Mapping — نگاشت

توابع خطی

- $W = Az \qquad A = a e^{i\alpha} \qquad z = r e^{i\theta}$

$$W = ar\, e^{i(\alpha+\theta)}$$

گسترش دامنه به اندازهٔ a برابر و چرخش به اندازهٔ α درجه

- $W = z + B \qquad z = x + iy \qquad B = b_1 + i b_2$

$$w = \underbrace{x+b_1}_{u} + i\,(\underbrace{y+b_2}_{v}) \qquad u = x + b_1 \qquad v = y + b_2$$

انتقال در جهت x و y

- $W = Az + B$ linear shift انتقال خطی

$$Z = Az \longrightarrow W = Z + B$$

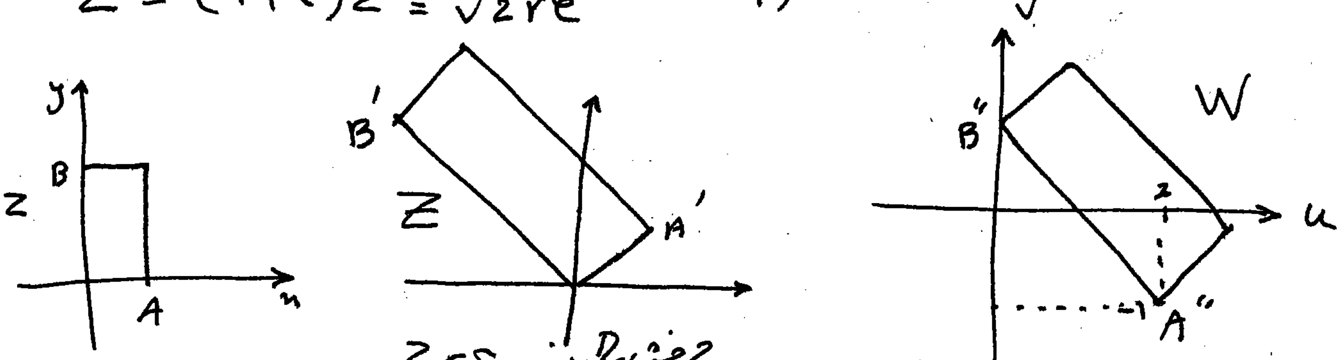
گسترش و چرخش در صفحه Z

انتقال (صفحه Z) به اندازهٔ B در صفحه W

مثال

$$w = (1+i)z + 2 - i$$

$$Z = (1+i)z = \sqrt{2}\, r e^{i(\theta + \pi/4)}$$



چرخش $\pi/4$ نسبت به z

گسترش به اندازهٔ $\sqrt{2}$ برابر

تابع $W = \frac{1}{z}$

$$w = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \qquad z = r e^{i\theta}$$

دایرهٔ $|z| = 1$ را در نظر بگیرید. نقاط داخل دایره با این نگاشت به بیرون دایره و نقاط نیم صفحهٔ بالایی به نیم صفحهٔ پایینی انتقال پیدا می‌کنند.

$$w = \rho e^{i\phi} \qquad \boxed{\rho = \frac{1}{r}} \qquad \boxed{\phi = -\theta}$$

در جهت عکس در صفحه W

و نقطه‌های دایره روی خود دایره تصویر می‌شود.

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2} \longrightarrow u=\frac{x}{x^2+y^2} \quad , \quad v=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

دایرهٔ $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$ را در نظر بگیرید.

- اگر $a=0$ باشد این دایره به یک خط تبدیل می‌شود

- با استفاده از روابط u و v فوق رابطه زیر به دست می‌آید.

تصویر دایره فوق در صفحه w:

$$d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$$

این معادله نیز نشان دهندهٔ معادلهٔ دایره است به شرطی که $d\neq 0$ باشد

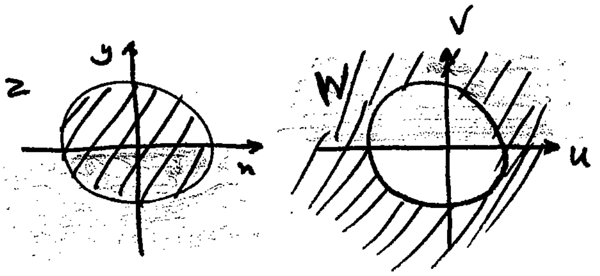
اگر $d=0$ باشد دایره به خط تبدیل می‌شود.

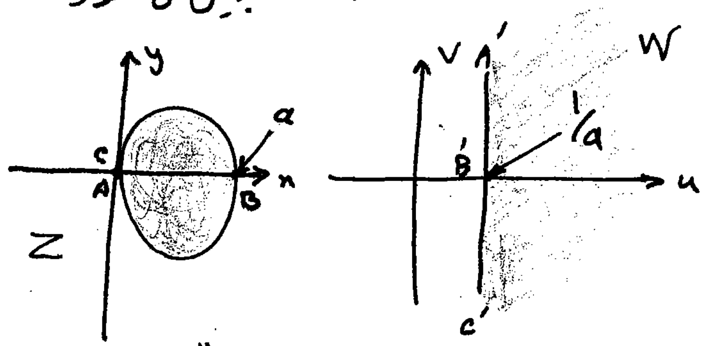
الف: یک دایره ناگذرا از مبدأ $a\neq 0$ و $d\neq 0$ در صفحه z به یک دایره ناگذرا در صفحه w تبدیل می‌شود.

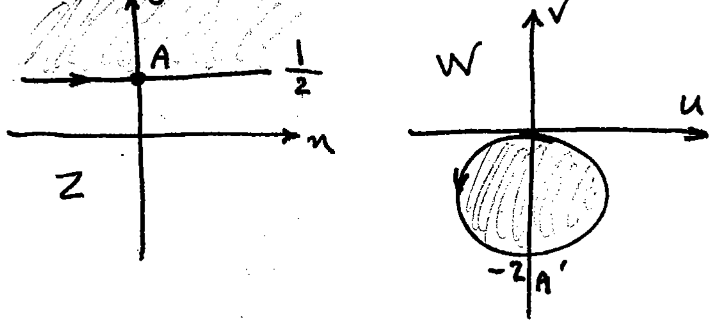
ب: یک دایرهٔ $a\neq 0$ گذرا از مبدأ $d=0$ در صفحه z به یک خط ناگذرا از مبدأ در صفحه w تبدیل می‌شود.

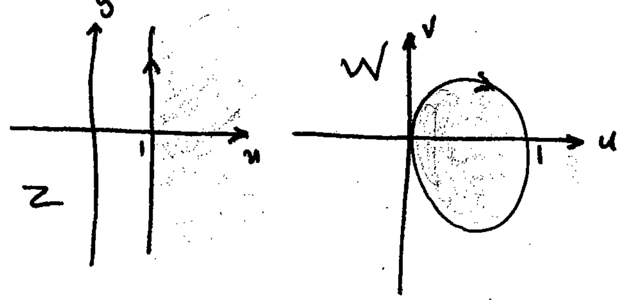
ج: یک خط ناگذرا از مبدأ $d\neq 0$ و $a=0$ در صفحه z به یک دایرهٔ گذرا از مبدأ در صفحه w تبدیل می‌شود.

