۷.۲ برخی از کاربردهای انتگرال‌گیری

۱.۷.۲ مساحت ناحیه بین دو نمودار

در بخش ۵.۶.۲، مساحت مجموعه عرضی یک تابع نامنفی را به صورت انتگرال بیان کردیم. در این بخش نشان خواهیم داد که مساحت‌های نواحی کلیتر را نیز می‌توان به شکل انتگرال بیان نمود.

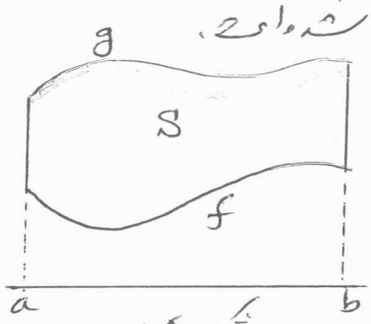
دو تابع f و g تعریف شده بر فاصله $[a,b]$ و کراندار را در نظر بگیرید. فرض کنید

$$f(x) \le g(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

مجموعه S شامل کلیه نقاط (x,y) برقرار در شرط

$$a \le x \le b, \qquad f(x) \le y \le g(x) \qquad (۱۶۱)$$

را ناحیه بین نمودارهای f و g گوییم. در شکل (۵۵) ناحیه بین دو نمودار f و g بر فاصله $[a,b]$ نشان داده شده است.



شکل ۵۵

قضیه ۱۰۱. فرض کنید f و g بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر بوده و $f \le g$ بر $[a,b]$ باشد. در این صورت ناحیه S بین نمودارهای آنها اندازه‌پذیر است و مساحت آن یعنی $A(S)$ با انتگرال

$$A(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx \qquad (۱۶۲)$$

به دست می‌آید.

اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم f و g مانند شکل (۵۵) نامنفی‌اند. مجموعه‌های

$$F = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y < f(x)\},$$

$$G = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y < g(x)\},$$

یعنی مجموعه‌های عرضی f و g را در نظر بگیرید. ناحیه S بین نمودارهای f و g به صورت تفاضل $S = G - F$ خواهد بود. از قضایای (۸۳) و (۸۴) نتیجه می‌شود که هر دوی F و G اندازه‌پذیرند. چون $F \subset G$ پس $S = G - F$ نیز اندازه‌پذیر است و داریم

$$A(S) = A(G) - A(F)$$
$$= \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$
$$= \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx.$$

حال حالتی را در نظر بگیرید که $f \le g$ بر $[a,b]$ است ولی f و g لزوماً منفی نیستند، مشابه شکل (۵۶). این حالت را می‌توانیم به وضعیت قبلی تحویل کنیم. به این صورت که ناحیه را آنقدر به طرف بالا می‌لغزانیم تا در بالای محور x قرار گیرد. یعنی عدد مثبتی مانند c را آنقدر بزرگ اختیار می‌کنیم تا مطمئن شویم که به ازای هر x در $[a,b]$

$$0 \le f(x) + c \le g(x) + c$$

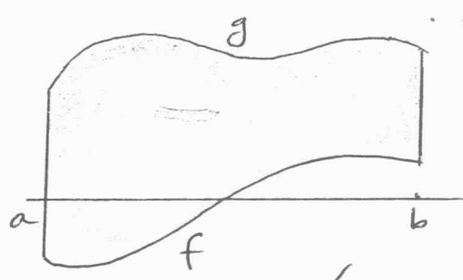
بنابر آنچه در بالا ثابت کردیم، ناحیه جدید T بین نمودارهای $f+c$ و $g+c$ اندازه‌پذیر است و مساحت آن با انتگرال زیر داده می‌شود

$$A(T) = \int_a^b [(g(x)+c) - (f(x)+c)]\,dx$$
$$= \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$$

اما T با S همنهشت است، پس S نیز اندازه‌پذیر بوده و داریم

$$A(S) = A(T) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$$

این اثبات را کامل می‌کند.

