

مسائل مربوط به معادلات دیفرانسیل جزئی خطی - (معادله لاپلاس/پتانسیل)

۱. معادله  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  را در مستطیل  $0 < x < 3, 0 < y < 2$  به طریق جداسازی متغیرهای برای شرایط مرزی زیر حل کنید.  $H(x)$  تابع پله واحد است.

- a.  $u(x,y) = u(x,0) = u(3,y) = 0$        $u(x,2) = 10\sin(\pi x/3) - 4\sin(\pi x)$   
 b.  $u(x,0) = u(3,y) = u(x,2) = 0$        $u(0,y) = 5\sin(\pi y) + 4\sin(2\pi y) - \sin(3\pi y)$   
 c.  $u_x(0,y) = u(x,2) = u(3,y) = 0$        $u(x,0) = 50H(x-2)$   
 d.  $u_y(x,2) = u(3,y) = u_y(x,0) = 0$        $u_x(0,y) = 20$   
 e.  $u_x(0,y) = u(x,2) = u_x(3,y) = 0$        $u(x,0) = 50H(x-2)$

۲. مسئله  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  را در مستطیل  $0 < y < b, 0 < x < a$  با شرایط مرزی  $u(x,0) = u_1, u(0,y) = f(y), u(x,b) = u_2$  و  $u(0,y) = p(y)$  بدون شکستن مسئله به چهار مسئله کوچک حل کنید.  $P(y), f(y)$  توابع معلوم و  $u_1, u_2$  ثابت‌های معلومند.

مانند مسئله ۲ با شرایط مرزی زیر حل کنید.

- a.  $u_x(0,y) = p(y),$        $u(x,b) = u_1$        $u(a,y) = f(y)$        $u(x,0) = u_2$   
 b.  $u_x(0,y) = p(y)$        $u(x,b) = u_1$        $u_x(a,y) = f(y)$        $u(x,0) = u_2$

۴. معادله دیفرانسیل مقابل را به روش جداسازی متغیرها حل کنید. ضرایب را بصورت انتگرال باقی بگذارید، و در نظر داشته باشید که  $u$  کراندار است.

$$\nabla^2 u = u_{rr} + (1/r)u_r + u_{zz} = 0$$

- a.  $0 \leq r < b, 0 < z < \infty$        $u(b,z) = 0$        $u(r,0) = f(r)$   
 b.  $0 \leq r < b, -\infty < z < \infty$        $u(b,z) = f(z) = \begin{cases} 100 & 0 < z < L \\ 0 & L < z < 2L \end{cases}$        $2L$  است با دوره:  
 c.  $0 \leq r < b, 0 < z < L$        $u_z(r,0) = u_z(r,L) = 0$        $u(b,z) = 50$   
 d.  $0 \leq r < b, 0 < z < L$        $u_z(r,0) = u(r,L) = 0$        $u(b,z) = 50$   
 e.  $a \leq r < \infty, 0 < z < L$        $u(r,0) = u_1$        $u(r,L) = u_2$        $u(a,z) = u_3$   
 f.  $a \leq r < \infty, 0 < z < \infty$        $u(r,0) = 0$        $u(a,z) = 25\sin(3z/2)$

۵. معادله دیفرانسیل دو بعدی مقابل را به روش جداسازی متغیرها حل کنید.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \infty < y < \infty, 0 < x < 2 \quad u(0,y) = \sin y + 5\sin 4y \quad u(2,y) = 0$$

جواب:  $u(x,y) = \sin y (\cosh x - \coth 2 \cdot \sinh x) + 5\sin 4y (\cosh 8 - \coth 8 \cdot \sinh 4x)$

۶. معادله  $\nabla^2 u = 0$  را برای  $(r, \theta)$  حل کنید، و براساس درک مستقیم خطوط هم دما ی:  $u = 50, 25, 0.5$  را رسم کنید. می‌توانید از نرم افزار Math Lab استفاده کنید.

- a.  $0 < \theta < \pi, 1 < r < 2$        $u(r,\pi) = u(1,\theta) = 100$        $u(r,0) = u(2,\theta) = 0$   
 b.  $0 < \theta < \pi, 1 < r < 2$        $u(r,\pi) = u(1,\theta) = 100$        $u(r,0) = u_\theta(2,\theta) = 0$   
 c.  $0 < \theta < \pi, 1 < r < 2$        $u(r,0) = u_r(1,\theta) = u(2,\theta) = 0$        $u(r,\pi) = 100$   
 d.  $0 < \theta < \pi, 1 < r < 2$        $u_\theta(r,0) = u_\theta(r,\pi) = u(1,\theta) = 0$        $u(2,\theta) = 100$   
 e.  $0 < \theta < 3\pi/2, 0 < r < 3$        $u_\theta(r,0) = u(3,\theta) = 0$        $u(r,3\pi/2) = 100$