مسایل مربوط به معادلات دیفرانسیل جزیی خطی – (معادله لاپلاس/پتانسیل)

۱. معادله $u_{xx} + u_{yy} = 0$ را در مستطیل $0<x<3$, $0<y<2$ به طریق جداسازی متغیر های برای شرایط مرزی زیر حل کنید. $H(x)$ تابع پله واحد است.

a. $u(x,y) = u(x,0)=u(3,y)=0$ $\quad u(x,2)=10\sin(\pi x/3)-4\sin(\pi x)$

b. $u(x,0) =u(3,y)=u(x,2)=0$ $\quad u(0,y)=5\sin(\pi y)+4\sin(2\pi y)-\sin(3\pi y)$

c. $u_x(0,y)=u(x,2)=u(3,y)=0$ $\quad u(x,0)=50H(x-2)$

d. $u_y(x,2)=u(3,y)=u_y(x,0)=0$ $\quad u_x(0,y)=20$

e. $u_x(0,y)=u(x,2)=u_x(3,y)=0$ $\quad u(x,0)=50H(x-2)$

۲. مسئله $u_{xx}+u_{yy}=0$ را در مستطیل $0<x<a$, $0<y<b$ با شرایط مرزی $u(x,0)=u_1$, $u(0,y)=f(y)$, $u(x,b)=u_2$, $u(0,y)=p(y)$بدون شکستن مسئله به چهار مسئله کوچک حل کنید. $f(y)$, $P(y)$ توابع معلوم و u_1 , u_2 ثابت‌های معلومند.

۳. مانند مسئله ۲ با شرایط مرزی زیر حل کنید.

a. $u_x(0,y)=p(y)$, $\quad u(x,b)=u_1 \quad u(a,y)=f(y) \quad u(x,0)=u_2$

b. $u_x(0,y)=p(y)$ $\quad u(x,b)=u_1 \quad u_x(a,y)=f(y) \quad u(x,0)=u_2$

۴. معادله دیفرانسیل مقابل را به روش جداسازی متغیرهاحل کنید. ضرایب را بصورت انتگرال باقی بگذارید، ودر نظر داشته باشید که u کراندار است. $\nabla^2 u=u_{rr}+(1/r)\,u_r+u_{zz}=0$

a. $0 \le r < b, \quad 0 < z < \infty$ $\quad u(b,z) = 0 \quad u(r,0) = f(r)$

b. $0 \le r < b, \ -\infty < z < \infty$ $\quad u(b,z) = f(z)=\begin{cases} 100 & 0<z<L \\ 0 & L<z<2L \end{cases}$ $f(z)$تابع دوره‌ای مربعی است با دوره: $2L$

c. $0 \le r < b, \quad 0 < z < L$ $\quad u_z=(r,0)= u_z(r,L)=0 \quad u(b,z)=50$

d. $0 \le r < b, \quad 0 < z < L$ $\quad u_z=(r,0)= u(r,L)=0 \quad u(b,z)=50$

e. $a \le r < \infty, \quad 0 < z < L$ $\quad u(r,0)=u_1 \quad u(r,L)=u_2 \quad u(a,z)=u_3$

f. $a \le r < \infty, \quad 0 < z < \infty$ $\quad u(r,0)=0 \quad u(a,z)=25\sin(3z/2)$

۵. معادله دیفرانسیل دو بعدی مقابل را به روش جداسازی متغیرها حل کنید $u_{xx} + u_{yy} = 0.$

$\infty<y<\infty, 0<x<2$ $\quad u(0,y)=\sin y + 5\sin 4y \quad u(2,y)=0$

جواب: $u(x,y)=\sin y\,(\cosh x - \coth 2.\ \sinh x) + 5\sin 4y\,(\cosh 8-\coth 8.\sinh 4x)$

۶. معادله $\nabla^2 u=0$ را برای(r, θ)حل کنید، وبراساس درک مستقیم خطوط هم دما ی : $u=50,25,0.5$را رسم کنید میتوانید از نرم افزار Math Lab استفاده کنید.

a. $0<\theta<\pi$, $1<r<2$ $\quad u(r,\pi)=u(1,\theta)=100 \quad u(r,0)=u(2,\theta)=0$

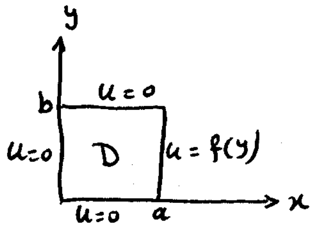
b. $0<\theta<\pi$, $1<r<2$ $\quad u(r,\pi)=u(1,\theta)=100 \quad u(r,0)=u_\theta(2,\theta)=0$

c. $0<\theta<\pi$, $1<r<2$ $\quad u(r,0)=u_r(1,\theta)=u(2,\theta)=0 \quad u(r,\pi)=100$

d. $0<\theta<\pi$, $1<r<2$ $\quad u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=u(1,\theta)=0 \quad u(2,\theta)=100$

e. $0<\theta<3\pi/2$, $0<r<3$ $\quad u_\theta(r,0)=u(3,\theta)=0 \quad u(r,3\pi/2)=100$

معادله پتانسیل



حل معادلهٔ لاپلاس (پتانسیل) به روش جداسازی متغیرها $\nabla^2 u=0$ در D

$$u(0,y)=0\quad(0<y<b)\quad \text{و}\quad u(a,y)=f(y)\quad(0<y<b),\quad u(x,0)=u(x,b)=0\quad 0<x<a$$

$$u(x,y)=X(x)\cdot Y(y)\longrightarrow \frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=K^2\longrightarrow \begin{cases}X''-K^2X=0\\ Y''+K^2Y=0\end{cases}$$

$$X(x)=\begin{cases}A+Bx & K=0\\ C\cosh Kx+D\sinh Kx & K\neq 0\end{cases}\qquad Y(y)=\begin{cases}E+Fy & K=0\\ G\cos Ky+H\sin Ky & K\neq 0\end{cases}$$

$$u(x,y)=(A+Bx)(E+Fy)+(C\cosh Kx+D\sinh Kx)(G\cos Ky+H\sin Ky)$$

ابتدا شرایط مرزی دو طرفین لبهٔ $u(a,y)=f(y)$ را قرار می‌دهیم.

$$u(x,0)=0\longrightarrow E=0\ ,\ G=0$$

$$u(x,y)=(I+Jx)y+(P\cosh Kx+Q\sinh Kx)\sin Ky\ ,\ u(x,b)=0\longrightarrow I=0,\ J=0,\ \sin Kb=0$$

پس $K=\frac{n\pi}{b}\ (n=1,2,\dots)\longrightarrow u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(P_n\cosh\frac{n\pi x}{b}+Q_n\sinh\frac{n\pi x}{b}\right)\sin\frac{n\pi}{b}y$

