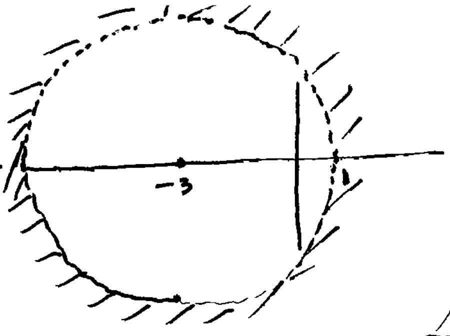
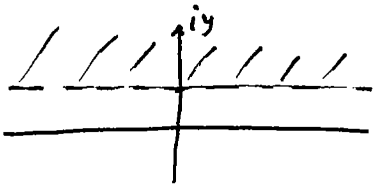
حل : متغیرهای مختلط

۱-

a) $|z+3|>4$ حوزه است

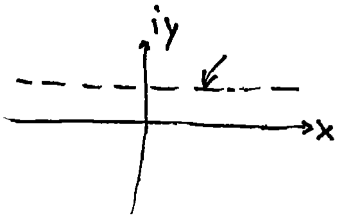


b) $\operatorname{Im} z>1$ $\quad z=x+iy \quad y>1$



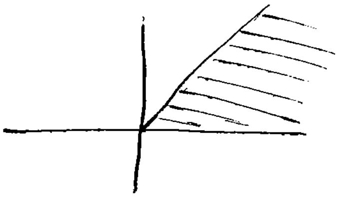
حوزه است

c) $\operatorname{Im} z=1$
$y=1$



نقاط روی خط $y=1$ حوزه نیست

d) $0\leqslant \arg z\leqslant \frac{\pi}{4} \quad z\neq 0$

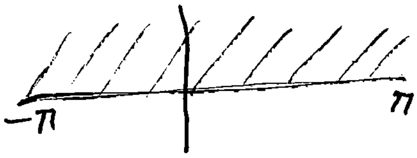


حوزه نیست

۲-

a) $-\pi<\arg z<\pi \quad (z\neq 0)$

حوزه است



b) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\leqslant\left|\frac{1}{z}\right| \quad , \frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}=\frac{1}{r}\cos\theta-i\frac{1}{r}\sin\theta \quad \left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{r}$

$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{r}\cos\theta \qquad \left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{r} \qquad \cancel{\frac{1}{r}}\cos\theta\leqslant\cancel{\frac{1}{r}}1 \quad \cos\theta\leqslant 1$

شرط این مسئله همه جا روی صفحهٔ z برقرار است

۳-

a) $f(z)=\frac{1}{z^2+1} \rightarrow z^2+1=0 \quad |z|=1$ همه جا معتبر است بجز روی دایرهٔ

b) $f(z)=\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right)=\operatorname{Arg}\frac{1}{r}e^{-i\theta}=-\theta$ f همه جا معتبر است.

c) $f(z)=\frac{z}{z-\bar{z}}=\frac{z}{2iy}$ همه جا معتبر است بجز روی خط $y=0$

d) $f(z)=\frac{1}{1-|z|^2} \qquad 1-|z|^2=0 \quad |z|^2=1$ f همه جا بجز روی دایرهٔ واحد معتبر است

۴-

$f(z)=z^3+z+1=(x+iy)^3+x+iy+1=x^3+3x^2(iy)+3x(iy)^2+(iy)^3+x+iy+1$

$=x^3+i3x^2y-3xy^2-iy^3+x+iy+1=(x^3-3xy^2+x+1)+i(3x^2y-y^3+y)\equiv u+iv$

۵-

$f(z)=x^2-y^2-2y+i(2x-2xy)=\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2-2\left(\frac{z-\bar{z}}{2}\right)-\left(\frac{z-\bar{z}}{2}\right)^2+i\left(2\frac{z+\bar{z}}{2}-2\frac{z+\bar{z}}{2}\cdot\frac{z-\bar{z}}{2}\right)$