د: یک خط $a=0$ گذرا از مبدأ $d=0$ در صفحه z به یک خط گذرا از مبدأ در صفحه w تبدیل می‌شود.





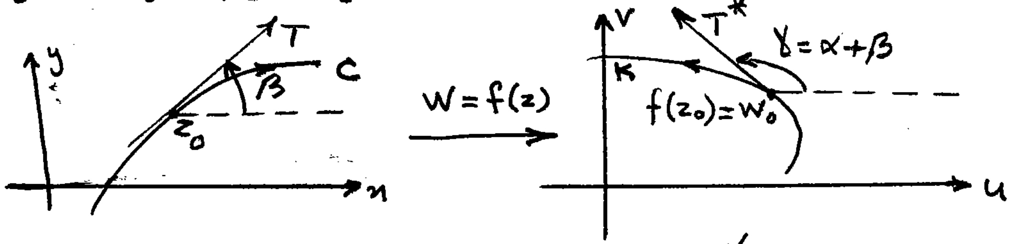




ویژگی اصلی نگاشت تطبیقی .

فرض $f(z)$ در حوزهٔ D تحلیلی باشد و فرض کنید z_0 یک نقطه در D باشد، اگر $f'(z_0)\neq 0$ باشد آنگاه $f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\eta(z)(z-z_0)$ و $z\to z_0$ ، $\eta(z)\to 0$

اگر z نزدیک z_0 شود، پس $w=f(z)$ یک تقریب خطی شکل $S(z)=A+B(z-z_0)$ خواهد شد، که در آن $A=f(z_0)$ و $B=f'(z_0)$ است. چون $\eta(z)\to 0$ با $z\to z_0$ پس $w=f(z)$ اثری درست شکل $w=S(z)$ خواهد داشت. یعنی چرخشی مساوی $\alpha=Arg\, f'(z_0)$ در صفحه و بزرگنمائی به اندازهٔ $|f'(z_0)|$ که به دنبال آن یک انتقال به اندازهٔ بردار $A=f(z_0)$. پس نتیجه می شود که نگاشت $W=S(z)$ در z_0 زاویه را تغییر نمی دهد، به عبارتی زاویه نگه دارنده است. پس $w=f(z)$ نیز زاویه را در z_0 نگه می دارد.



نگاشت $w=f(z)$ گفته می شود تطبیقی یا زاویه نگه دارنده.

× قضیه نگاشت تطبیقی: فرض کنید $f(z)$ در حوزهٔ D تحلیلی باشد و فرض کنید z_0 داخل D باشد. اگر $f'(z_0)\neq 0$ بود آنگاه $f(z)$ در z_0 تطبیقی است.

به عبارت دیگر زاویه تلاقی دو منحنی در صفحه z (در نقطه z_0) در صفحه w تغییر نمی کند.

اگر $f'(z_0)=0$ باشد آنگاه z_0 را نقطهٔ بحرانی $f(z)$ می نامند و نگاشت $W=f(z)$ در z_0 زاویه ثابت ندارد.

× قضیه: فرض $f(z)$ در z_0 تطبیقی است، اگر $f'(z_0)=0,\ f''(z_0)=0,\ \dots,\ f^{(K-1)}(z_0)=0$ و $f^{(K)}(z_0)\neq 0$ بود آنگاه نگاشت $w=f(z)$ زوایا را در رأس z_0 به اندازهٔ K برابر بزرگ می کند.

× قضیه: وجود دارد یک نگاشت دو خطی که سه نقطهٔ z_1 ، z_2 و z_3 را به سه نقطه متمایز w_1 ، w_2 و w_3 (به ترتیب) تبدیل کند. به نحوی که در رابطه زیر صادق باشد.

$$\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}=\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}$$

نقطهٔ ثابت تبدیل $w=f(z)$ ، نقطه‌ای است که جای آن در صفحه z و w تغییر نمی‌کند یعنی $f(z_0)=z_0$

مثلاً : $f(z)=\frac{1}{z-1}$ نقطه ثابت آن از رابطه

$f(z_0)=\frac{1}{z_0-1}=z_0$ بدست می‌آید

$$z_0^2-z_0-1=0 \qquad z_0=\frac{+1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

دو نقطه ثابت دارد.

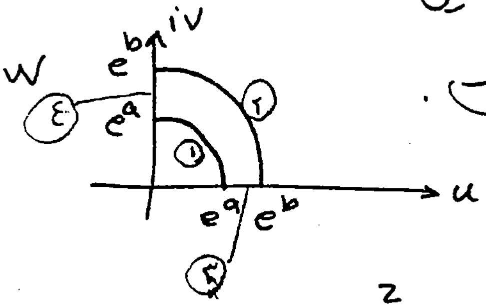
نگاشتی که مقدار زاویه را نگه می‌دارد (ولی نه لزوماً جهت) را، نگاشت isogonal می‌نامند.

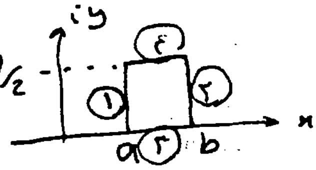
مثال: نگاشت $w=\bar{z}$ که انعکاس روی محور حقیقی است یک نگاشت isogonal است (نه تطبیقی). اگر این نگاشت با یک نگاشت تطبیقی دنبال شود، نتیجه نهائی isogonal خواهد ماند.

* اگر نقطه z_0 نقطه بحران نگاشت $w=f(z)$ باشد، عدد صحیح بزرگتر از یک وجود دارد که زاویه بین دو کمان ساده که از z_0 می‌گذرند تحت آن نگاشت در m ضرب می‌شود، که عدد صحیح m کوچکترین عدد صحیح است که $f^{(m)}(z_0)\neq 0$ باشد.

حل hw10

نشان دهید برد R تابع e^z روی مستطیل $a<x<b$ و $0<y<\pi/2$ مانند شکل مقابل است.





$$W=e^z=e^x\cdot e^{iy} \equiv \rho e^{i\theta}$$

$$\rho=e^x \qquad y=\theta$$

(۱) لبهٔ $x=a$ $\quad 0<y<\pi/2 \longrightarrow \rho=e^a \quad 0<\theta<\pi/2 \rightarrow$ قوس ربع دایره

(۲) لبهٔ $x=b$ $\quad 0<y<\pi/2 \longrightarrow \rho=e^b \quad 0<\theta<\pi/2$

(۳) لبهٔ $a<x<b$ $\quad y=0 \longrightarrow e^a<\rho<e^b \quad \theta=0$ خط راست

(۴) لبهٔ $a<x<b$ $\quad y=\pi/2 \longrightarrow e^a<\rho<e^b \quad \theta=\pi/2$ خط راست

هر جا با دایره سروکار داشتید از مختصات قطبی استفاده کنید.