حال شرط مرزی در $x=0$ را قرار می‌دهیم

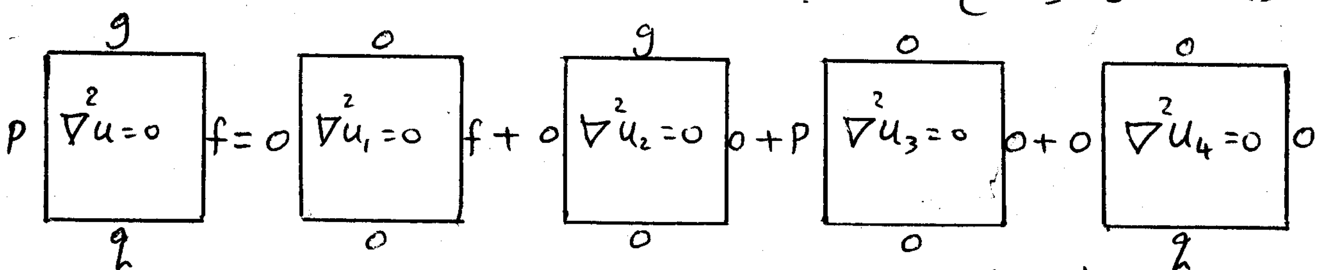
$$u(0,y)=0=\sum_{n=1}^{\infty}P_n\sin\frac{n\pi y}{b}\quad(0<y<b)\Rightarrow P_n=0$$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n\sinh\frac{n\pi}{b}x\sin\frac{n\pi}{b}y\ \xrightarrow[x=a]{\text{شرط مرزی}}\ u(a,y)=f(y)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n\sinh\frac{n\pi}{b}a\sin\frac{n\pi}{b}y\quad(0<y<b)$$

$$Q_n\sinh\frac{n\pi a}{b}=\frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy\ ,\ Q_n=\frac{2}{b\sinh\frac{n\pi a}{b}}\int_0^b f(y)\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy$$

اگر شرایط مرزی: $u(0,y)=f(y),\ u(a,y)=g(y),\ u(x,0)=p(x)$ و $u(x,b)=q(x)$

ناچاراً هر لبه بسط سری فوریه نیاز دارد، پس چطور حل کنیم؟ این مسئله با مفهوم جمع خطی حل می‌شود. مسئله را به چهار مسئله ساده می‌شکنیم مانند شکل زیر. جمع آنها u را نتیجه می‌دهد.



$$u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)+u_3(x,y)+u_4(x,y)$$

$$\nabla^2u_1=0\ ,\ \nabla^2u_2=0\ ,\ \nabla^2u_3=0\ ,\ \nabla^2u_4=0\longrightarrow \nabla^2u_1+\nabla^2u_2+\nabla^2u_3+\nabla^2u_4=0$$

$$\rightarrow \nabla^2(u_1+u_2+u_3+u_4)=0\qquad \begin{aligned}u(a,y)&=u_1(a,y)+u_2(a,y)+u_3(a,y)+u_4(a,y)\\&=f(y)+0+0+0\\&=f(y)\end{aligned}$$

به همین ترتیب برای مرزهای دیگر عمل می‌کنیم.

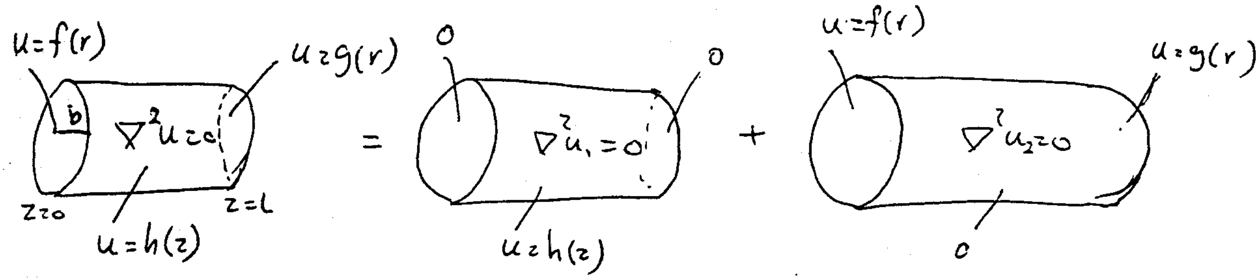
با تشخیص لبه‌ای که سری فوریه نهایی روی آن واقع است، $+K^2$ و یا $-K^2$ را انتخاب می‌کنیم بنحوی که توابع نوسانی روی آن لبه قرار بگیرند. سپس اول شرایط مرزی در مجاورت آن لبه را اعمال می‌کنیم.

مختصات استوانه ای

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0$$

فرض کنید تقارن وجود دارد و u با θ تغییر نمی کند.

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz} = 0$$



$$u_1(r,z) = R(r)\cdot Z(z) \qquad \frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = k^2$$

$$\begin{cases} R'' + \frac{1}{r}R' - k^2R = 0 \\ Z'' + k^2 Z = 0 \end{cases}$$

(با جمله $-k^2R$) این معادله تغییر یافته بسل است.

$+k^2$ را انتخاب می کنیم زیرا که جواب $\cos kz$ و $\sin kz$ بدست آید تا بتوانیم بسط سری فوریه $u_1(b,z)=h(z)$ را پیش بینی کنیم. شرایط $k=0$ و $k\neq 0$ را در نظر می گیریم.

$$R = \begin{cases} A + B\ln r & k=0 \\ CI_0(kr) + DK_0(kr) & k\neq 0 \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} E + Fz & k=0 \\ G\cos kz + H\sin kz & k\neq 0 \end{cases}$$

I_0 و K_0 توابع بسل تغییر یافته از نوع اول و دوم مرتبه صفرام هستند.

$$u_1(r,z) = (A+B\ln r)(E+Fz) + [CI_0(kr) + DK_0(kr)](G\cos kz + H\sin kz)$$

$[(z=0 \;, z=L) \to u=0 \quad 0<r\leq b]$ as $r\to 0$ u کرانه دار $\ln r \to -\infty \Rightarrow B=0$

$K_0(kr) \sim -\ln r \to \infty$ (as $r\to 0$) $\Rightarrow D=0$

$$u_1(r,z) = P + Qz + I_0(kr)(S\cos kz + T\sin kz)$$

$u_1(r,0) = P + I_0(kr)S = 0 \qquad P=0 \;,\; S=0 \longrightarrow u_1(r,z) = Qz + TI_0(kr)\sin kz$

$u_1(r,L) = 0 = QL + TI_0(kr)\sin kL \Rightarrow Q=0 \quad k=\frac{n\pi}{L} \quad n=1,2,\cdots$

$u_1(r,z) = \sum_n T_n I_0\left(\frac{n\pi r}{L}\right)\sin\frac{n\pi z}{L} \qquad u_1(b,z) = h(z) = \sum_n T_n I_0\left(\frac{n\pi b}{L}\right)\sin\frac{n\pi}{L}z$

$$T_n I_0\left(\frac{n\pi b}{L}\right) = \frac{2}{L}\int^{L} h(z) \sin\frac{n\pi}{L} z \, dz$$

$$T_n = \frac{2}{L I_0\left(\frac{n\pi b}{L}\right)} \int_0^{L} h(z) \sin\frac{n\pi}{L} z \, dz$$