$f(z)=z\bar{z}-z+\bar{z}+i\left(z+\bar{z}-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}\bar{z}^2\right)$

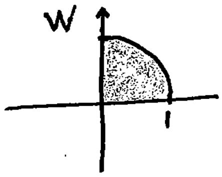
۶- ناحیه $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ ، $r\le 1$ را نگاشت کنید

a) $W = z^2 = r^2 e^{i2\theta}$

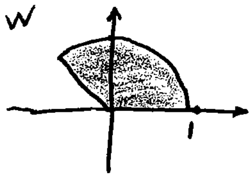
$W = \rho^2 e^{i\phi}$

$\phi = 2\theta \quad \rho^2 \le 1$

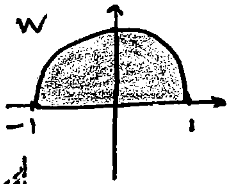
$0 \le \phi \le \pi/2$

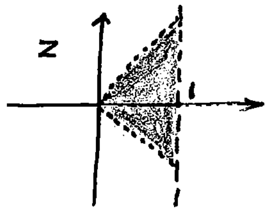


b) $W = z^3 = r^3 e^{i3\theta} \equiv \rho e^{i\phi} \qquad \rho \le 1 \qquad 0 \le \phi \le \frac{3\pi}{4}$



c) $W = z^4 = r^4 e^{i4\theta} \equiv \rho e^{i\phi} \qquad \rho \le 1 \qquad 0 \le \phi \le \frac{\pi . 4}{4} = \pi$





$W = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \equiv u + iV$

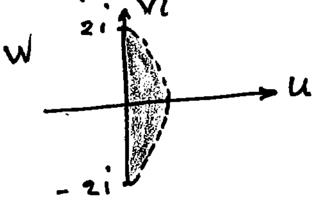
$u = x^2 - y^2 \quad , \quad V = 2xy$

1 $\quad x = 1 \qquad V = 2y \;,\; u = 1 - y^2 \Longrightarrow$ y را بین این دو حذف می‌کنیم $\;\to\; u = 1 - \frac{V^2}{4} \to V^2 = -4(u-1)$

$-1 < y < 1 \qquad -2 < V < 2 \qquad 0 < u < 1$

2 $\quad x = y \qquad u = 0 \qquad V = 2x^2 \qquad 0 < V < 2$

3 $\quad y = -x \qquad u = 0 \qquad V = -2x^2 \qquad -2 < V < 0$



۸- صدق در روابط کوشی-ریمن شرط مشتق پذیری ست

$f(z) = r^2 \tan\theta - i r \cos\theta$

$$\boxed{V_r = \frac{-1}{r} u_\theta \qquad u_r = \frac{1}{r} V_\theta}$$
روابط کوشی-ریمن در دستگاه قطبی

$V = -r\cos\theta \qquad V_r = -\cos\theta \qquad V_\theta = +r\sin\theta$

$u = r^2 \tan\theta \qquad u_\theta = \frac{r^2}{\cos^2\theta} \qquad u_r = 2r\tan\theta$

چون $V_r \ne \frac{-1}{r} u_\theta$ و $u_r \ne \frac{1}{r} V_\theta$ ست پس مشتق پذیر نیست

۹- $f(r) = Arg(z) + i|z|^2 \to u = \theta \quad , \quad V = r^2$

$u_r = 0 \quad , \quad V_\theta = 0 \quad \Rightarrow u_r = \frac{1}{r} V_\theta$ ✓ $\quad \Rightarrow$ پس در هیچ جا مشتق پذیر نیست

$u_\theta = 1 \quad , \quad V_r = 2r \quad \Rightarrow V_r \ne \frac{1}{r} u_\theta$ X

$2r = \frac{-1}{r} \times 1 \Rightarrow r^2 = \frac{-1}{2} \longrightarrow$ جواب ندارد