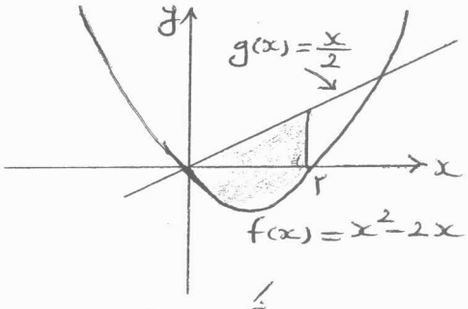


شکل (۵۶)

مثال ۶۹. مساحت ناحیه S بین نمودارهای f و g روی فاصله [0,2] را حساب کنید که در آن $f(x)=x(x-2)$ و $g(x)=\frac{x}{2}$.

حل. دو نمودار در شکل (۵۷) نشان داده شده‌اند، چون $f\le g$ روی فاصله [0,2]، پس از قضیه (۱۰۱) داریم

$$A(S)=\int_0^2[g(x)-f(x)]\,dx=\int_0^2\left(\frac{5}{2}x-x^2\right)dx=\frac{5}{2}\left(\frac{4}{2}\right)-\frac{8}{3}=\frac{7}{3}$$

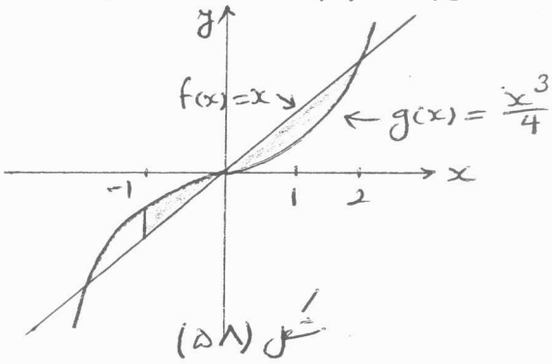


شکل (۵۷)

مثال ۷۰. مساحت ناحیه S بین نمودارهای f و g روی فاصله [-1,2] را در صورتی حساب کنید که $f(x)=x$ و $g(x)=\frac{x^3}{4}$.

حل. ناحیه S در شکل (۵۸) نشان داده شده است. در اینجا $f\le g$ را در سراسر فاصله [-1,2] نداریم. اما روی زیرفاصله [-1,0] داریم $f\le g$ و روی زیرفاصله [0,2] داریم $g\le f$. با استفاده از قضیه (۱۰۱) داریم

$$A(S)=\int_{-1}^{0}[g(x)-f(x)]\,dx+\int_0^2[f(x)-g(x)]\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}\left(\frac{x^3}{4}-x\right)dx+\int_0^2\left(x-\frac{x^3}{4}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{4}\,\frac{(-1)^4}{4}+\frac{(-1)^2}{4}+\frac{2^2}{2}-\frac{12^4}{44}=\frac{23}{16}$$



شکل (۵۸)

مثال ۷۱. مساحت یک قرص مستدیر. یک قرص مستدیر به شعاع $r>0$ عبارت است از مجموعه کلیه نقاط داخل و روی کرانه دایره‌ای به شعاع r. چنین قرصی با ناحیهٔ بین نمودارهای دو تابع f و g که بر فاصله $[-r,r]$ توسط

$$g(x)=\sqrt{r^2-x^2}, \qquad f(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$$

تعریف می‌شوند همبسته است. هر یک از این توابع بر $[-r,r]$ کراندار و قطعه قطعه پیوسته بوده و در نتیجه بر $[-r,r]$ انتگرال‌پذیر خواهند بود. از قضیه (۱۰۱) نتیجه می‌گیریم که ناحیه بین نمودارهای آنها اندازه‌پذیر است و مساحت آن مساوی $\int_{-r}^{r}[g(x)-f(x)]dx$ می‌باشد. فرض کنید $A(r)$ نشانگر مساحت قرص باشد. ثابت می‌کنیم که

$$A(r)=r^2A(1)$$

یعنی مساحت قرصی به شعاع r مساوی با r^2 برابر مساحت قرص یکه است. چون $g(x)-f(x)=2g(x)$ از قضیه (۱۰۱) داریم

$$A(r)=\int_{-r}^{r}2g(x)\,dx=2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