توجه:

ابتدا شرط کرانداری را اعمال می کنیم. پیشنهاد می شود هرگاه شرط کرانداری وجود داشت ابتدا آن را اعمال کنید زیرا آن یک یا دو جمله را حذف می کند و بلافاصله فرم ساده تری بدست می آید.

$$U_2(r,z) = R(r)\, Z(z) \qquad \frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = -K^2$$

$$\begin{cases} R'' + \frac{1}{r}R' + K^2 R = 0 \\ Z'' - K^2 Z = 0 \end{cases}$$

$-K^2$ را منفی می گیریم تا جواب نوسانی برای R بدست آید.

$$R = \begin{cases} A + B\ln r & K = 0 \\ C J_0(Kr) + D Y_0(Kr) & K \neq 0 \end{cases}$$

J_0 و Y_0 توابع بسل از نوع اول و دوم مرتبه صفر را داشته.

$$Z = \begin{cases} E + F z & K = 0 \\ G \cosh Kz + H \sinh Kz & K \neq 0 \end{cases}$$

$$U_2(r,z) = (A + B\ln r)(E + Fz) + \left[C J_0(Kr) + D Y_0(Kr)\right](G\cosh Kz + H\sinh Kz)$$

کرانداری

$r \to 0 \Rightarrow B = 0, \; D = 0 \qquad Y_0(Kr) \sim (2/\pi)\ln r \to -\infty \;\text{ as }\; r \to 0$

$\ln r \to -\infty, \; Y_0(Kr) \to \infty$

$$U_2(r,z) = P + Qz + J_0(Kr)\,(S\cosh Kz + T\sinh Kz)$$

از آنجائیکه بسط f و g پیش بینی می شود ابتدا باید شرایط مرزی r را اعمال کنیم.

$$U_2(b,z) = 0 = P + Qz + J_0(Kb)(S\cosh Kz + T\sinh Kz) \Rightarrow P = 0, \; Q = 0$$

و $J_0(Kb) = 0 = J_0(z_n) \xrightarrow{\text{}} K = \frac{z_n}{b}$

چون با زور دادن S و T در صفر اصل جواب از بین می رود.

$z_1, z_2, \dots, z_n$ ریشه های $J_0(x) = 0$ هستند

$$U_2(r,z) = \sum_n J_0\left(z_n \frac{r}{b}\right)\left[S_n \cosh\left(z_n \frac{z}{b}\right) + T_n \sinh\left(z_n \frac{z}{b}\right)\right]$$

$$U_2(r,0) = f(r) = \sum_n S_n J_0\left(z_n \frac{r}{b}\right) \qquad S_n = \frac{\langle f(r), J_0 \rangle}{\langle J_0, J_0 \rangle}$$

$$U_2(r,L) = g(r) = \sum_n \underbrace{\left[S_n \cosh\left(z_n \frac{L}{b}\right) + T_n \sinh\left(z_n \frac{L}{b}\right)\right]}_{V_n} J_0\left(z_n \frac{r}{b}\right)$$

$$S_n = \frac{2}{b^2 [J_1(z_n)^2]} \int_0^b f(r)\, J_0\left(z_n \frac{r}{b}\right) r \, dr \qquad V_n = \frac{\langle g(r), J_0 \rangle}{\langle J_0, J_0 \rangle}$$

$$T_n I_0\left(\frac{n\pi b}{L}\right) = \frac{2}{L}\int_0^{L} h(z) \sin\frac{n\pi}{L} z \, dz$$

حل معادله پتانسیل

مختصات قطبی - به روش جداسازی متغیرها

در دستگاه قطبی $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \qquad (a<r<b\ ,\ 0<\theta<\alpha)$$

$$u(r,0)=u_1\ ,\quad u(r,\alpha)=u_2\ ,\quad u(a,\theta)=0\ ,\quad u(b,\theta)=f(\theta)$$

$$u(r,\theta)=R(r)\cdot\Theta(\theta) \longrightarrow \left[R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{R}{r^2}\Theta''=0\right] \div R\cdot\Theta$$

$$\frac{r^2R''+rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = k^2$$

برای صدق $f(\theta)$ با سری مثلثاتی پس $+k^2$ را انتخاب می‌کنیم.

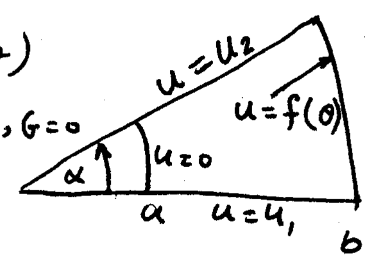
$$k=0 \rightarrow \Theta''=0 \rightarrow \Theta = E+F\theta \quad , \quad r^2R''+rR'=0 \longrightarrow R(r)=A+B\ln r$$

$$k\neq 0 \quad \Theta''+k^2\Theta=0 \longrightarrow \Theta(\theta) = G\cos k\theta + H\sin k\theta$$

$$r^2R''+rR'-k^2R=0 \xrightarrow{\text{فرض کنید}} R=r^\lambda \ \text{جواب باشد} \xrightarrow{\text{پس}} r^2(\lambda)(\lambda-1)r^{\lambda-2}+r\lambda r^{\lambda-1}-k^2r^\lambda=0$$

$$\longrightarrow \lambda(\lambda-1)+\lambda-k^2=0 \longrightarrow \lambda^2-k^2=0 \longrightarrow \lambda=\pm k \longrightarrow R(r)=Cr^k+Dr^{-k}$$

$$u(r,\theta)=\underbrace{(A+B\ln r)(E+F\theta)}_{k=0}+\underbrace{(Cr^k+Dr^{-k})(G\cos k\theta+H\sin k\theta)}_{k\neq 0}$$



$$u(r,0)=u_1=(A+B\ln r)E+(Cr^k+Dr^{-k})G \rightarrow B=0,\ A=1,\ E=u_1,\ G=0,\ H=1$$

$$u(r,\theta)=u_1+F\theta+(Cr^k+Dr^{-k})\sin k\theta$$

$$u(r,\alpha)=u_2=u_1+F\alpha+(Cr^k+Dr^{-k})\sin k\alpha \longrightarrow u_1+F\alpha=u_2 \rightarrow F=\frac{u_2-u_1}{\alpha}$$

$$\sin k\alpha=0=\sin n\pi \rightarrow \boxed{k=\frac{n\pi}{\alpha}} \quad n=1,2,\ldots$$

$$u(r,\theta)=u_1+(u_2-u_1)\frac{\theta}{\alpha}+\sum_n (C_nr^k+D_nr^{-k})\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta$$

$$u(a,\theta)=0=u_1+(u_2-u_1)\frac{\theta}{\alpha}+\sum_n\left(C_na^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_na^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta$$

$$\sum_n\left(C_na^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_na^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta=-u_1-(u_2-u_1)\frac{\theta}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$u(b,\theta)=f(\theta)=u_1+(u_2-u_1)\frac{\theta}{\alpha}+\sum_n\left(C_nb^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_nb^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta$$

$$f(\theta)-u_1-(u_2-u_1)\frac{\theta}{\alpha}=\sum_n\left(C_nb^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_nb^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

