسبتهای طبیعی یافت می‌شود. جالب این است که $\varphi + 1$ و φ نسبت طلایی با هم دارند.

$$\varphi = \frac{\varphi+1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$



۳. هر سال 0.1 جمعیت حومه شهر X به داخل شهر کوچ می‌کنند و 0.2 مردم شهر X به حومه آن کوچ می‌کنند. اگر در آغاز، جمعیت حومه شهر X برابر با y_0 و جمعیت خود شهر برابر با z_0 باشد، در سال kام جمعیت شهر و حومه شهر به چه صورت خواهد بود؟

حل: اگر y_1 و z_1 جمعیت حومه شهر و خود شهر در سال بعدی باشند، رابطه زیر برقرار است.

$$\begin{cases} y_1 = 0.9y_0 + 0.2z_0 \\ z_1 = 0.1y_0 + 0.2z_0 \end{cases}$$

این را می‌توان با یک ماتریس بیان کرد.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

هدف مسئله پیدا کردن بردار زیر است.

$$\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$ را پیدا می‌کنیم. معادله سرشت نما بصورت زیر است.

$$\begin{vmatrix} 0.9-\lambda & 0.2 \\ 0.1 & 0.8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7 = 0$$

بدست می‌آید

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 0.7$$

بردارهای ویژه زیر متناظر با λ_1 و λ_2 بدست می‌آید.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

بردار $\begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ بصورت ترکیب خطی این دو بردار می‌نویسیم.

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = (y_0 + z_0) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + (y_0 - 2z_0) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

با ضرب طرفین در A^k بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} &= (y_0 + z_0)(\lambda_1)^k \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + (y_0 - 2z_0)(\lambda_2)^k \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= (y_0 + z_0)(1)^k \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \underbrace{(y_0 - 2z_0)(0.7)^k \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{\text{میل می‌کند به صفر زمانی که } k\to\infty} \end{aligned}$$

پس در نهایت وقتی $k \to \infty$ بدست می‌آید

$$\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = (y_0 + z_0) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(y_0 + z_0) \\ \frac{1}{3}(y_0 + z_0) \end{bmatrix}$$

۵ رابطه مقادیر ویژه و تئوری گراف

در ادامه نمونه‌ای از کاربرد مقادیر ویژه در تحلیل ساختارهای ترکیبیاتی همچون گرافها می‌پردازیم.

۱.۵ مقدمه‌ای کوتاه بر گراف

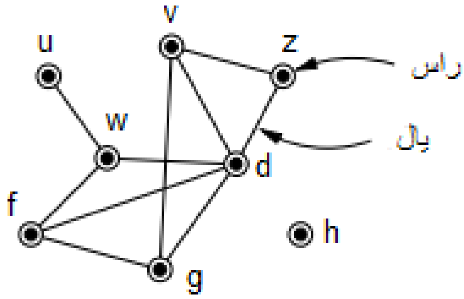
گراف شامل مجموعه‌ای غیر خالی از اشیاء است که به آنهای رأسهای گراف گفته می‌شود. معمولا مجموعه رئوس را با حرف V نشان می‌دهند. همچنین گراف شامل مجموعه‌ای از ارتباطات میان رئوس است که به هر ارتباط یک یال گفته می‌شود. یال‌ها در واقع رأس‌ها را به هم وصل می‌کنند. مجموعه یالها را معمولا با حرف E نمایش

می‌دهند. با این توصیف گراف G بصورت یک زوج (V,E) تعریف می‌شود که V مجموعه رئوس و E مجموعه یالهای گراف G است.

دو رأس $a \in V$ و $b \in V$ که به هم متصل باشند یال $\{a,b\} \in E$ را تعریف می‌کنند. شکل زیر یک گراف با مجموعه رئوس $V = \{u,w,f,v,z,d,h,g\}$ و مجموعه یالهای

$$E = \{\{u,w\},\{f,w\},\{w,d\},\{g,d\},\{z,v\},\{d,f\},\{v,d\},\{g,v\}\}$$

را نمایش می‌دهد.



چند تعریف:

۱. درجه راس: به تعداد رئوسی که به راس u متصل هستند، درجه راس u گفته می‌شود. در اینجا درجه راس u را با d_u نمایش می‌دهیم. درجه راس در واقع تعداد همسایه‌های یک راس در گراف است.

۲. مسیر: مسیر دنباله‌ای از راسهاست که بین هر دو راس متوالی در دنباله یالی وجود داشته باشد. برای مثال دنباله u,w,d,g یک مسیر در گراف شکل بالا است. همچنین v,d,w,f,w,u مسیری دیگر در این گراف است.

۳. گراف همبند: اگر بین هر دو راس گراف مسیری وجود داشته باشد، آنگاه گراف را همبند گویند. گراف شکل بالا همبند نیست چون راس h بصورت ایزوله است و مسیری به آن وجود ندارد.