۱۰- هیچ جا مشتق پذیر نیست

a) $f(z) = \bar{z} = x - iy \qquad u_x \ne V_y \qquad V_x = -u_y$

۱۰- روابط کوشی ریمان

$U_r = \frac{1}{r} V_\theta$

$V_r = -\frac{1}{r} U_\theta$

b) $f(z) = z\bar{z} = r^2 \equiv U(r,\theta) + iV(r,\theta)$

$U_r = 2r \qquad V_\theta = 0$

$V_r = 0 \qquad U_\theta = 0$

$\Rightarrow$ فقط در $r=0$ مشتق پذیر است

یعنی مبدأ چون مبدأ در دستگاه قطبی وجود ندارد پس هیچ جا مشتق پذیر نیست

۱۱-

a) $f(z) = iz + 2 = 2 - y + ix \equiv U + iV$, $U_x = 0$, $V_y = 0$, $U_y = -1$, $V_x = 1$

پس در شرط کوشی ریمان صادقند یعنی $U_x = V_y$, $U_y = -V_x$ مؤلفه های مشتق های اول U و V پیوسته اند

پس شرط کافی را دارند.

$f'(z) = U_x + iV_x = 0 + i$

$f''(z) = 0 \longrightarrow f'''(z) = 0$

b) $f(z) = e^{-x} e^{-iy} = e^{-x}\cos y - ie^{-x}\sin y \equiv U + iV$, $U_x = -e^{-x}\cos y$, $V_y = -e^{-x}\cos y$

$U_y = -e^{-x}\sin y$, $V_x = e^{-x}\sin y$

$f'(x) = U_x + iV_x = -e^{-x}\cos y + ie^{-x}\sin y$

مجدداً مشتق می گیریم می دانیم مشتقات متوالی نیز همچنان مشتق پذیرند زیرا مؤلفه ای مشتقات مرتبه اول U و V پیوسته اند

$U_{xx} = +e^{-x}\cos y$, $V_{xx} = -e^{-x}\sin y$

$f''(x) = U_{xx} + iV_{xx} = e^{-x}\cos y - ie^{-x}\sin y \rightarrow U_{xxx} = -e^{-x}\cos y$, $e^{-x}\sin y = V_{xxx}$

$f'''(x) = U_{xxx} + iV_{xxx} = -e^{-x}\cos y + i\sin y$

c) $f(z) = z^3 = x^3 - 3xy^2 - i(y^3 - 3x^2y) \equiv U + iV$, $\begin{cases} U_x = 3x^2 - 3y^2 \\ V_y = -3y^2 + 3x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} U_y = -6xy \\ V_x = 6xy \end{cases}$

مؤلفه ی مشتقات اول U و V پیوسته اند پس مشتق پذیراند

$f'(z) = U_x + iV_x = 3x^2 - 3y^2 + i(6xy)$

$f''(z) = U_{xx} + iV_{xx} = 6x + i6y \longrightarrow f'''(z) = 6$

d) $f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \equiv U + iV$ $\begin{cases} U_x = -\sin x \cosh y \\ V_y = -\sin x \cosh y \end{cases}$ $\begin{cases} U_y = \cos x \sinh y \\ V_x = -\cos x \sinh y \end{cases}$

مشتقات مرتبه اول پیوسته اند پس:

$f'(z) = -\sin x \cosh y - i\cos x \sinh y$

$f''(z) = -\cos x \cosh y + i \sin x \sinh y$

$f'''(z) = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$

متغیر مختلط

-۱۲

a) $f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}=\frac{1}{r}\cos\theta-i\frac{1}{r}\sin\theta\equiv u(r,\theta)+iv(r,\theta)$

$u_r=\frac{-\cos\theta}{r^2}\ ,\ u_\theta=-\frac{\sin\theta}{r}\ \checkmark$

$v_\theta=\frac{-\cos\theta}{r}\ ,\ v_r=\frac{\sin\theta}{r^2}\ \checkmark$

$$\boxed{\begin{aligned} v_r&=\frac{-1}{r}u_\theta \\ u_r&=\frac{1}{r}v_\theta \end{aligned}}$$