۱- مجموعه‌های زیر را روی شکل مشخص کنید.

الف $|z+2-i|<2$

ب $|z|<|z-4|$ $\qquad 2\le|z+i|\le 5$

ج $Re(z-i)>3$

د $Im(z+i)<2$

۲- برد توابع زیر را به دست آورید.

الف $W(z)=z+2+i \xrightarrow{\text{روی}} 0<x<1$ و $0<y<1$

ب $W(z)=i+3 \xrightarrow{\text{روی}} 0<x<\infty$ و $0<y<\infty$

ج $W(z)=z^3 \xrightarrow{\text{روی}} 0<x<\infty$ و $0<y<\infty$

۳- نشان دهید آیا $\overline{e^z}=e^{\bar z}$

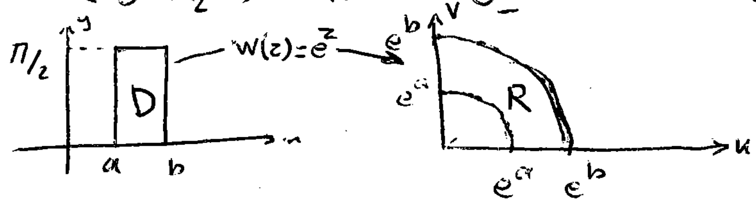
۴- نشان دهید $\cosh(x+iy)=\cosh x\cos y+i\sinh y\sin y$

۵- مقدار $\csc(1-i)$ را به صورت دکارتی استاندارد به دست آورید. $(a+ib)$

۶- معادلهٔ $e^z=1$ را حل کنید.

۷- معادله $e^{3z}=1$ را حل کنید.

۸- نشان دهید برد R برای تابع e^z روی مستطیل $a<x<b$ و $0<y<\frac{\pi}{2}$ مانند شکل است.



۹- به کمک روش مختلط حساب کنید.

الف $\int_0^\infty e^{-x}\sin wx\,dx$ $\qquad$ ب $\int_0^\infty e^{-st}\cos wt\,dt \quad (Res>0)$

۱۰- جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را به کمک روش مختلط به دست آورید.

الف $mx''+cx'+kx=F\sin wt$

ب $x'+3x=20\cos 5t$

ج $x''+x'=100\sin 5t$

د $x''''-x'''+x''-x'+x=25\cos 3t$

ه $x'''-x'+5x=20\cos 2t$

گروه الف　　　　　۸۴/۲/۳۱　　　　　کوئیز ۷

۱- معین کنید تابع u همساز است یا خیر، اگر همساز است در چه ناحیه‌ای؟ در صورت همساز بودن تابع مزدوج آن را به دست آورید.

$$u = r^2 \cos 2\theta + 4$$

$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$: شرط (هارمونیک) همساز بودن تابع u

$u_r = 2r\cos 2\theta \qquad u_{rr} = 2\cos 2\theta \qquad u_\theta = -2r^2 \sin 2\theta \qquad u_{\theta\theta} = -4r^2\cos 2\theta$

$r^2 \cdot 2\cos 2\theta + r \cdot 2r\cos 2\theta - 4r^2 \cos 2\theta = 0$ ✓ صادق است

پس u هارمونیک است

$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \quad , \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$

$2r\cos 2\theta = \frac{1}{r} v_\theta \rightarrow v_\theta = 2r^2 \cos 2\theta \rightarrow v = r^2 \sin 2\theta + f(r)$

$v_r = 2r \sin 2\theta + f'(r) = \frac{-1}{r}(-2r^2 \sin 2\theta) \qquad f'(r) = 0 \rightarrow f(r) = C$

$$\boxed{v(r,\theta) = r^2 \sin 2\theta + C}$$

۲- همه مقادیر z^i به ازای $z=-2-2i$ را به دست آورید. می‌دانیم که

$z^c = \exp[\log z^c] = \exp c \log z \qquad c =$ یک عدد مختلط

$z^i = \exp \log z^i = \exp i\,(\ln r + i(\theta + 2n\pi))$

$z = -2-2i = 2e^{i(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi)} \rightarrow z^i = \exp i\left(\ln 2 + i\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right)\right)$

$z^i = \exp(i \ln 2) \cdot \exp^{-\frac{5\pi}{4} - 2n\pi}$

مثال‌های حل شده بخش نگاشت

۱- تبدیل $w=\frac{az+b}{cz+d}$ که نقاط $z=1, i, -1$ را به ترتیب به نقاط $w=i, 0, -i$ تبدیل می‌کند ناحیه $|z|<1$ را به چه ناحیه‌ای تبدیل می‌کند.

$$\frac{w-i}{w+i}\cdot\frac{0+i}{0-i}=\frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{i+1}{i-1}$$

$$z=\frac{(1-i)}{(1+i)}\cdot\frac{w-1}{w+1} \qquad |z|<1 \to \left|\frac{w-1}{w+1}\right|<1 \longrightarrow u>0$$

۲- تصویر $\{z: |z-1|<1 \ , \ \operatorname{Im} z>0\}$ تحت تبدیل $w=\frac{z}{z-2}$ کدام است؟

$$z-1=\frac{w+1}{w-1} \qquad |z-1|=\left|\frac{w+1}{w-1}\right|<1 \longrightarrow u<0$$

$$\operatorname{Im} z>0 \to \operatorname{Im}\left(\frac{2w}{w-1}\right)>0 \longrightarrow -v>0 \quad v<0$$

پس اشتراک $u<0$ و $v<0$ جواب است یعنی ربع سوم.

۳- تبدیل ناحیه محصور بین $|z-1|=1$ و $|z-i|=1$ توسط $w=\frac{1}{z}$ را بدست آورید.

$$z=\frac{1}{w} \to z-1=\frac{1-w}{w} \qquad |z-1|=\left|\frac{1-w}{w}\right|<1 \longrightarrow u>\frac{1}{2}$$

جواب

$$z-i=\frac{i-w}{w} \to \left|\frac{1-iw}{w}\right|<1 \longrightarrow v<-\frac{1}{2}$$

۴- تبدیل دوخطی بیابید که $z=[0,1]$ را روی محور حقیقی مثبت نگاشت کند.