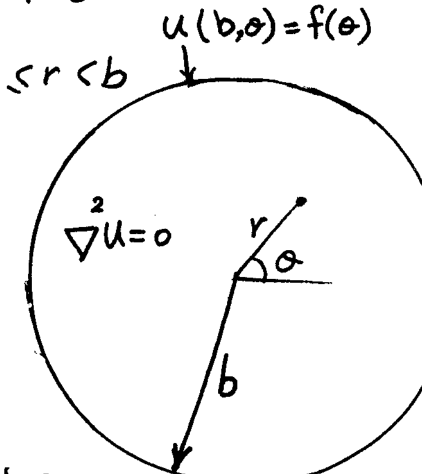
$$(1)\longrightarrow C_na^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_na^{-\frac{n\pi}{\alpha}}=\frac{2}{\alpha}\int_0^\alpha\left[-u_1-(u_2-u_1)\frac{\theta}{\alpha}\right]\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta\, d\theta$$

$$(2)\longrightarrow C_nb^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_nb^{-\frac{n\pi}{\alpha}}=\frac{2}{\alpha}\int_0^\alpha\left[f(\theta)-u_1-(u_2-u_1)\frac{\theta}{\alpha}\right]\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta\, d\theta$$

$$\begin{vmatrix} a^{\frac{n\pi}{\alpha}} & a^{-\frac{n\pi}{\alpha}} \\ b^{\frac{n\pi}{\alpha}} & b^{-\frac{n\pi}{\alpha}} \end{vmatrix}\neq 0$$

مشروط به اینکه دترمینان مقابل $\neq 0$ باشد دو جواب واحد برای C_n و D_n بدست می‌آید

حل معادله پتانسیل برای سطح یک دایره کامل به روش جداسازی متغیرها - در دستگاه قطبی



$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \qquad -\infty<\theta<\infty \ , \ 0\le r<b$$

$$u(r,\theta) = (A+B\ln r)(E+F\theta) + (Cr^{k}+Dr^{-k})(G\cos k\theta + H\sin k\theta)$$

$$|u|<M : r\to 0 \ \ \ln r\to\infty \Rightarrow B=0,\ A=1 \ , \ r^{-k}\to\infty \Rightarrow D=0,\ C=1$$

از آنجا که u با تغییرات θ دوره‌ای است یعنی $u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi)$

و جمله $F\theta$ برای $-\infty<\theta<\infty$ دوره‌ای نیست پس باید ضریب θ صفر شود

$\Longrightarrow F=0$

برای اینکه $\sin k\theta$ و $\cos k\theta$ در 2π دوره‌ای باشند باید مقادیر k تعیین شوند.

$$\cos k\theta \equiv \cos k(\theta+2\pi) \to \cos k\theta \cos 2\pi k - \sin k\theta \sin 2\pi k \equiv \cos k\theta$$

$$\therefore \ \cos 2k\pi = 1 \to k=1,2,3,\dots \quad , \quad \sin 2k\pi = 0 \quad \to k=\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2},2,\dots$$

پس $\boxed{k=n}$

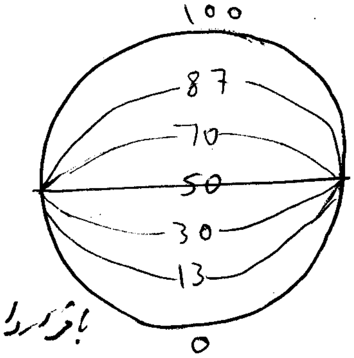
$$u(r,\theta) = E + \sum_n r^n (G_n\cos n\theta + H_n \sin n\theta) \qquad -\infty<\theta<+\infty \ , \ 0\le r<b$$

$$u(b,\theta) = E + \sum_n b^n (G_n \cos n\theta + H_n \sin n\theta) \equiv f(\theta) \to$$ بسط کامل سری فوریه

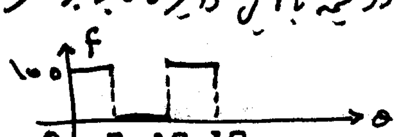
$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta \qquad G_n = \frac{1}{b^n.\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta \ , \ H_n = \frac{1}{b^n.\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta$$

مثال: مسئله پتانسیل فوق را برای $f(\theta)=\begin{cases} 0 & \pi<\theta<2\pi \\ 100 & 0<\theta<\pi \end{cases}$ حل کنید.

$$u(r,\theta) = 50 + \frac{200}{\pi}\sum_{n=1,3,5} \left(\frac{r}{b}\right)^n \frac{\sin n\theta}{n}$$



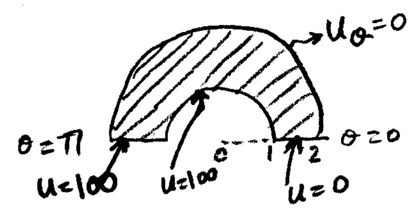
پتانسیل مرزی $f(\theta)$ برابر ۱۰۰ در نیمه بالای دایره و برابر صفر برای نیمه پایین دایره به این صورت



با قرار دادن $r=0$ در رابطه فوق u در وسط دیسک برابر E یعنی مقدار متوسط $f(\theta)$ می‌شود $f(\theta)$ در نیمه بالای محیط دایره برابر ۱۰۰ و در نیمه پایین برابر صفر است پس برای مقدار متوسط 50 است. با اطمینان می‌توان گفت که خط $u=50$ از مرکز دایره می‌گذرد.

$$\nabla^2 u=0 \qquad u(r,\pi)=u(r,\theta)=100 \;,\; u(r,0)=0 \;,\; u_\theta(2,\theta)=0 \qquad 1<r<2$$

$$u(r,\theta)=(A+B\ln r)(E+F\theta)+(Cr^{k}+Dr^{-k})(G\cos k\theta+H\sin k\theta) \qquad 0<\theta<\pi$$