مشتقات مرتبه اول همه پیوسته‌اند ، ($r=0$ در دستگاه قطبی وجود ندارد) پس همه مراتب مشتق را دارند

$$\boxed{f'(z)=e^{-i\theta}(u_r+iv_r)}$$

$$f'(z)=e^{-i\theta}\left(\frac{-\cos\theta}{r}+i\frac{\sin\theta}{r^2}\right)$$

b) $f(z)=x^2+iy^2\equiv u+iv\ ,\ u_x=2x\ ,\ v_y=2y\to u_x=v_y\ @\ x=y$

$u_y=0\ ,\ v_x=0\quad u_y=-v_x$ همه جا

$f'(z)=u_x+iv_x=2x+i2y=2x+i2x$

فقط در $y=x$

رابطه اول کوشی-ریمان فقط در $x=y$ برقرار است پس مشتق فقط در $x=y$ دارد و آن نیز مساوی ↑ است .

c) $f(z)=z.\operatorname{Im}z=(x+iy)(y)=xy+iy^2\equiv u+iv$

$u_x=y\ ,\ v_y=2y$ رابطه اول کوشی-ریمان در هیچ جا بجز در $y=0$ برقرار نیست

$u_y=x\ ,\ v_x=0$ رابطه دوم کوشی-ریمان فقط در $x=0$ برقرار است.

$\Rightarrow$ در $y=0$ و $x=0$ $f'(z)=y=0$

-۱۳

a) $f(z)=\frac{1}{z^4}=\left(\frac{1}{r}\right)^4\cdot e^{-i4\theta}=\frac{1}{r^4}\cos4\theta-i\frac{1}{r^4}\sin4\theta\equiv u+iv$

$$\checkmark\begin{cases} u_r=\frac{-4r^3\cos4\theta}{r^8}=\frac{-4\cos4\theta}{r^5} \\ v_\theta=\frac{-4\cos4\theta}{r^4} \end{cases}\ ,\quad \checkmark\begin{cases} v_r=\frac{4\sin4\theta}{r^5} \\ u_\theta=\frac{-4\sin4\theta}{r^4} \end{cases}$$

همه جا در حوزه تعریف برقرارند و پیوسته‌اند

پس $f'(z)=e^{-i\theta}(u_r+iv_r)=e^{-i\theta}\left(\frac{-4\cos4\theta}{r^5}+i\frac{4\sin4\theta}{r^5}\right)=\frac{-4}{r^5}e^{-i\theta}e^{-i4\theta}$

$=-4\frac{1}{r^5}e^{-i5\theta}=\frac{-4}{z^5}$

b) $f(z)=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}\quad(r>0\ ,\ -\pi<\theta<\pi)$

$f(z)=\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}+i\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\equiv u(r,\theta)+iv(r,\theta)$

$$\begin{cases} u_r=\frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2} \\ v_\theta=\frac{\sqrt{r}}{2}\cos\frac{\theta}{2} \end{cases}\checkmark\quad \begin{cases} u_\theta=-\frac{\sqrt{r}}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ v_r=\frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2} \end{cases}\checkmark$$

$f'(z)=e^{-i\theta}\left(\frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}+i\frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$f'(z)=\frac{1}{2\sqrt{r}}e^{-i\theta}\cdot e^{i\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{r}}e^{-i\frac{\theta}{2}}$

$f(z) = x^3 + (1-y)^3 i \equiv u(x,y) + i v(x,y) \to u = x^3, \quad v = (1-y)^3$ -۱۴

$u_x = 3x^2 \qquad v_y = -3(1-y)^2 \qquad u_x = v_y \longrightarrow 3x^2 = -3(y-1)^2$ فقط روی