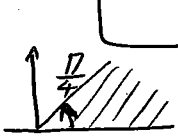
$z=1 \to w=\infty$ و $z=0 \to w=0$

$$\frac{(w-0)(\infty-w_3)}{(w-w_3)(\infty-0)}=\frac{(z-0)(1-z_3)}{(z-z_3)(1-0)}=\frac{-z(z_3-1)}{z-z_3}$$

$$\frac{w}{w-w_3}=\frac{-z(z_3+1)}{z-z_3} \longrightarrow \frac{w}{w_3}=\frac{-z(z_3+1)}{-(z-z_3)-z(z_3-1)}$$

$$w=\frac{+(z_3-1)w_3}{z_3}\cdot\frac{z}{z-1} \ , \quad K=\frac{(z_3-1)w_3}{z_3} \longrightarrow \boxed{w=K\frac{z}{z-1}}$$

جواب

۵- نگاشت ناحیه  $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ تحت تبدیل $w=\frac{-i}{z^2}$ می‌شود.

$$z=re^{i\theta} , \ w=\frac{-i}{z^2} \longrightarrow w=-i\frac{1}{r^2}e^{-2i\theta} \to w=\frac{1}{r^2}e^{i(\frac{3\pi}{2}-2\theta)} \Longrightarrow \pi<\cancel{\theta}<\frac{3\pi}{2}$$

۶- مکان هندسی نقاطی از صفحه z که در آن قطعه خط‌های بی‌نهایت کوچک تحت تبدیل خطی کسری $w=\frac{az+b}{cz+d}$ $(c\neq0$, $ad-bc\neq0)$ دوران نمی‌کند را بیابید.

شرط دوران نکردن $\arg\left(\frac{dw}{dz}\right)=0$ باید باشد.

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\overbrace{ad-bc}^{A}}{(cz+d)^2} \to \arg\left(\frac{dw}{dz}\right)=0 \qquad \arg(A)-\arg(cz+d)^2=0$$

$\arg(cz+d)=$ ثابت $\Longrightarrow$ این مکان هندسی یک خط راست است

۷ - نگاشت $W=-\cos z$ ناحیه نیم نوار $\{y\geq 0 , \frac{\pi}{2}\leq x\leq \pi\}$ از صفحه z را به چه ناحیه در صفحه W تبدیل می کند.

$W=-(\cos x\cosh y+i\sin x\sinh y)$

$u=-\cos x\cosh y$

$V=-\sin x\sinh y$

$AB \to x=\frac{\pi}{2} , 0<y<\infty \to u=0 , V=\sinh y$

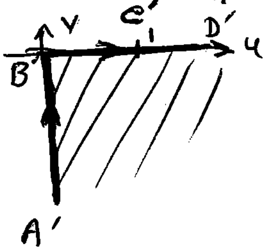
در محور V از پایین به بالا

$BC \to y=0 , \frac{\pi}{2}<x<\pi \to 0<u<1 , V=0$

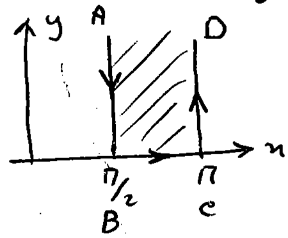
در محور u از چپ به راست

$CD \to x=\pi \quad 0<y<\infty \to u=\cosh y , V=0$

در محور u از چپ به راست از نقطه ۱ تا ∞



جواب: ربع چهارم به گونه‌ای که نشان داده می شود

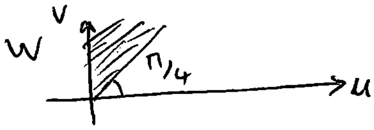


۸ - ناحیه $0\leq \arg z\leq \frac{\pi}{4}$ را تحت نگاشت $W=\frac{i}{z}$ بیابید.

$z=\frac{i}{W} \longrightarrow \arg(z)=\arg(\frac{i}{W})=\arg(i)-\arg(W)=\frac{\pi}{2}-\arg(w)$

$0\leq\arg(z)\leq\frac{\pi}{4} \longrightarrow 0\leq\frac{\pi}{2}-\arg(w)\leq\frac{\pi}{4} => -\frac{\pi}{2}\leq-\arg(w)\leq\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{2}\geq\arg(w)\geq\frac{\pi}{4}$

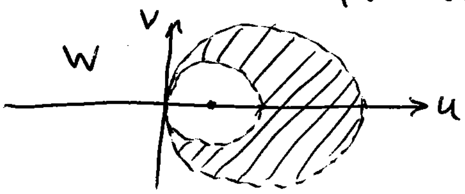


۹ - نگاشت ناحیه $1<Re(z)<2$ را توسط $W=\frac{1}{z}$ بیابید.

$z=\frac{1}{w}=\frac{u}{u^2+v^2}-i\frac{v}{v^2+u^2} \qquad Re(z)=\frac{u}{u^2+v^2} \qquad \frac{u}{u^2+v^2}<2 =>$

$2(u^2+v^2)-u>0 \longrightarrow (u-\frac{1}{4})^2+v^2>(\frac{1}{4})^2 \longrightarrow$ نقاط بیرون دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{4} , 0)$ و به شعاع $\frac{1}{4}$

$\frac{u}{u^2+v^2}>1 \longrightarrow u^2+v^2-u<0 \longrightarrow (u-\frac{1}{2})^2+v^2<(\frac{1}{2})^2$ نقاط داخل دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$ و به مرکز $\frac{1}{2}$ و ۰



جواب: اشتراک این دو مجموعه

۱۰ - نگاشت مجموعه $Re\, z\geq 0$ را توسط $W=\frac{z-1}{z+1}$ بیابید.

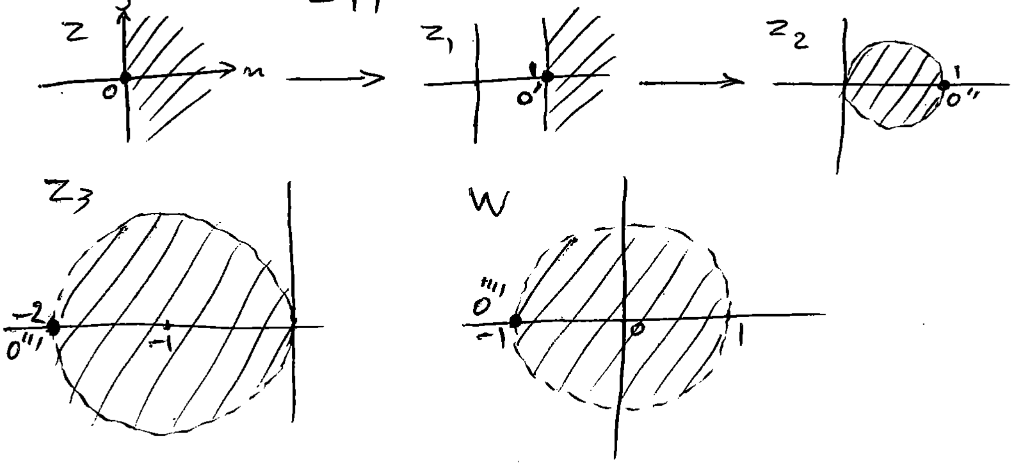
$W=1-\frac{2}{z+1}$

$z_1=z+1$

$z_2=\frac{1}{z_1}$

$z_3=-2\cdot z_2$

$W=1+z_3$



مسائل حل شده

۱۱- دو نقطه ثابت تبدیل دو خطی (بجز $w=z$) را بیابید.