وقتی $r=1$ داریم

$$A(1)=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

با تغییر مقیاس محور xها و با فرض $k=\frac{1}{r}$ داریم

$$A(r)=2\int_{-r}^{r}g(x)\,dx=2r\int_{-1}^{1}g(rx)\,dx=2r\int_{-1}^{1}\sqrt{r^2-(rx)^2}\,dx$$
$$=2r^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=r^2A(1)$$

عدد π را مساوی مساحت یک قرص یکه تعریف می‌کنیم. پس

$$A(r)=\pi r^2 \qquad (۱۶۳)$$

توضیح ۱۰۲. فرض کنید S مجموعه معینی از نقاط در صفحه است و برای عدد ثابت $k>0$ $kS=\{(kx,ky):(x,y)\in S\}$. گوییم kS با S متشابه است. اگر $k>1$ تبدیل S به kS را یک کشش یا یک انبساط (بزرگنمایی) و اگر $0<k<1$ آن را یک کاهش یا یک

انقباض (به طرف مبدأ) نامیم. به عنوان مثال، اگر S ناحیه محدود به دایره‌ای با مرکز مبدأ باشد آنگاه kS یک ناحیه مستدیر با همان مرکز و به شعاع k است. در مثال (۷۱) دیدیم که مساحت kS، k^2 برابر مساحت S است.

مثال ۷۲. فرض کنید f بر [a,b] نامنفی و انتگرال‌پذیر بوده و S مجموعه عرضی آن است. هرگاه یک تبدیل تشابه را با ضریب شباهت k به کار بریم آنگاه kS مجموعه عرضی تابع جدیدی مثلاً g روی فاصله [ka,kb] است. (شکل (۵۹) را ببینید). نقطه (x,y) روی نمودار g است اگر و تنها اگر نقطه $(\frac{x}{k}, \frac{y}{k})$ روی نمودار f باشد. لذا $\frac{y}{k} = f(\frac{x}{k})$ در نتیجه $y = kf(\frac{y}{k})$، به عبارت دیگر تابع جدید g با رابطه

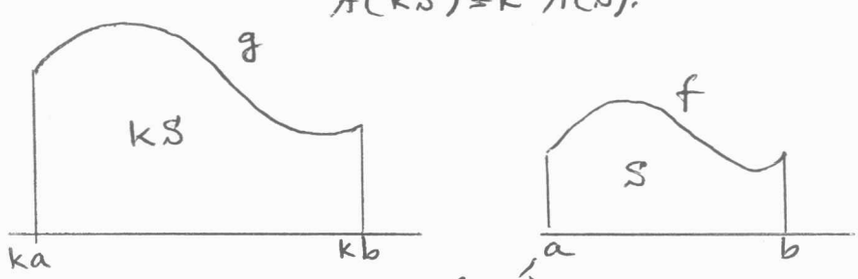
$$g(x) = kf(\frac{x}{k})$$

به ازای هر x در [ka,kb] به f مربوط می‌شود. بنابراین مساحت kS عبارت است از

$$A(kS) = \int_{ka}^{kb} g(x)dx = k\int_{ka}^{kb} f(\frac{x}{k})dx = k^2\int_a^b f(x)\,dx$$

چون $\int_a^b f(x)\,dx = A(S)$ پس

$$A(kS) = k^2 A(S). \qquad (۱۶۴)$$



شکل ۵۹

مثال ۷۳. مطلوب است $I = \int_0^a x^{1/2}dx$. $(a>0)$

حل. شکل (۶۰) نمودار تابع f که با $f(x) = x^{1/2}$ روی فاصله [0,a] داده شده، را نمایش می‌دهد. مجموعه عرضی آن S مساحتی برابر با

$$A(S) = \int_0^a x^{1/2}dx$$

دارد. در شکل (۶۰) ناحیه S و ناحیه T با اسم مستطیلی با طول a و عرض $a^{1/2}$

را پر می‌کند. پس $A(S)+A(T)=a^{3/2}$ یعنی

$$A(S)=a^{3/2}-A(T)$$

اما T مجموعه عرضی تابعی مانند g روی فاصله $[0,a^{1/2}]$ بر محور yها با معادله $g(y)=y^2$ تعریف می‌کند. لذا

$$A(T)=\int_0^{a^{1/2}} g(y)\,dy=\int_0^{a^{1/2}} y^2\,dy=\frac{y^3}{3}\Big|_0^{a^{1/2}}=\frac{1}{3}a^{3/2}$$