رابطه اول کوشی-ریمن برقرار است

$v_x = 0 \quad , \quad u_y = 0 \qquad u_y = -v_x$ ✓

$x^2 + (y-1)^2 = 0$

این دایره‌ای است به مرکز $\left(\begin{matrix} x=0 \text{ و } y=1 \\ z = 0 + i \end{matrix}\right)$ به شعاع صفر یعنی عملاً یک نقطه که آن $z = i$ است. در این حالت که روابط کوشی ریمن برقرار است مشتق مساوی

$f'(z) = u_x + i v_y = 3x^2$

a) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$ -۱۵

هر تابعی که در روابط کوشی ریمن صدق کند و مشتقات مرتبه اول جزئی آن پیوسته باشند می‌گویند آن تابع در آن حوزه تحلیلی است و اگر در همه جای صفحه (در یک حوزه) تحلیلی باشد می‌گویند تابع تام یا entire است.

$u_x = 3 \qquad v_y = 3$ ✓ پیوسته‌اند پس $f'(z) = u_x + i v_y = 3 - i$

$u_y = 1 \qquad v_x = -1$ ✓

این شروط در همه جای صفحه برقرارند پس تابع $f(z)$ "تام" است

b) $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \qquad u_x = \cos x \cosh y \qquad v_y = \cos x \cosh y$ ✓

$u_y = \sin x \sinh y \qquad v_x = -\sin x \sinh y$ ✓

همه جای صفحه در رابطه فوق + پیوستگی مشتقات متوالی وجود دارد پس f تام است.

c) $f(z) = e^{-y} e^{ix} = e^{-y}\cos x + i e^{-y}\sin x \equiv u + iv$

$u_x = -e^{-y}\sin y \qquad v_y = -e^{-y}\sin x$ ✓ همه جا برقرارند + همه جا پیوسته‌اند $\Rightarrow$ همه جا تحلیلی = "تام"

$u_y = -e^{-y}\cos x \qquad v_x = e^{-y}\cos x$ ✓

-۱۶

a) $f(z) = xy + iy \equiv u + iv \qquad u_x = y \qquad v_y = 1$

$u_y = x \qquad v_x = 0 \quad \Rightarrow$ منتظر در $y=1$, $x=0$ مشتق پذیر است

برای تحلیلی بودن لازم است که در یک نقطه و همسایگی آن مشتق پذیر باشد در حالی که در همسایگی این نقطه مشتق پذیر نیست. پس این تابع هیچ جا تحلیلی نیست

b) $f(z) = e^y e^{iy} = e^y\cos y + i e^y \sin y \qquad u_x = 0 \qquad v_y = e^y\sin y + e^y\cos y \neq 0$ ✗

پس هیچ جا تحلیلی نیست $\qquad u_y = e^y\cos y - e^y\sin y \neq 0 \qquad v_x = 0$ ✗

۱۷ - می دانیم اگر $p(z)$ در D_1 تحلیلی باشد و $q(z)$ نیز در D_2 تحلیلی باشند آنگاه $f(z) = p(z) \cdot q(z)$ در اشتراک D_1 و D_2 تحلیلی است و همچنین می دانیم توابع چندجمله ای تحلیلی اند (تامند). پس حاصل تقسیم دو تابع تام همه جا تحلیلی است بجز در نقاط صفر مخرج که همان نقاط تکین تابعند.

a) $f(z) = \dfrac{2z+1}{z(z^2+1)}$ صورت و مخرج تابع چندجمله ای و تامند پس این تابع فقط در صفر مخرج تحلیلی نیست

b) $f(z) = \dfrac{z^3+i}{z^2+2-3z}$ صورت و مخرج این کسر چندجمله ای اند پس تامند فقط در صفر مخرج این کسر تحلیلی نیست

c) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$ 〃 〃 〃

توابع ساده اولیه

-۱ a) $e^{\left(\frac{2+\pi i}{4}\right)} = e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}}\,(1+i)$

b) $e^{z+\pi i} = e^{z} \cdot e^{\pi i} = e^{z}(\cos\pi + i\sin\pi) = -e^{z}$

-۲ معادله مختلط

a) $e^{z} = 1+\sqrt{3}\,i \qquad e^{x}\cos y + ie^{x}\sin y = 1+\sqrt{3}\,i$

در واقع دو معادله است که قسمت حقیقی سمت چپ مساوی قسمت حقیقی سمت راست معادله و قسمت موهومی سمت راست با سمت چپ برابر است پس داریم