$\sin k\pi = 0 \Rightarrow \sin n\pi$ $\boxed{k=n}$

$$u(r,\theta)=(A+B\ln r)\theta+(Cr^{k}+Dr^{-k})\sin k\theta$$

$$u(r,\pi)=(A+B\ln r)\pi+(Cr^{k}+Dr^{-k})\sin k\pi \equiv 100$$

$$B=0 \qquad A\pi=100 \qquad \boxed{A=\frac{100}{\pi}}$$

$$u_n(r,\pi)=\frac{100}{\pi}\theta+(C_n r^{n}+D_n r^{-n})\sin n\theta$$

$$u(r,\theta)=\sum u_n=\frac{100\theta}{\pi}+\sum (C_n r^{n}+D_n r^{-n})\sin n\theta$$

$$u(1,\theta)=\frac{100\theta}{\pi}+\sum (C_n+D_n)\sin n\theta=100$$ بسط نیم‌دامنه فرد

$$C_n+D_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}100\left(-\frac{\theta}{\pi}+1\right)\sin n\theta\, d\theta=\frac{200}{\pi}\left[\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)\left(\frac{-1}{n}\cos n\theta\right)-\left(-\frac{1}{\pi}\right)\left(\frac{-1}{n^2}\sin n\theta\right)\right]_0^{\pi}$$

$$C_n+D_n=\frac{200}{\pi}\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{200}{n\pi}$$

$$u_\theta(r,\theta)=\frac{100}{\pi}+\sum (C_n r^{n}+D_n r^{-n})\, n\cos n\theta$$

$$u_\theta(2,\theta)=\frac{100}{\pi}+\sum (C_n 2^{n}+D_n 2^{-n})\, n\cos n\theta \equiv 0$$

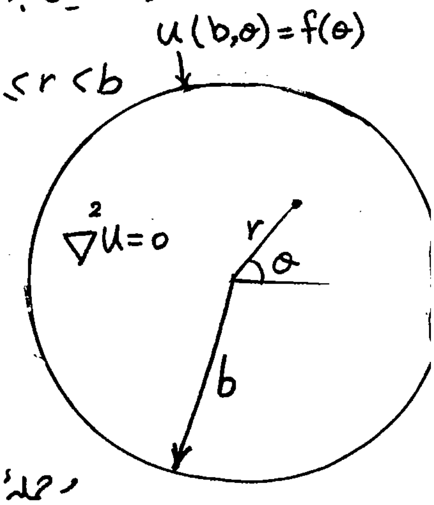
$$\sum (C_n 2^{n}+D_n 2^{-n})\, n\cos n\theta=-\frac{100}{\pi} \longrightarrow (C_n 2^{n}+D_n 2^{-n})\, n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}-\frac{100}{\pi}\cos n\theta\, d\theta=0$$

$$C_n 2^{n}+D_n 2^{-n}=0 \qquad \boxed{D_n=C_n 2^{2n}}$$

$$C_n+C_n 2^{2n}=\frac{200}{n\pi} \Rightarrow C_n=\frac{200}{n\pi(1+2^{2n})}$$

$$u(r,\theta)=\frac{100}{\pi}\theta+\sum_n\left(\frac{200}{n\pi(1+2^{2n})}r^{n}+\frac{200\times 2^{2n}}{n\pi(1+2^{2n})}r^{-n}\right)\sin n\theta$$

حل معادله پتانسیل برای سطح یک دایره کامل به روش جداسازی متغیرها - در دستگاه قطبی



$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \qquad -\infty < \theta < \infty \text{ و } 0 \le r < b$$

$$u(r,\theta) = (A + B\ln r)(E + F\theta) + (Cr^{K} + Dr^{-K})(G\cos K\theta + H\sin K\theta)$$

$$|u| < M : r \to 0 \quad \ln r \to \infty \Rightarrow B = 0, \ A = 1 \quad \text{و} \quad r^{-K} \to \infty \Rightarrow D = 0, \ C = 1$$

از آنجا که u با تغییرات θ دوره‌ای است یعنی $u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi)$

و جمله $F\theta$ برای $-\infty < \theta < \infty$ دوره‌ای نیست پس باید ضریب θ صفر شود

$$\Rightarrow F = 0$$

برای اینکه $\sin K\theta$ و $\cos K\theta$ در 2π دوره‌ای باشند باید مقادیر K تعیین شوند.

$$\cos K\theta \equiv \cos K(\theta + 2\pi) \to \cos K\theta \cos 2\pi K - \sin K\theta \sin 2\pi K \equiv \cos K\theta$$

$$\therefore \quad \cos 2K\pi = 1 \to K = 1, 2, 3, \dots \quad \text{و} \quad \sin 2K\pi = 0 \quad \to K = \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \dots$$

پس $\boxed{K = n}$

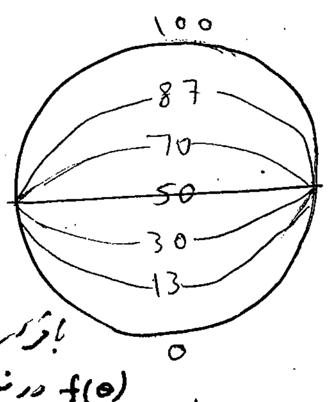
$$u(r,\theta) = E + \sum_n r^n (G_n \cos n\theta + H_n \sin n\theta) \qquad -\infty < \theta < +\infty \ , \ 0 \le r < b$$

$$u(b,\theta) = E + \sum_n b^n (G_n \cos n\theta + H_n \sin n\theta) \equiv f(\theta) \to$$ بسط کامل سری فوریه

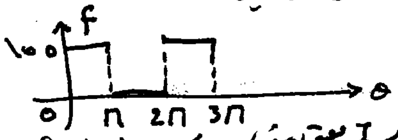
$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta \qquad G_n = \frac{1}{b^n \cdot \pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta \ , \ Q_n = \frac{1}{b^n \cdot \pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\,d\theta$$

مثال: مسئله پتانسیل فوق را برای
$$f(\theta) = \begin{cases} 0 & \pi < \theta < 2\pi \\ 100 & 0 < \theta < \pi \end{cases}$$
حل کنید.

$$u(r,\theta) = 50 + \frac{200}{\pi}\sum_{n=1,3,5} \left(\frac{r}{b}\right)^n \frac{\sin n\theta}{n}$$



پتانسیل مرزی $f(\theta)$ برابر ۱۰۰ در نیمه بالای دایره و برابر صفر برای نیمه پایین دایره به داپ صورت



با قرار دادن ۲۰۰ در رابطه فوق تا u در وسط دیسک برابر E یعنی مقدار متوسط $f(\theta)$ می‌شود

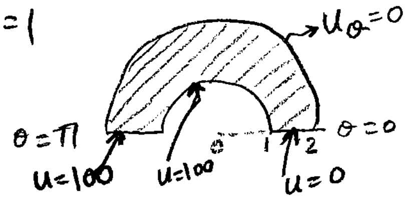
$f(\theta)$ در نیمه بالای محیط دایره برابر ۱۰۰ و در نیمه پایین برابر صفر است. با اطمینان می‌توان گفت که خط $u=50$ از مرکز دایره می‌گذرد. است با برابر مقدار متوسط 50

$\nabla^2 u = 0 \qquad u(r,\pi) = u(r,\theta) = 100 \ , \ u(r,0) = 0 \ , \ u_\theta(2,\theta) = 0 \qquad 1 < r < 2$