پس

$$A(S)=a^{3/2}-\frac{1}{3}a^{3/2}=\frac{2}{3}a^{3/2}$$

یعنی

$$I=\int_0^a x^{1/2}\,dx=\frac{2}{3}a^{3/2}$$

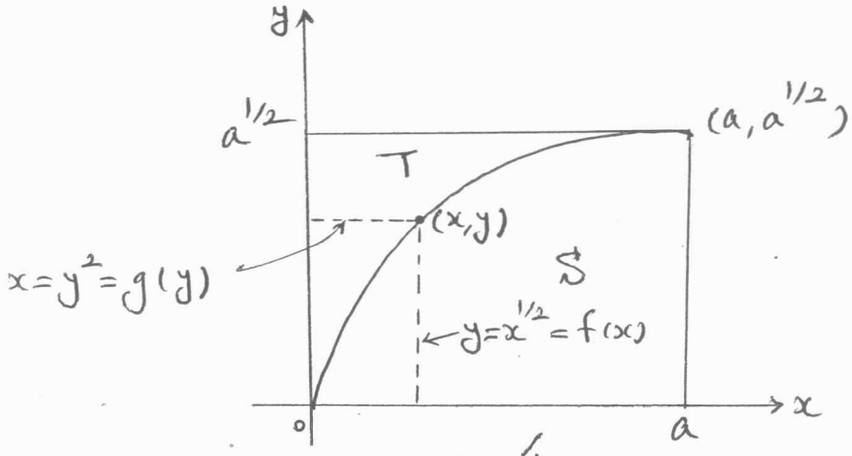
در حالت کلی‌تر اگر $a>0$ و $b>0$، از خاصیت جمع‌پذیری انتگرال داریم

$$\int_a^b x^{1/2}\,dx=\frac{2}{3}\left(b^{3/2}-a^{3/2}\right)$$

قضیه ۱۰۳. به ازای $a>0$ و $b>0$ و عدد صحیح مثبت n داریم

$$\int_a^b x^{1/n}\,dx=\frac{b^{1+\frac{1}{n}}-a^{1+\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} \qquad (۱۶۵)$$

اثبات. مشابه مثال (۷۳) است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود.



شکل ۹۰

۲.۷.۲ انتگرال توابع مثلثاتی

در بخش ۲.۵.۲ با توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس و چهار تابع دیگر مثلثاتی آشنا شدیم. توابع مثلثاتی در ریاضی عمومی اهمیت ویژه‌ای دارند. این به سبب ارتباط آنها با اضلاع و زوایای مثلث نیست بلکه تا حدودی بخاطر خواصی است که به عنوان تابع دارا می‌باشند. توابع مثلثاتی شش‌گانه دارای خاصیت مشترک مهمی بنام خاصیت تناوبی هستند. از خواص اساسی سینوس و کسینوس می‌توان چهار خاصیت زیر را بیان داشت.

۱. قلمرو یا دامنه تعریف. توابع سینوس و کسینوس همه جا بر خط حقیقی تعریف شده‌اند.

۲. مقادیر خاص. داریم $\cos 0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ و $\cos\pi = -1$

۳. کسینوس تفاضل. به ازای هر x و y داریم

$$\cos(y-x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x \qquad (۱۶۶)$$

۴. نامساوی‌های اساسی. به ازای $0 < x < \frac{\pi}{2}$ داریم

$$0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x} \qquad (۱۶۷)$$

از این چهار خاصیت، می‌توان همه خواص سینوس و کسینوس را که در ریاضی عمومی اهمیت دارند، نتیجه گرفت.