۴. مولفه همبند: مجموعه‌ای حداکثری از رئوس گراف که همبند باشند (بین هر دو راس مسیری باشد) را یک مولفه همبند گراف گویند. گراف بالا دو مولفه همبند دارد:

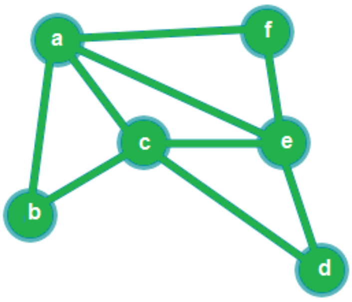
$$\{u,w,f,v,z,d,g\} \qquad \{h\}$$

۲.۵ ماتریس لاپلاسین یک گراف

فرض کنید گراف G با n راس داده شده است. مجموعه اتصالات گراف G را می‌توان با یک ماتریس n در n نمایش داد. اگر اسم این ماتریس را A بگذاریم، متناظر با هر راس گراف G یک سطر در ماتریس A وجود دارد. درایه $A_{i,j}$ ماتریس را 1 قرار می‌دهیم اگر یالی بین راس i و راس j وجود داشته باشد در غیر این صورت مقدار $A_{i,j}$ صفر خواهد بود. ماتریس A را ماتریس مجاورتی گراف G گویند.

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

شکل زیر یک نمونه از ماتریس مجاورتی یک گراف را نشان می‌دهد.



$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ماتریس قطری D را تعریف می‌کنیم بدین ترتیب که برای هر i درایه $D_{i,i}$ برابر با درجه راس i در گراف G باشد. بقیه درایه‌های غیر قطر اصلی صفر هستند. حال ماتریس لاپلاسین گراف G را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$L = D - A$$

L را ماتریس لاپلاسین گراف G می‌گوییم.
برای مثال بالا داریم:

$$L = D - A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

۳.۵ مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین

ماتریس لاپلاسین خواص جالبی دارد که در ادامه چند تا از آنها را ذکر می‌کنیم.

۱. ماتریس L یک ماتریس متقارن است. به عبارت دیگر $L^T = L$. در واقع A و D متقارنند و در نتیجه L هم متقارن خواهد بود.

۲. جمع هر سطر L برابر با صفر است.

۳. ماتریس L یک ماتریس مثبت شبه معین (positive semi-definite) است. ماتریس مربع A را یک ماتریس مثبت شبه معین گویند اگر برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم

$$x^T A x \geq 0$$

ماتریس مربع A را مثبت معین گویند اگر و فقط اگر برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم

$$x^T A x > 0$$

اینکه چرا L مثبت شبه معین است را می‌توان براحتی با بسط دادن $x^T L x$ و استفاده از خواص L نشان داد.

۴. همه مقادیر ویژه ماتریس L مثبت و حقیقی هستند. در واقع چون ماتریس L یک ماتریس متقارن و مثبت شبه معین است همه مقادیر ویژه‌اش مثبت و حقیقی خواهند بود. فرض کنید λ یک مقدار ویژه ماتریس L باشد و $v \in \mathbb{R}^n$ یک بردار ویژه متناظر با آن باشد. چون L مثبت شبه معین است پس

$$0 \leq v^T L v$$

از طرفی دیگر

$$0 \leq v^T L v = v^T \lambda v = \lambda v^T v \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq \lambda$$

چون v غیر صفر است و $v^T v$ همیشه مثبت است پس λ باید مثبت باشد.

۵. فرض کنید $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ به ترتیب (از کوچک به بزرگ) مقادیر ویژه L باشند (دقت کنید ممکن است بعضی از آنها تکراری باشند). آنگاه همیشه $\lambda_1 = 0$. به عبارت دیگر کوچکترین مقدار ویژه همیشه صفر است. دلیل این مطلب این است که جمع هر سطر L برابر با صفر است. در نتیجه بردار ستونی تماما 1 یک بردار ویژه ماتریس L است. ملاحظه بفرمایید

$$L \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = (0) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 0, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

۶. اگر گراف G به تعداد k مولفه همبند داشته باشد آنگاه

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_k = 0$$

به عبارت دیگر k مقدار ویژه اول L صفر خواهند بود. برای درک این مطلب فرض کنید در ماتریس L راسها را طوری مرتب کرده‌ایم که آنهایی که جزو یک مولفه هستند در سطوری کنار هم قرار گرفته باشند. در این حالت ماتریس L بصورت بلوکی قطری خواهد بود. مانند شکل صفحه بعد.

$$L = \begin{pmatrix} \boxed{L_1} & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \boxed{L_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{L_k} \end{pmatrix}$$

تعداد بلوکها به اندازه تعداد مولفه‌های همبند خواهد بود. متناظر با هر بلوک می‌توان برداری متشکل از 1ها و 0ها ساخت بطوری که درایه‌های متناظر با سطرهای بلوک برابر با 1 و دیگر درایه‌ها 0 باشند. به شکل زیر دقت کنید.

$$\begin{pmatrix} \boxed{L_1} & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \boxed{L_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{L_k} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

پس متناظر با هر بلوک (هر مولفه همبند) یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه 0 پیدا کردیم. در نتیجه مقدار ویژه 0 باید k بار تکرار شده باشد. نتیجه اینکه

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_k = 0$$

۷. اگر گراف تنها یک مولفه همبند داشته باشد آنگاه

$$\lambda_2 > 0$$