$e^{x}\cos y = 1 \quad , \quad e^{x}\sin y = \sqrt{3} \implies e^{x} = \frac{1}{\cos y} \longrightarrow \frac{1}{\cos y}\cdot\sin y = \sqrt{3}$

$\tan y = \sqrt{3} \longrightarrow \boxed{y = \frac{\pi}{3}} \qquad e^{x} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2 \qquad \boxed{x = \ln 2}$

b) $e^{(2z-1)} = 1 \qquad 2z-1 = \ln 1 = 0 \qquad 2x-1+2iy = 0$

$\longrightarrow 2x-1 = 0 \quad \boxed{x = \frac{1}{2}} \qquad 2y = 0 \quad \boxed{y = 0}$

توابع ساده (اولیه)

$$\left|e^{(2z+i)}\right| = \left|e^{2x}\cdot e^{i2y+i}\right| = \left|e^{2x}\right|\cdot\left|e^{i(2y+1)}\right| = e^{2x}\times 1 = e^{2x}$$ -۳

$$\left|e^{iz^2}\right| = \left|e^{i(x^2-y^2+i2xy)}\right| = \left|e^{-2xy}\right|\cdot\left|e^{i(x^2-y^2)}\right| = e^{-2xy}\times 1 = e^{-2xy}$$

$$\left|e^{2z+i} + e^{iz^2}\right| \leq \left|e^{2z+i}\right| + \left|e^{iz^2}\right| = e^{2x} + e^{-2xy}$$

از نامساوی $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ استفاده شده است.

-۴

$$\left|e^{z^2}\right| = \left|e^{x^2-y^2+i2xy}\right| = e^{x^2-y^2}$$

$$e^{|z|^2} = e^{x^2+y^2} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{x^2-y^2} \leq e^{x^2+y^2}$$

$$z = re^{i\theta} \xrightarrow{\text{از دو طرف لگاریتم می‌گیریم}} \log z = \log(re^{i\theta})$$ -۵

$$\log z = \ln r + \log e^{i\theta} = \ln r + i\theta$$

از طرفی دیگر

$$\exp\log(z) = z \longrightarrow z = \exp(\ln r + i\theta)$$

a) $\exp\bar z = \overline{\exp z}$ $\forall z$ نشان دهید -۶

$$e^{\bar z} = e^{x-iy} = e^{x}(\cos y - i\sin y)$$

$$\overline{e^{z}} = \overline{e^{x+iy}} = \overline{e^{x}(\cos y + i\sin y)} = e^{x}(\cos y - i\sin y) = e^{\bar z}$$

b) $$e^{iz} = e^{-y+ix} = e^{-y}(\cos x - i\sin x)$$

$$\overline{e^{iz}} = \overline{e^{-y-ix}} = e^{-y}(\cos x + i\sin x)$$

$$\sin\bar z = \sin(x-iy) = \sin x\cosh y - i\sinh y\cos x \equiv u(x,y) + iv(x,y)$$ -۸

$u_x = \cos x\cosh y$ $\times$ $u_y = \sin x\sinh y$ $\times$

$v_y = -\cos x\cosh y$ $\quad$ $v_x = \sin x\sinh y$

هیچ کدام از روابط کوشی-ریمان صادق نیستند

توابع ساده (اولیه)

۱۰- شرط همساز بودن تابع u $(u_{xx}+u_{yy}=0)$ است

a) $\sin x \sinh y = u$

راه ۱

$u_x = \cos x \sinh y \qquad u_{xx} = -\sin x \sinh y$

$u_y = \sin x \cosh y \qquad u_{yy} = \sin x \sinh y$

$\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$

پس این تابع همساز است.