قضیه ۱.۴. هرگاه دو تابع سینوس و کسینوس خواص ۱ تا ۴ را داشته باشند آنگاه

الف) اتحاد فیثاغورث: به ازای هر x، $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

ب) مقادیر خاص: $\sin 0 = \cos\frac{\pi}{2} = \sin\pi = 0$

ج) خواص زوج و فرد بودن. کسینوس تابعی زوج و سینوس تابعی فرد است، یعنی به ازای هر x داریم

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \sin(-x) = -\sin x.$$

د) روابط متقابل. به ازای هر x داریم

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x, \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$$

هـ) خاصیت تناوبی. به ازای هر x داریم

$$\sin(x+2\pi)=\sin x, \quad \cos(x+2\pi)=\cos x$$

و) دستورهای جمع. به ازای هر x و y داریم

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

ز) دستورهای تفریق. به ازای هر x و y داریم

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$$

ح) خاصیت یکنوایی. سینوس در فاصله $[0,\frac{\pi}{2}]$ اکیداً صعودی و کسینوس در فاصله $[0,\frac{\pi}{2}]$ اکیداً نزولی است.

اثبات. الف) اگر در (۱۹۹) فرض کنیم $x=y$ و از رابطه $\cos 0=1$ استفاده کنیم داریم

$$1=\cos 0=\cos(x-x)=\cos x\cos x+\sin x\sin x$$
$$=\cos^2 x+\sin^2 x$$

ب) در خاصیت (الف) مقادیر $x=0$ ، $x=\frac{\pi}{2}$ ، $x=\pi$ را قرار داده و از مقادیر خاص داریم

$$x=0 \Rightarrow \sin^2 0+\cos^2 0=1 \Rightarrow \sin^2 0=0 \Rightarrow \sin 0=0$$

$$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{2}+\cos^2\frac{\pi}{2}=1 \Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{2}=0 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2}=0$$

$$x=\pi \Rightarrow \sin^2\pi+\cos^2\pi=1 \Rightarrow \sin^2\pi=0 \Rightarrow \sin\pi=0$$

ج) از (۱۹۹)، با فرض $y=0$ داریم

$$\cos(-x)=\cos(0-x)=\cos 0\cos x+\sin 0\sin x=\cos x$$

و از (۱۹۹) با فرض $y=\frac{\pi}{2}$ داریم

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos x+\sin\frac{\pi}{2}\sin x=\sin x \qquad (۱۶۸)$$

و مجدداً با توجه به (۱۶۶) و (۱۶۸) داریم

$$\sin(-x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]$$
$$=\cos\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$
$$=-\sin x$$

پس تابع سینوس فرد است.

د) از (۱۶۸)، x را با $x+\frac{\pi}{2}$ عوض می‌کنیم و بعد بجای x، $-x$ می‌گذاریم

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\cos x=\cos(-x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos(-x)+\sin\frac{\pi}{2}\sin(-x)$$
$$=\sin(-x)=-\sin x$$

و) در (۱۶۶) بجای x قرار می‌دهیم $-x$ و داریم

$$\cos(x+y)=\cos(y-(-x))$$
$$=\cos y\cos(-x)+\sin y\sin(-x)$$
$$=\cos y\cos x-\sin x\sin y$$

و از (د) و دستور جمع برای کسینوس داریم

$$\sin(x+y)=-\cos\left(x+y+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-\cos x\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+\sin x\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\cos x\sin y+\sin x\cos y$$

ز) در دستور جمع برای $\sin(a+b)$، b را با $-b$ عوض می‌کنیم، داریم

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

طرفین تساوی به تساوی را از دستور $\sin(a+b)$ کم می‌کنیم، همین کار را برای تابع کسینوس انجام می‌دهیم، داریم

$$\sin(a+b)-\sin(a-b)=2\sin b\cos a$$
$$\cos(a+b)-\cos(a-b)=-2\sin b\sin a$$

با فرض $x=\frac{a+b}{2}$ و $y=\frac{a-b}{2}$ داریم

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$
$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$$

خواص (الف) تا (ز) فقط از خواص ۱ تا 3 نتیجه شدند، خاصیت ۴ برای اثبات (ح) به کار می‌رود.