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=z \longrightarrow \quad cz^2+dz=az+b \qquad cz^2+(d-a)z-b=0$$

$$z=\frac{-(d-a)\pm\sqrt{(d-a)^2+4cb}}{2c}$$

از آنجائیکه z به دو جواب رسید پس تبدیل دوخطی همواره دو نقطه ثابت دارد.

۱۲- دو نقطه ثابت $w=\frac{z-1}{z+1}$ و $w=\frac{6z-9}{z}$ را بدست آورید.

$$w=\frac{z-1}{z+1}=z \qquad \cancel{z}-1=z^2+\cancel{z} \qquad \boxed{z=\pm i}$$

$$w=\frac{6z-9}{z}=z \qquad 6z-9=z^2 \qquad z^2-6z+9=0 \qquad z=3\pm\sqrt{9-9}=3$$

یک جواب مضاعف دارد.

۱۳- آیا نگاشت های زیر در $z=0$ همدیس اند؟ شرط همدیسی ۱- در z تحلیلی باشد ۲- در z مشتق صفر نشود.

a) $e^z \ \forall z$ ، تحلیلی است $\qquad w'=e^z\big|_{z=0}=1\neq 0$ بله همدیس است

b) $ze^z \ \forall z$ تحلیلی است، $\qquad w'=e^z+ze^z\big|_{z=0}=1+0=1\neq 0$ بله

c) $w=iz+3 \ \forall z$ تحلیلی است $\qquad w'=i\neq 0$ بله

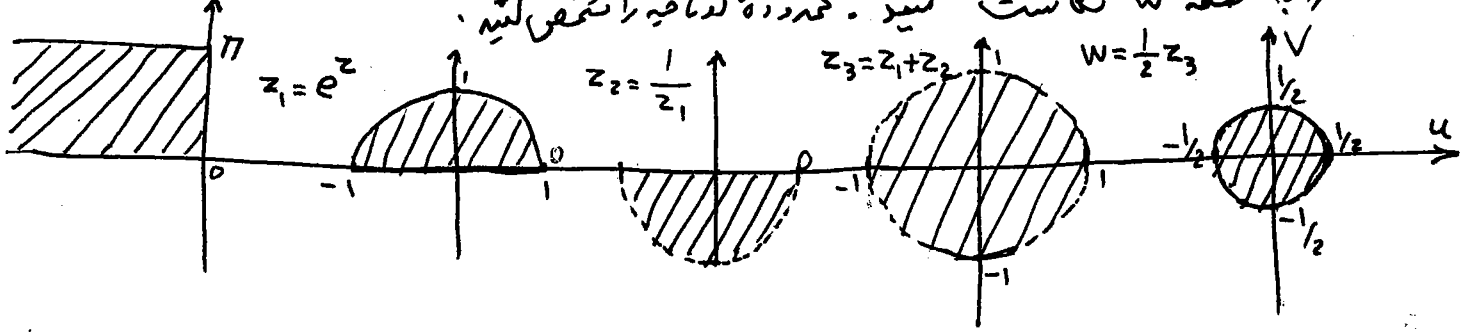
d) $w=iz^2 \ \forall z$ " $\qquad w'=2iz\big|_{z=0}=0$ خیر در z تحلیلی نیست

e) $w=\frac{1}{z-1}$ تحلیلی است بجز در $z=1$ $\qquad w'=\frac{-1}{(z-1)^2}\big|_{z=0}=-1\neq 0$ بله

f) $w=z^2+z \ \forall z$ تحلیلی است $\qquad w'=2z+1\big|_{z=0}=1\neq 0$ بله

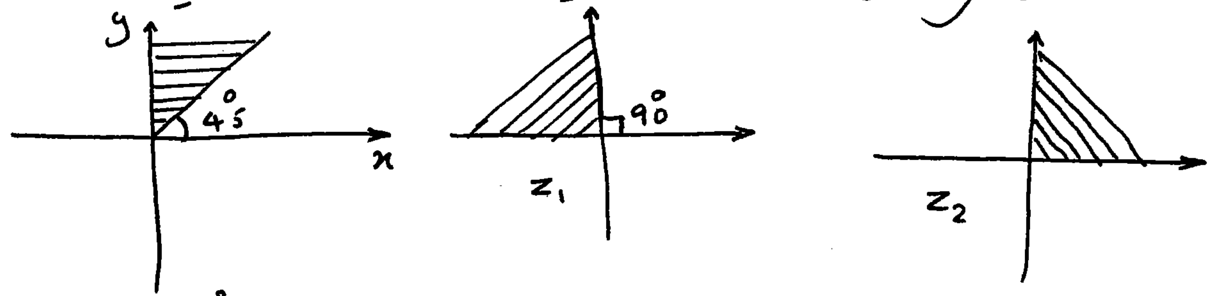
۱۴- $w=\cosh z$ تشکیل شده است از تبدیلات $z_1=e^z$ ، $z_2=z_1+\frac{1}{z_1}$ ، $w=\frac{1}{2}z_2$

نوار نیمه نامتناهی $x\leq 0$ و $0\leq y\leq \pi$ در صفحه z را به صفحه w نگاشت کنید. محدوده ناحیه را مشخص کنید.



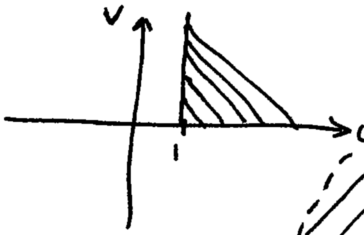
۱۵- نگاشت ناحیه‌ای مشخص شده را تحت تبدیلات داده شده رسم کنید.