$0 < \theta < \pi$

$u(r,\theta) = (A + B\ln r)(E + F\theta) + (C r^{k} + D r^{-k})(G \cos k\theta + H \sin k\theta)$

$u(r,0) = (A + B\ln r)E + (\quad)(G) \equiv 0 \Rightarrow G = 0, H = 1, E = 0, F = 1$



$u(r,\theta) = (A + B\ln r)\theta + (C r^{k} + D r^{-k}) \sin k\theta$

$u(r,\pi) = (A + B\ln r)\pi + (C r^{k} + D r^{-k}) \sin k\pi \equiv 100 \longrightarrow \sin k\pi = 0 = \sin n\pi \quad \boxed{k = n}$

$B = 0 \qquad A\pi = 100 \qquad \boxed{A = \frac{100}{\pi}}$

$u_n(r,\pi) = \frac{100}{\pi}\theta + (C_n r^{n} + D_n r^{-n}) \sin n\theta$

$u(r,\theta) = \sum u_n = \frac{100\theta}{\pi} + \sum (C_n r^{n} + D_n r^{-n}) \sin n\theta$

$u(1,\theta) = \frac{100\theta}{\pi} + \sum (C_n + D_n) \sin n\theta = 100$ بسط نیم دامنه فرد

$C_n + D_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 100\left(-\frac{\theta}{\pi} + 1\right) \sin n\theta \, d\theta = \frac{200}{\pi}\left[\left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)\left(\frac{-1}{n}\cos n\theta\right) - \left(-\frac{1}{\pi}\right)\left(\frac{-1}{n^2}\sin n\theta\right)\right]_0^{\pi}$

$C_n + D_n = \frac{200}{\pi}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{200}{n\pi}$

$u_\theta(r,\theta) = \frac{100}{\pi} + \sum (C_n r^{n} + D_n r^{-n})\, n \cos n\theta$

$u_\theta(2,\theta) = \frac{100}{\pi} + \sum (C_n 2^{n} + D_n 2^{-n})\, n \cos n\theta \equiv 0$

$\sum (C_n 2^{n} + D_n 2^{-n})\, n \cos n\theta = -\frac{100}{\pi} \longrightarrow (C_n 2^{n} + D_n 2^{-n})\, n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{100}{\pi} \cos n\theta \, d\theta$

$= 0$

$C_n 2^{n} + D_n 2^{-n} = 0 \qquad \boxed{D_n = C_n 2^{2n}}$

$C_n + C_n 2^{2n} = \frac{200}{n\pi} \Rightarrow C_n = \frac{200}{n\pi(1 + 2^{2n})}$

$u(r,\theta) = \frac{100}{\pi}\theta + \sum_n \left(\frac{200}{n\pi(1 + 2^{2n})} r^{n} + \frac{200 \times 2^{2n}}{n\pi(1 + 2^{2n})} r^{-n}\right) \sin n\theta$

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \qquad 0<x<\infty, \quad 0<y<\infty \\ u(0,y)=0 \\ u(x,0)=e^{-x} \end{cases}$$

$$u = X(x)\cdot Y(y)$$

$$\left[X''\cdot Y + X Y'' = 0\right] \div X\cdot Y$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -K^2$$

$K=0 \qquad X(x) = ax+b$

$\qquad\qquad Y(y) = cy+d$

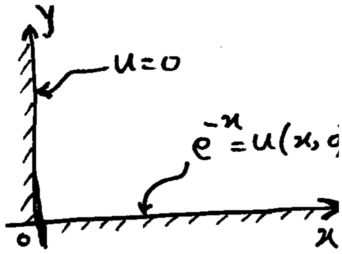
$K\neq 0 \qquad X(x) = A\cos Kx + B\sin Kx$

$$Y(y) = C e^{Ky} + D e^{-Ky}$$

شرط کرانه‌ای :

$a=0\ ,\ b=1$

$c=0\ ,\ d=0,\ D=1$



$$u(x,y) = d + (A\cos Kx + B\sin Kx)\cdot e^{-Ky}$$

$$u(0,y) = d + A e^{-Ky} \equiv 0 \longrightarrow \quad d=0 \quad , \quad A=0$$

$$u(x,y) = e^{-Ky}\cdot B\sin Kx$$

از آنجا که هیچ شرطی برای مقادیر K بدست نیامده پس K می‌تواند هر عدد حقیقی باشد و به ازای هر مقدار K ، یک مقدار برای B خواهیم داشت ، یعنی B تابعی است از K.

برای به دست آوردن یک u که نیرومند و کامل باشد.

$$u(x,y) = \int_0^\infty u(x,y;K)\,dK = \int_0^\infty B(K)\sin Kx\cdot e^{-Ky}\,dK$$

شرط آخر را اعمال می‌کنیم

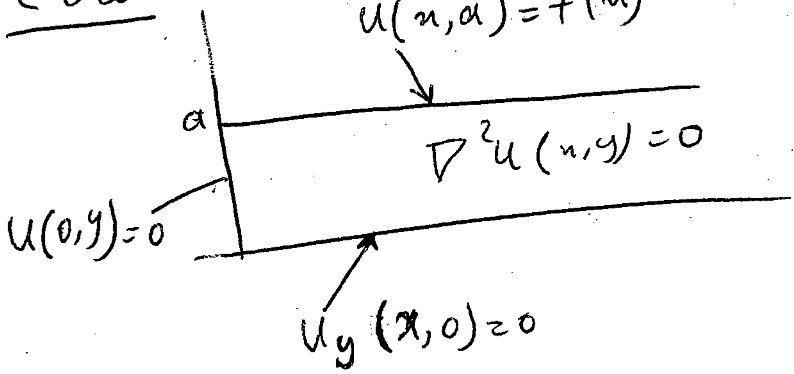
$$u(x,0) = \int_0^\infty B(K)\sin Kx\,dK \equiv e^{-x}$$

سمت چپ انتگرال فوریه تابع فرد e^{-x} است ، اگر فرض کنیم که این تابع نیمهٔ سمت چپ روی محور x را به طور فرضی به صورت تقارن فرد داشته باشد.