ح) نامساوی‌ها در (۱۹۷) نشان می‌دهند که اگر $0<x<\frac{\pi}{2}$ باشد آن‌گاه توابع $\sin x$ و $\cos x$ مثبت‌اند، حال اگر $0<b<a<\frac{\pi}{2}$ آن‌گاه اعداد $\frac{a+b}{2}$ و $\frac{a-b}{2}$ در فاصله $(0,\frac{\pi}{2})$ قرار دارند و دستورهای تفریق (ز) نشان می‌دهند که

$$\sin a>\sin b,\quad \cos a<\cos b$$

پس سینوس در $[0,\frac{\pi}{2}]$ اکیداً صعودی و کسینوس در $[0,\frac{\pi}{2}]$ اکیداً نزولی است.

توضیح ۱۰۵. دو دستور دیگر که در ریاضی عمومی بارها مورد استفاده قرار می‌گیرند، دستورهای زاویه مضاعف یا دستورهای دو برابر هستند، داریم

$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$$

همچنین اتحاد فیثاغورث نشان می‌دهد که به ازای هر x،

$$|\sin x|\le 1,\quad |\cos x|\le 1.$$

حال خاصیت یکنوایی (قسمت (ح) قضیه (۱۰۴)) به همراه روابط متقابل و خاصیت تناوبی نشان می‌دهند که توابع سینوس و کسینوس بر هر فاصله‌ای قطعه قطعه یکنوایند.

بنابراین با توجه به قضیه (۹۰) می بینیم که توابع سینوس و کسینوس بر هر فاصله متناهی انتگرال پذیرند. برای محاسبه انتگرال های آنها از قضیه (۹۱) و قضیه (۹۲) انتگرال های آنها را محاسبه می کنیم.

قضیه ۱۰۶. اگر $0<a\leq\frac{\pi}{2}$ و $1\leq n$، داریم

$$\frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n}<\sin a<\frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{ka}{n} \qquad (۱۶۹)$$

اثبات. اتحاد مثلثاتی زیر برای $1\leq n$ و هر x حقیقی معتبر است.

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\sin(n+\tfrac{1}{2})x-\sin\tfrac{1}{2}x \qquad (۱۷۰)$$

زیرا از دستورهای تفریق (قضیه (۱۰۴) قسمت (ز)) داریم

$$2\sin\frac{x}{2}\cos kx=\sin(k+\tfrac{1}{2})x-\sin(k-\tfrac{1}{2})x$$

با اختیار $k=1,2,\dots,n$ و افزودن این معادلات به هم داریم

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\sum_{k=1}^{n}\left[\sin(k+\tfrac{1}{2})x-\sin(k-\tfrac{1}{2})x\right]$$

با توجه به جمع تلسکوپی داریم

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\sin(n+\tfrac{1}{2})x-\sin\tfrac{1}{2}x$$

که همان (۱۷۰) است. حال اگر $\frac{x}{2}$ مضرب صحیحی از π نباشد، می توانیم دو طرف (۱۷۰) را بر $2\sin\frac{x}{2}$ تقسیم کنیم و داریم

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

اگر n را با $n-1$ عوض کرده و ۱ را به طرفین رابطه حاصل بیفزاییم، داریم

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos kx=\frac{\sin(n-\frac{1}{2})x+\sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

هر دوی این دستورها وقتی معتبرند که $x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. با فرض $x=\frac{a}{n}$ که در آن $0<a\leq\frac{\pi}{2}$، نتیجه می دهد که دو نامساوی در (۱۶۹) معادل دو نامساوی زیر است.