①

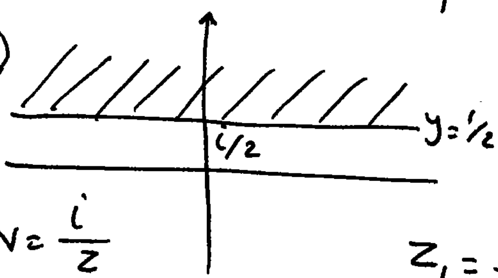


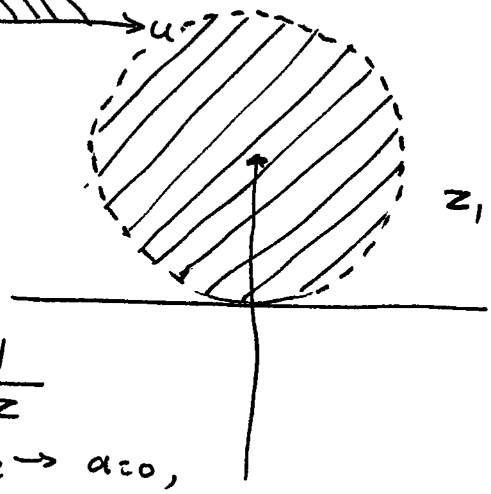
$w = -iz^2 + 1 \qquad z_1 = z^2 = r^2 e^{i2\theta} \qquad z_2 = -iz_1 = \rho e^{+i(\theta + \frac{3\pi}{2})}$

$W = Z_2 + 1$

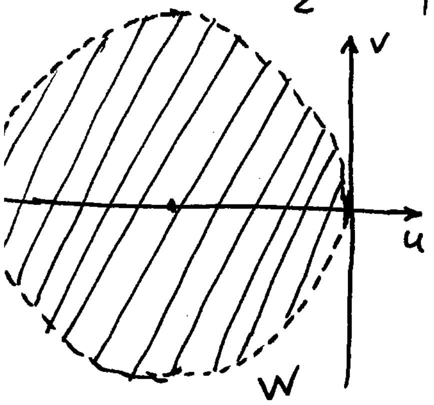


②





$W = \frac{i}{z}$



$Z_1 = \frac{1}{z}$

$y = \frac{1}{2} \to a = 0,$

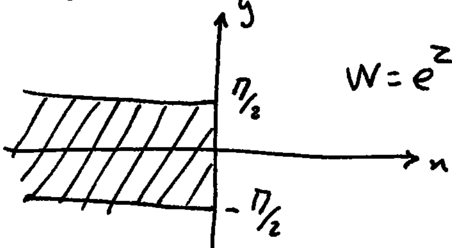
$b = 0, \; c = +1 \quad d = -\frac{1}{2} \qquad d(u^2+v^2) + bu - cv + a = 0$

2 در به شعاع $\Big|^{0}_{2}$ $\qquad -\frac{1}{2}(u^2+v^2) - v = 0$

دایره‌ای به مرکز $\longleftarrow \quad u^2 + (v-2)^2 = 4$

$W = i \cdot Z_1 = e^{\frac{\pi}{2} i} \cdot Z_1$ چرخش به اندازه $\frac{\pi}{2}$

③

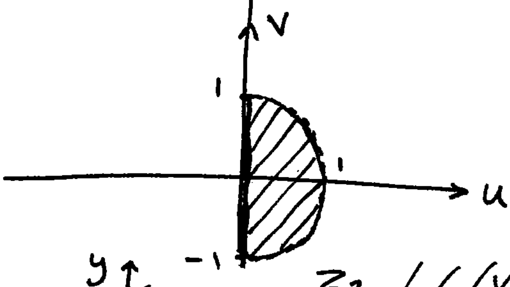


$W = e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$

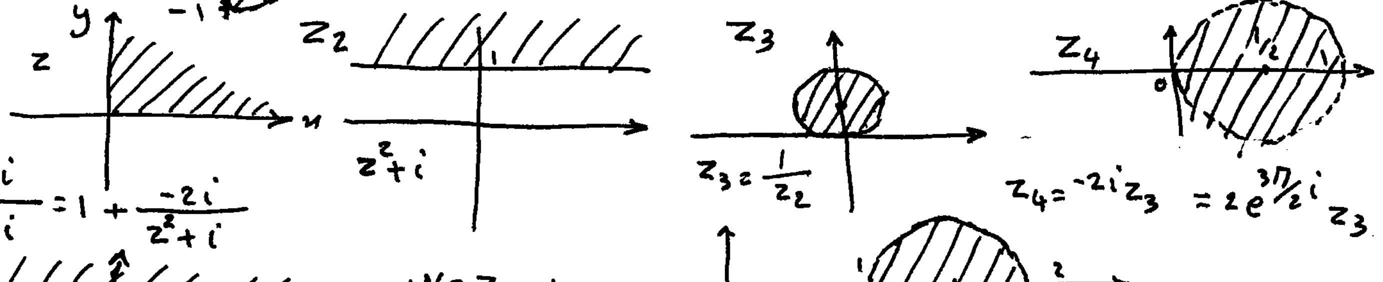
$\begin{cases} x = 0 & -\pi/2 < y < \pi/2 \\ W = e^z = e^{iy} & \text{نیم دایره واحد سمت راست} \end{cases}$

$\begin{cases} y = \pi/2 & x \le 0 \\ u = 0 & 0 \le v \le 1 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -\frac{\pi}{2} & x \le 0 \\ u = 0 & -1 \le v \le 0 \end{cases}$

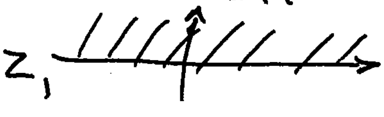


④

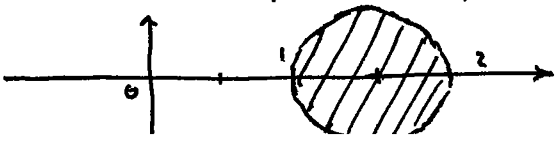


$W = \frac{z^2 - i}{z^2 + i} = 1 + \frac{-2i}{z^2 + i}$

$z_4 = -2i z_3 = 2e^{3\pi/2 i} z_3$



$W = Z_4 + 1$



مسئله حل شده.

۱۶- تبدیل خطی کسری (دو خطی) $W=\dfrac{z-2}{z}$ قرص $|z-1|\le 1$ را به چه ناحیه‌ای نگاشت می‌کند.
نگاشت چند نقطهٔ مشخص روی این قرص را در صفحه W مشخص کنید.

$$W=\frac{z-2}{z} \longrightarrow z-2=z\cdot W \longrightarrow (z-1)-1=\big[(z-1)+1\big]\cdot W$$

$$\longrightarrow (z-1)(1-W)=W+1 \longrightarrow (z-1)=\frac{W+1}{1-W}$$

داریم $|z-1|=\left|\dfrac{W+1}{1-W}\right|\le 1 \longrightarrow |W+1|\le|1-W| \ ,\ W=u+iv$