پس

$$B(K) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\sin Kx\,dx$$

مثال ٤



$$u(x,y)=\int_0^\infty D(p)\sin px \cosh py \, dp$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad u=X.Y \qquad \left[X''.Y+Y''.X=0\right]\div XY$$

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=0 \qquad \frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-K^2$$

دیس

حل مثال روی متغیرها با بر باشد

$K=0$

$$\begin{cases} X=Ax+B \\ Y=cy+D \end{cases}$$

$K\neq 0$

$$\begin{cases} X=E\cos Kx+F\sin Kx \\ Y=G\cosh ky+H\sinh ky \end{cases}$$

$$u(x,y)=(Ax+B)(cy+D)+(E\cos Kx+F\sin Kx)(G\cosh ky+H\sinh ky)$$

$$u(0,y)=B(cy+D)+E(G\cosh ky+H\sinh ky)\equiv 0 \rightarrow B=0,\ E=0$$

$$u(x,y)=x(cy+D)+\sin Kx(G\cosh ky+H\sinh ky)$$

$$u_y(x,y)=cx+\sin Kx(G.K.\sinh ky+H.K.\cosh ky)$$

$$u_y(x,0)=cx+\sin Kx(H.K)=0 \qquad c=0,\ H=0$$

$$u(x,y,k)=Dx+\sin Kx(G\cosh ky) \rightarrow u(x,y)=Dx+\int_0^\infty(\sin kx \cosh ky)G(k)\,dk$$

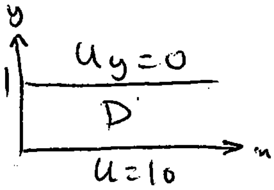
$$u(x,a)=Dx+\int_0^\infty \sin kx\,(G(k)\cosh ka)\,dk=f(x) \rightarrow D=0$$

$$\boxed{G(k)\cosh ka=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin kx.f(x)\,dx}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin kx\, f(x)\,dx$$

$f(x) \longrightarrow$ فرد - فرض

$$u(x,y)=\int_0^\infty G(k)\sin kx\cosh ky\,dk$$

20.2
10(a) $\nabla^2 u = 0$, $0 < x < \infty$



در نظر می گیریم که سری فوریه روی لبه $(x=0)$ محور قرار دارد پس

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = K^2$$

$$u(x,y) = (A+Bx)(C+Dy) + (Ee^{Kx} + Fe^{-Kx})(G\cos Ky + H\sin Ky)$$

u کراندار است پس $x \to \infty$ باید $\to B = E = 0$

$$u(x,y) = C + Dy + e^{-Kx}(G\cos Ky + H\sin Ky)$$

$$u(x,0) = 10 = c + e^{-Kx}\cdot G \longrightarrow c = 10 \ , G = 0$$

$$u(x,y) = 10 + Dy + He^{-Kx}\sin Ky$$

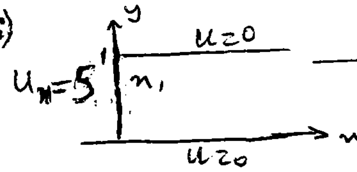
$$u_y(x,1) = D + KHe^{-Kx}\cos K = 0 \longrightarrow D = 0 \ , \cos K = 0 = \cos\frac{n\pi}{2} \quad K = \frac{n\pi}{2} \ (n \text{ فرد})$$

$$u(x,y) = 10 + \sum_{n \text{ فرد}} H_n e^{-n\pi x/2} \sin\frac{n\pi y}{2}$$

$$u(0,y) = 0 = 10 + \sum H_n \sin\frac{n\pi y}{2} \ , \quad -10 = \sum H_n \sin\frac{n\pi}{2}y \quad 0<y<1$$

QRS: $H_n = 2\int_0^1 (-10)\sin\frac{n\pi y}{2}\,dy = -\frac{40}{n\pi} \to u(x,y) = 10 - \frac{40}{\pi}\sum_{n \text{ فرد}} \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi y}{2} e^{-\frac{n\pi x}{2}}$

(c)



$$u(x,y) = (A+Bx)(C+Dy) + (Ee^{Kx} + Fe^{-Kx})(G\cos Ky + H\sin Ky)$$

$x \to \infty$ $u \to$ کراندار $\to B = 0 \ , E = 0$

$$u(x,y) = C + Dy + e^{-Kx}(G\cos Ky + H\sin Ky)$$

$$u(x,0) = C + Ge^{-Kx} = 0 \longrightarrow C = 0 \quad G = 0$$

$$u(x,y) = Dy + He^{-Kx}\sin Ky \ , \quad u(x,1) = D + He^{-Kx}\sin K = 0 \to D = 0$$

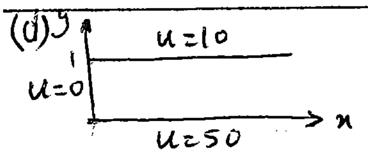
$\sin K = 0 = \sin n\pi$ $\boxed{K = n\pi}$

$$u(x,y) = \sum_1^\infty H_n e^{-n\pi x}\sin n\pi y \ , \quad u_x(0,y) = \sum H_n(-n\pi)\sin n\pi y = 5 \quad 0<y<1$$

$$-n\pi H_n = \frac{2}{1}\int_0^1 5\sin n\pi y\,dy \ , \quad H_n = \frac{10}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = -20/n^2\pi^2 \ (n \text{ فرد})$$

$$u(x,y) = -\frac{20}{\pi^2}\sum_{\text{فرد}}^\infty \frac{1}{n^2} e^{-n\pi x}\sin n\pi y$$

(d)



$$u(x,y) = (A+Bx)(C+Dy) + (Ee^{Kx} + Fe^{-Kx})(G\cos Ky + H\sin Ky)$$

$x \to \infty$ $u \to$ کراندار $|u| \to M \to B = 0, E = 0$

$$u(x,y) = C + Dy + e^{-Kx}(G\cos Ky + H\sin Ky)$$

$$u(x,0) = 50 = C + e^{-Kx}G \longrightarrow \boxed{C = 50} \quad \boxed{G = 0} \ , u(x,y) = 50 + Dy + He^{-Kx}\sin Ky$$

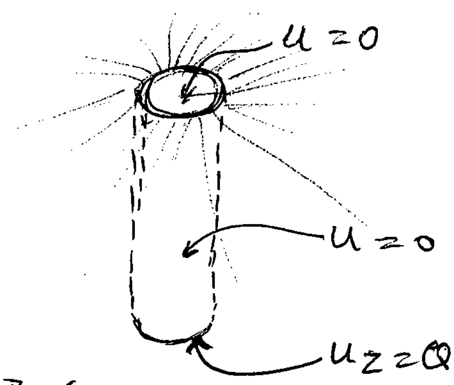
$$u(x,1) = 10 = 50 + D + He^{-Kx}\sin K \quad \boxed{D = -40} \ , \boxed{K = n\pi} \quad n = 1,2,3\cdots$$

$$u(x,y) = 50 - 40y + \sum_1^\infty H_n e^{-n\pi x}\sin n\pi y$$

$$u(0,y) = 0 = 50 - 4y + \sum_n H_n \sin n\pi y \ , \quad 40y - 50 = \sum H_n \sin n\pi y$$

$$H_n = \frac{2}{1}\int_0^1 (40y - 50)\sin n\pi y\,dy = \frac{20}{n\pi}[(-1)^n - 5]$$

$$u_z(r,0) = Q$$
$$u(c,z) = 0$$
$$u(r,l) = 0$$



$$u(r,\theta) = (A + B\ln r)(E + Fz) + [C J_0(kr) + D Y_0(kr)](G\cosh kz + \sinh kz)$$