$$\frac{a}{n}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\frac{a}{n}-\sin(\frac{a}{2n})}{2\sin(\frac{a}{2n})}<\sin a<\frac{a}{n}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\frac{a}{n}+\sin(\frac{a}{2n})}{2\sin(\frac{a}{2n})} \qquad (۱۷۱)$$

و این دو نامساوی در (۱۷۱) معادل با دو نامساوی زیر هستند

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{a}{n} - \sin\left(\frac{a}{2n}\right) < \frac{\sin\left(\frac{a}{2n}\right)}{\left(\frac{a}{2n}\right)}\sin a$$

$$< \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{a}{2} + \sin\left(\frac{a}{2n}\right) \qquad (۱۷۲)$$

بنابراین اثبات (۱۶۹) معادل اثبات (۱۷۲) است. ثابت می‌کنیم که به ازای $0 < 2n\theta \leq \frac{\pi}{2}$ داریم

$$\sin(2n+1)\theta - \sin\theta < \frac{\sin\theta}{\theta}\sin 2n\theta < \sin(2n-1)\theta + \sin\theta \qquad (۱۷۳)$$

این نامساوی‌ها برای $\theta = \frac{a}{2n}$ به (۱۷۲) تبدیل می‌شوند. برای اثبات نامساوی سمت چپ (۱۷۳) از دستور جمع برای سینوس استفاده کرده و می‌نویسیم

$$\sin(2n+1)\theta = \sin 2n\theta \cos\theta + \cos 2n\theta \sin\theta$$

$$< \sin 2n\theta \frac{\sin\theta}{\theta} + \sin\theta \qquad (۱۷۴)$$

که در آن با توجه به $0 < 2n\theta \leq \frac{\pi}{2}$ از نامساوی‌های

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta}, \quad 0 < \cos 2n\theta \leq 1, \quad \sin\theta > 0$$

استفاده کرده و (۱۷۴) حاصل شده است. نامساوی در (۱۷۴) با نامساوی طرف چپ (۱۷۳) معادل است.

حال برای اثبات نامساوی سمت راست (۱۷۳) مجدداً از دستور جمع برای سینوس استفاده کرده و داریم

$$\sin(2n-1)\theta = \sin 2n\theta \cos\theta - \cos 2n\theta \sin\theta$$

$\sin\theta$ را به طرفین اضافه می‌کنیم،

$$\sin(2n-1)\theta + \sin\theta = \sin 2n\theta\left(\cos\theta + \sin\theta\,\frac{1-\cos 2n\theta}{\sin 2n\theta}\right) \qquad (۱۷۵)$$

اما، چون

$$\frac{1-\cos 2n\theta}{\sin 2n\theta} = \frac{2\sin^2 n\theta}{2\sin n\theta \cos n\theta} = \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta},$$

پس طرف راست (۱۷۵) مساوی

$$(\sin 2n\theta)\left(\cos\theta + \sin\theta\,\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}\right) = (\sin 2n\theta)\left(\frac{\cos\theta\cos n\theta + \sin\theta\sin n\theta}{\cos n\theta}\right)$$
$$= (\sin 2n\theta)\,\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta}$$

خواهد بود. بنابراین برای اتمام اثبات رابطهٔ (۱۷۳) فقط کافی است نشان دهیم که

$$\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta} > \frac{\sin\theta}{\theta} \qquad (۱۷۶)$$

اما داریم

$$\cos n\theta = (\cos(n-1)\theta)\cos\theta - (\sin(n-1)\theta)\sin\theta$$
$$(\cos(n-1)\theta)\cos\theta$$
$$< (\cos(n-1)\theta)\frac{\theta}{\sin\theta}$$

این رابطهٔ آخر، (۱۷۶) را ایجاب می‌کند، پس (۱۷۳) و بنابراین (۱۶۹) برقرار است.