$$|u+1+iv|\le|(1-u)+iv| \longrightarrow (u+1)^2+v^2\le(u-1)^2+v^2$$

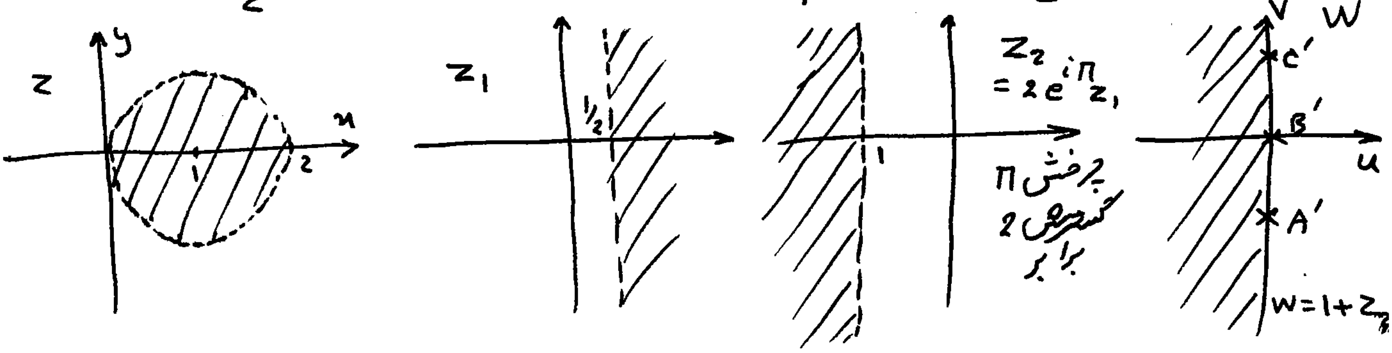
$$\longrightarrow 2u+1\le -2u+1 \longrightarrow 4u\le 0 \qquad \boxed{u\le 0}$$

سه نقطهٔ $A\Big|{1 \atop 1}$ و $B\Big|{2 \atop 0}$ و $C\Big|{1 \atop -1}$ روی قرص دایره در صفحه W می‌شوند:

$$W=\frac{x+iy-2}{x+iy}\Bigg|_A=-i=A' \qquad W\Big|_B=0=B' \qquad W\Big|_C=i=C'$$

روش دوم

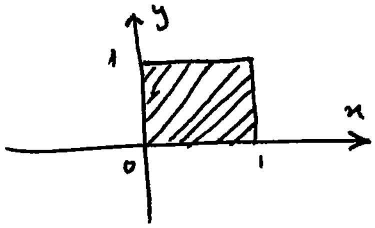
$$W=1+\frac{-2}{z}=1+z_2 \Rightarrow z_2=-2z_1 \qquad z_1=\frac{1}{z}$$

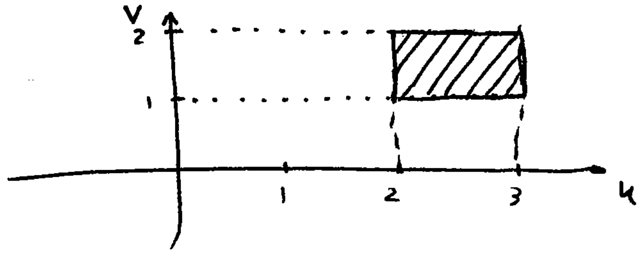


مسائل حل شده

۱۷- برد تابع $w=z+2+i$ را روی $0<y<1$ ، $0<x<1$ بدست آورید.

$$w = x+iy+2+i = (x+2)+i(y+1)$$





۱۸- نشان دهید $\overline{e^z} = e^{\bar z}$

$$e^z = e^{x+iy} \qquad \bar z = x-iy$$

$$e^{\bar z} = e^{x-iy} = e^x \cos y - i e^x \sin y \qquad e^z = u+iv \equiv e^x\cos y + i e^x \sin y$$

$$\overline{e^z} = u - iv = e^x \cos y - i e^x \sin y \Rightarrow e^{\bar z} = \overline{e^z}$$

۱۹- معادله $e^{3z}=1$ را حل کنید.

$$e^{3z} = e^{3x+3iy} = 1 \longrightarrow e^{3x}\cos 3y + i e^{3x}\sin 3y = 1 \longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} e^{3x}\sin 3y = 0 &\longrightarrow \sin 3y = 0 = \sin n\pi \longrightarrow \boxed{y=\frac{n\pi}{3}} \\ e^{3x}\cos 3y = 1 &\longrightarrow \cos 3y = 1 = \cos 2n\pi \longrightarrow \boxed{y=\frac{2n\pi}{3}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{y=\frac{2n\pi}{3}}$$

$$e^{3x} = 1 \longrightarrow \boxed{x=0}$$

۲۰- به کمک روش مختلط حل کنید.

(الف) $I = \int_0^\infty e^{-x}\sin \omega x\, dx = \mathrm{Im}\int_0^\infty e^{-x} e^{\omega x i}\, dx$

$$= \mathrm{Im}\int_0^\infty e^{x(-1+i\omega)}\, dx = \mathrm{Im}\,.\,\frac{1}{-1+i\omega}\, e^{x(-1+i\omega)}\Big|_0^\infty =$$

$$= \mathrm{Im}\,.\,\frac{1}{-1+i\omega}\left[0-1\right] = \mathrm{Im}\frac{1}{1-i\omega} = \mathrm{Im}\left(\frac{1+i\omega}{1+\omega^2}\right) = \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

(ب) $I = \int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\, dt = \mathrm{Re}\int_0^\infty e^{-st} e^{i\omega t}\, dt = \mathrm{Re}\int_0^\infty e^{t(-s+i\omega)}\, dt =$

$$= \mathrm{Re}\,.\,\frac{1}{-s+i\omega}\, e^{t(-s+i\omega)}\Big|_0^\infty = \mathrm{Re}\frac{1}{-s+i\omega}\left[0-1\right] = \mathrm{Re}\frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

مسائل حل شده

۲۱- همه مقادیر z^{1-i} را به ازای $z=-2-2i$ به دست آورید.

$$w=z^{1-i}=\exp\left[\log\left(z^{1-i}\right)\right]=\exp(1-i)\log z\Big|_{z=-2-2i}$$

$$z=-2-2i=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}\longrightarrow \log z=\log 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}=\ln 2\sqrt{2}+i\frac{5\pi}{4}$$

$$w=\exp\left[(1-i)\left(\ln 2\sqrt{2}+i\frac{5\pi}{4}\right)\right]=\exp\left[\left(\ln 2\sqrt{2}+\frac{5\pi}{4}\right)+i\left(\frac{5\pi}{4}-\ln 2\sqrt{2}\right)\right]$$

$$w=\exp\left(\ln 2\sqrt{2}+\frac{5\pi}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 8\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 8\right)\right]$$

۲۲- معین کنید تابع $u=r^3\sin 3\theta$ همساز است یا خیر؟ در چه ناحیه‌ای؟ در صورت همساز بودن تابع v مزدوج همساز آن را به دست آورید. سپس تابع تحلیلی f متناظر با آن را برحسب z بیان کنید.

حل: شرط تحلیلی بودن تابع در دستگاه قطبی: $u_r=\frac{1}{r}v_\theta$ و $v_r=-\frac{1}{r}u_\theta$ و شرط همساز بودن تابع در دستگاه قطبی $r^2u_{rr}+ru_r+u_{\theta\theta}=0$

$$u_r=3r^2\sin 3\theta\longrightarrow u_{rr}=6r\sin 3\theta\qquad u_\theta=3r^3\cos 3\theta\longrightarrow u_{\theta\theta}=-9r^3\sin 3\theta$$

$$r^2\cdot 6r\sin 3\theta+r\cdot 3r^2\sin 3\theta+\left(-9r^3\sin 3\theta\right)=0$$

$\therefore$ تابع u همساز زیرا در شرط همساز بودن صدق می‌کند.