$r \to 0 \quad \ln r \to \infty \quad B = 0 \quad A = 1$

$$u(r,\theta) = E + Fz + [C J_0 + D Y_0](G\cosh kz + H\sinh kz)$$
$$u(c,z) = E + Fz + [C J_0(kc) + D Y_0(kc)](G\cosh kz + H\sinh kz) \equiv 0$$

$E = F = 0 \qquad J_0(kc) = J_0(\alpha_n) \qquad \boxed{k = \frac{\alpha_n}{c}} \qquad D = 0$

$C = 1$

$$u(r,z) = \sum_n J_0\left(\frac{\alpha_n}{c} r\right)\left[G_n \cosh\left(\frac{\alpha_n}{c} z\right) + H_n \sinh\left(\frac{\alpha_n}{c} z\right)\right]$$
$$u(r,L) = \sum_n J_0\left(\frac{\alpha_n}{c} r\right)\left[G_n \cosh\left(\frac{\alpha_n}{c} L\right) + H_n \sinh\left(\frac{\alpha_n}{c} L\right)\right] \equiv 0$$
$$G_n \cosh\left(\frac{\alpha_n}{c} L\right) + H_n \sinh\left(\frac{\alpha_n}{c} L\right) = 0 \text{ -------- } (1)$$
$$u_z(r,z) = \sum J_0(kr)\left[G_n \frac{\alpha_n}{c} \sinh\left(\frac{\alpha_n}{c} z\right) + H_n \frac{\alpha_n}{c} \cosh\left(\frac{\alpha_n}{c} z\right)\right]$$
$$u_z(r,0) = \sum J_0(kr)\left[G_n \cancel{\sinh(0)} + H \frac{\alpha_n}{c}\right] = Q \text{ -------- } (2)$$
$$H_n = \frac{\langle J_0, Q \rangle}{\langle J_0, J_0 \rangle} \times \frac{c}{\alpha_n} \text{ ---- } (3) \leftarrow (2) \text{ از}$$

با داشتن H_n ها از رابطه ① به G_n های رسیم

$$G_n = -\frac{c}{\alpha} \cdot \frac{\langle J_0, Q \rangle}{\langle J_0, J_0 \rangle} \cdot \frac{\sinh\left(\frac{\alpha_n}{c} l\right)}{\cosh\left(\frac{\alpha_n}{c} l\right)}$$

$u_z(r,0)=Q \qquad u(c,z)=0 \qquad u(r,\ell)=0$

روی بدنه استوانه

$$u(r,\theta)=(A\ln r+B)(C+Dz)+(EJ_0+FY_0)(G\,e^{kz}+H\,e^{-kz})$$

$r\to 0 \quad \ln r\to\infty \quad Y_0\to\infty \Rightarrow A=0,\ B=1,\ F=0,\ E=1$

$$u(r,z)=C+Dz+J_0(G\,e^{kz}+H\,e^{-kz})$$

$$u(c,z)=C+Dz+J_0(kc)(\qquad\qquad)\equiv 0$$

$C=D=0 \qquad J_0(kc)=0=J_0(\alpha_n)\Rightarrow \boxed{k_n=\dfrac{\alpha_n}{c}}$

$$u(r,z)=\sum J_0\left(\frac{\alpha_n}{c}r\right)(G_n\,e^{kz}+H\,e^{-kz})$$

$$u(r,\ell)=\sum J_0(G_n\,e^{k\ell}+H_n e^{-k\ell})\equiv 0$$

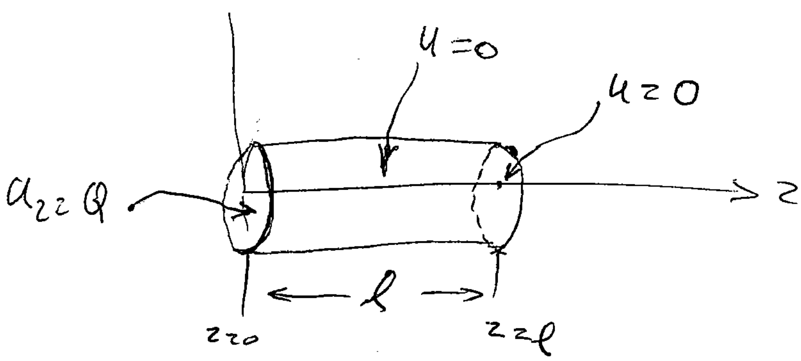
$$u_z(r,z)=\sum J_0(kG_n\,e^{kz}-H_n k\,e^{-kz})$$

$$u_z(r,0)=\sum J_0 k(G_n+H_n)=Q$$

$$\begin{cases} k(G_n+H_n)=\dfrac{\langle Q,J_0\rangle}{\langle J_0,J_0\rangle} \\ G_n e^{k\ell}+H_n e^{-k\ell}=0 \end{cases}$$

شرط مرزی = ۰ را اول قرار دهیم

سپس مرز $u_z=50$ را



کوئیز ۶ ۱۰/۲/۸۴ معادله پتانسیل گروه الف

معادله پتانسیل $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+u_{zz}=0$ را برای شرایط مرزی $u(r,0)=0, u(a,z)=25\sin(\frac{3z}{2})$ و $a\le r<\infty$ و $0<z<\infty$

جواب عمومی یکی از دو حالت زیر است که باید یکی را انتخاب کرده و مسئله را حل کنید:

$$u(r,z)=(A+B\ln r)(C+Dz)+(EI_0(kr)+FK_0(kr))(G\cos kz+H\sin kz)$$

یا

$$u(r,z)=(A+B\ln r)(C+Dz)+(EJ_0(kr)+FY_0(kr))(G\cosh kz+H\sinh kz)$$

جواب آخر را به صورت تابع r و z بنویسید:

حل:

از آنجا که تابع در مرز $u(a,z)$ به صورت تابع z تعریف شده، حل مسئله روی z تابل تبدیل است یعنی حل اول

$$u(r,z)=(A+B\ln r)(C+Dz)+(EI_0(kr)+FK_0(kr))(G\cos kz+H\sin kz)$$

$z\to\infty \quad D=0 \quad C=1 \qquad r\to\infty \quad K_0(kr)\to 0 \quad E=1$

$$u(r,z)=A+B\ln r+I_0(kr)(G\cos kz+H\sin kz)$$

$$u(r,0)=A+B\ln r+I_0(kr)\cdot G\equiv 0 \longrightarrow G=0,\ A=B=0$$

$$u(r,z)=H\cdot\sin kz\, I_0(kr)$$

$$u(a,z)=H I_0(k\cdot a)\sin kz\equiv 25\sin\frac{3z}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{K=\frac{3}{2}} \qquad H I_0\left(\frac{3a}{2}\right)=25 \qquad \boxed{H=\frac{25}{I_0(3a/2)}}$$

$$u(r,z)=\frac{25}{I_0(3a/2)}\, I_0\left(\frac{3}{2}r\right)\sin\frac{3z}{2}$$