قضیه ۱۵۷. اگر دو تابع سینوس و کسینوس از خواص اساسی ۱ تا 4 بهره‌مند باشند آن‌گاه به ازای هر a حقیقی خواهیم داشت:

$$\int_0^a \cos x\,dx = \sin a, \qquad (۱۷۷)$$

$$\int_0^a \sin x\,dx = 1 - \cos a. \qquad (۱۷۸)$$

اثبات. فرض کنید $0 < a \le \frac{\pi}{2}$. چون کسینوس بر $[0, a]$ نزولی است پس از قضیه (۹۲) و با توجه به نامساوات در (۱۶۹) داریم

$$\int_0^a \cos x\,dx = \sin a$$

این دستور برای $a = 0$ نیز برقرار است زیرا هر دو طرف صفرند. اگر $-\frac{\pi}{2} \le a \le 0$ آن‌گاه $0 \le -a \le \frac{\pi}{2}$ و از خاصیت انعکاسی (قضیه (۹۸)) داریم

$$\int_0^a \cos x\,dx = -\int_0^{-a} \cos(-x)\,dx = -\int_0^{-a} \cos x\,dx$$
$$= -\sin(-a) = \sin a$$

پس (۱۷۷) در فاصله $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ برقرار است. حال فرض کنید $\frac{\pi}{2} \le a \le \frac{3\pi}{2}$. در این صورت $-\frac{\pi}{2} \le a - \pi \le \frac{\pi}{2}$ و داریم

$$\int_0^a \cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx + \int_{\pi/2}^a \cos x\,dx$$
$$= \sin\frac{\pi}{2} + \int_{-\pi/2}^{a-\pi} \cos(x+\pi)\,dx$$
$$= 1 - \int_{-\pi/2}^{a-\pi} \cos x\,dx$$
$$= 1 - \sin(a-\pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin a$$

پس (۱۷۷) به ازای هر a در فاصله $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ برقرار است. اما این فاصله طولش 2π است، پس (۱۷۷) برای هر a برقرار است زیرا هر دو طرف آن نسبت به a متناوب با دوره تناوب 2π می‌باشند.

حال از (۱۷۷) استفاده کرده و (۱۷۸) را نتیجه می‌گیریم. اگر $a=\frac{\pi}{2}$ باشد آنگاه با توجه به $\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$ و خاصیت انعکاسی (قضیه (۹۸)) داریم

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \int_{-\pi/2}^0 \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx = \int_{-\pi/2}^0 \cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos(-x)\,dx$$
$$= \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

حال به ازای هر $a\in\mathbb{R}$

$$\int_0^a \sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx + \int_{\pi/2}^a \sin x\,dx$$
$$= 1 + \int_0^{a-\pi/2} \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx$$
$$= 1 + \int_0^{a-\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1 + \sin\left(a-\frac{\pi}{2}\right) = 1-\cos a$$

و حکم حاصل می‌شود.

مثال ۷۴. با استفاده (۱۷۷) و (۱۷۸) و خاصیت جمع‌پذیری

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx$$

دستورهای کلیتری را به دست می‌آوریم.

$$\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a \qquad (۱۷۹)$$

$$\int_a^b \sin x\,dx = (1-\cos b) - (1-\cos a) = -(\cos b - \cos a) \qquad (۱۸۰)$$

مثال ۷۵. با استفاده از نتایج مثال (۷۴) و خاصیت انبساط

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f\left(\frac{x}{c}\right)dx$$

دستورهای زیر را که به ازای $c \neq 0$ معتبرند به دست می‌آوریم

$$\int_a^b \cos cx\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} \cos x\,dx = \frac{1}{c}(\sin cb - \sin ca) \qquad (۱۸۱)$$

$$\int_a^b \sin cx\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} \sin x\,dx = -\frac{1}{c}(\cos cb - \cos ca) \qquad (۱۸۲)$$

مثال ۷۶. اتحاد $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ایجاب می‌کند که

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

پس از مثال (۷۵) داریم

$$\int_0^a \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{4}\sin 2a \qquad (۱۸۳)$$

چون $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ پس

$$\int_0^a \cos^2 x\,dx = \int_0^a (1 - \sin^2 x)\,dx = a - \int_0^a \sin^2 x\,dx = \frac{a}{2} + \frac{1}{4}\sin 2a \qquad (۱۸۴)$$