به کمک روابط کوشی - ریمان

$$\underbrace{u_r=3r^2\sin 3\theta=\frac{1}{r}v_\theta}_{\text{رابطه اول}}\longrightarrow v_\theta=3r^3\sin 3\theta$$

$$\longrightarrow v=-r^3\cos 3\theta+f(r)\longrightarrow \underbrace{v_r=-3r^2\cos 3\theta+f'(r)=-\frac{1}{r}\cdot 3r^3\cos 3\theta}_{\text{رابطه دوم}}$$

$$\longrightarrow f'(r)=0\longrightarrow \boxed{f(r)=c}\longrightarrow \boxed{v(r,\theta)=-r^3\cos 3\theta+c}$$

مسائل حل شده

۲۳- سری تیلر $W=\cos 2z$ را حول نقطهٔ $a=3i$ به دست آورده شعاع همگرائی آن را تعیین کنید.

$$W=\cos 2z=\cos 2(z-3i+3i)=\cos[2(z-3i)+6i]=$$

$$=\cos 2(z-3i)\cos 6i-\sin 2(z-3i)\sin 6i=$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \qquad \sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

$$W=\cos 6i\left[1-\frac{2^2(z-3i)^2}{2!}+\frac{2^4(z-3i)^4}{4!}-\cdots\right]-\sin 6i\left[\frac{2(z-3i)}{1!}-\frac{2^3(z-3i)^3}{3!}+\cdots\right]$$

از آنجائیکه $\cos z$ تابعی تحلیلی است لذا در همه جای صفحه سری تیلر آن معتبر است.

۲۴- سری تیلر $W=z^3$ را حول $a=-2i$ بدست آورده شعاع اعتبار آن را تعیین کنید.

$$W=[z+2i-2i]^3=(z+2i)^3+3(z+2i)^2(-2i)+3(z+2i)(-2i)^2+(-2i)^3$$

$$=(z+2i)^3-6i(z+2i)^2+6(z+2i)-8i$$

تابع z^3 در تمام صفحه تحلیلی است از این لذا شعاع اعتبار این سری ∞ است.

۲۵- چند جمله اول سری مک لورن $W=\dfrac{3-z}{2+3z^2+z^4}$ را بدست آورید.

$$\begin{array}{l|l}
-z+3 & z^4+3z^2+2 \\
-z-\frac{3}{z}-\frac{2}{z^3} & -\frac{1}{z^3}+\frac{3}{z^4}+\frac{3}{z^5} \\
\hline
3+\frac{3}{z}+\frac{2}{z^3} & \\
3+\frac{9}{z^2}+\frac{6}{z^4} & \\
\hline
\frac{3}{z}-\frac{9}{z^2}+\frac{2}{z^3}-\frac{6}{z^4} & \\
\frac{3}{z}+\frac{9}{z^3}+\frac{6}{z^5} & \\
\hline
-\frac{9}{z^2}-\frac{7}{z^3}-\frac{6}{z^4}-\frac{6}{z^5} &
\end{array}$$

$$W=-\frac{1}{z^3}+\frac{3}{z^4}+\frac{3}{z^5}\cdots\cdots$$

می خواهیم تمام نگاشت‌های دوخطی که نیم صفحه بالائی $(\mathrm{Im}>0)$ را به دیسک باز $|w|<1$ تصویر می‌کند بدست آوریم.

کران $\mathrm{Im}\,z=0$ منطبق بر کران $|w|=1$ باشد $\mathrm{Im}\,z=0 \to |w|=1$ ، سه نقطه $z=0$ و $z=1$ و $z=\infty$ روی خط انتخاب می‌کنیم و شرایط را در تبدیل دوخطی قرار می‌دهیم. ابتدا می‌دانیم که $c\neq 0$ است پس $z=\infty$ یعنی $w=\frac{a}{c}$ پس $\left|\frac{a}{c}\right|=1$ و $|a|=|c|\neq 0$ از آنجائیکه $|w|=1$ وقتی $z=0$ پس $\left|\frac{b}{d}\right|=1$ پس $|b|=|d|$ از آنجا می‌توانیم بنویسیم $w=\left(\frac{a}{c}\right)\frac{z+b/a}{z+d/c}$ و از آنجائیکه $\left|\frac{a}{c}\right|=1$ و b و d غیرصفرند، می‌توانیم بصورت زیر بنویسیم $w=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-z_1}$ α یک ثابت حقیقی است، z_1 و z_0 ثابتهای غیرصفر مختلط‌اند.

از آنجائیکه $\left|\frac{d}{c}\right|=\left|\frac{b}{a}\right|$ است می‌دانیم که $|z_0|=|z_1|$ حال تبدیل $z=1$ را اعمال می‌کنیم:

$|1-z_0|=|1-z_1| \Rightarrow (1-z_0)(1-\bar z_0)=(1-z_1)(1-\bar z_1)$ اما از آنجائیکه $|z_0|=|z_1|$ است $z_0\bar z_0=z_1\bar z_1$ پس رابطه بالا به رابطه مقابل کاهش می‌یابد $z_1+\bar z_1=z_0+\bar z_0$ یعنی $\mathrm{Re}\,z_1=\mathrm{Re}\,z_0$ نتیجه می‌شود که یا $z_1=z_0$ است و یا $z_1=\bar z_1$ است. اگر $z_1=z_0$ باشد آنگاه تبدیل بصورت $w=e^{i\alpha}$ در می‌آید پس $z_1=\bar z_0$ است. پس تبدیل T نقطه z_0 را به مبدأ $w=0$ تصویر می‌کند.

پس هر تبدیل دوخطی که ویژگی نگاشت نیم صفحه بالائی را به داخل یک دایره داشته باشد باید به صورت زیر باشد $w=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-\bar z_0}$ و $\mathrm{Im}\,z_0>0$ و α حقیقی است.

چیزی که باقی ماند اینست که نشان دهیم بطور معکوس داخل دایره به نیم صفحه بالائی نگاشت می‌شود. از رابطه بالا قدر مطلق می‌گیریم $|w|=\left|\frac{z-z_0}{z-\bar z_0}\right|$ و از نظر هندسی تعبیر می‌کنیم. اگر نقطه بالای محور حقیقی باشد هر دو z و z_0 در یک طرف محور x باشند یعنی $|z-z_0|<|z-\bar z_0|$ یعنی $|w|<1$ اگر z و z_0 در دو طرف محور x باشند آنگاه $|z-z_0|>|z-\bar z_0|$ پس $|w|>1$ می‌شود یعنی بیرون دایره واقع می‌شود.