راه ۲

اگر بتوانیم تابع مزدوج همساز برای u پیدا کنیم پس u همساز بوده است.

$u_x=v_y$

$u_y=-v_x$

$u_x=\cos x\sinh y = v_y \xrightarrow{\int} v=\cos x\cosh y + f(x) \qquad v_x=-u_y=\sin x\cosh y+f'(x)$

$u_y = \sin x\cosh y - f'(x) = \sin x\cosh y \to f'(x)=0 \to f(x)=c$

$\boxed{V(x,y)=\cos x\cosh y + c}$

پس u همساز است

-۱۱ $\sin z = \cosh 4 \qquad \sin(x+iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y = \cosh y$

$\therefore \Rightarrow \cos x = 0 = \cos\frac{(2n-1)\pi}{2} \to \boxed{x=\frac{(2n-1)\pi}{2}}$

$\sin x = 1 = \sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$\cosh y = \cosh 4 \to \boxed{y=4}$

$\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

-۱۲ $\cos z = 2 \to \cos(x+iy)=2 \to (\cos x\cosh y + i\sin x\sinh y)=2$

$\Rightarrow \begin{cases}\sin x = 0 \Rightarrow x=n\pi \\ \cos x = 1 = \cos 2k\pi\end{cases} \Rightarrow \boxed{x=2k\pi} \qquad \cosh y = 2 \qquad \boxed{y=\cosh^{-1}2}$

-۱۳ $\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$

صفر $\rightarrow \sinh z = 0 = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$

تکین $\rightarrow \cosh z = 0 \rightarrow \cosh x\cos y + i\sinh x\sin y = 0$

$\cos y = 0 = \cos\frac{(2n-1)\pi}{2} \to \boxed{y=\frac{2n-1}{2}\pi} \qquad \sinh x = 0 = \sinh 0 \qquad \boxed{x=0}$ } تکین

صفر $\leftarrow \sin x = 0 = \sin n\pi \qquad \boxed{x=n\pi} \qquad \sinh y = 0 = \sinh 0 \qquad \boxed{y=0}$ } صفر

-۱۴

b) $\sinh z = i \rightarrow \sinh(x+iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y \equiv i$

$\cos y = 0 = \cos(2n-1)\frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{y=(2n-1)\frac{\pi}{2}} \leftrightarrow \sin y = 1 = \sin(2k\pi + \pi/2)$

$\boxed{y = 2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ اشتراک $\rightarrow \boxed{y = 2k\pi+\frac{\pi}{2}}$

$\cosh x = 1 = \cosh 0 \longrightarrow \boxed{x=0}$

$z = i(2k\pi + \frac{\pi}{2})$ جواب معادله

۱۶- وقتی تابع لگاریتم را با "L" بزرگ می‌نویسند منظور در حوزهٔ اصلی یعنی $-\pi < \theta < \pi$ است

$\mathrm{Log}(1+i)^2 = 2\,\mathrm{Log}(1+i)$

$\downarrow$

$\mathrm{Log}\left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = \mathrm{Log}\left(2\, e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$

شناسه نشان می‌دهد که در حوزهٔ اصلی قرار دارد.

$2\,\mathrm{Log}\left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \rightarrow$ این هم شناسه در حوزهٔ اصلی دارد. پس تساوی برقرار است.

اما $\mathrm{Log}(-1+i)^2 = \mathrm{Log}\left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^2$

$= \mathrm{Log}\left(2\, e^{i\frac{3\pi}{2}}\right) \qquad 0 < \frac{3\pi}{2} < 2\pi$

شناسه در محدودهٔ $-\pi < \theta < \pi$ قرار ندارد.

از طرفی $2\,\mathrm{Log}(-1+i) = 2\,\mathrm{Log}\left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)$

$\downarrow$

$-\pi < \frac{3\pi}{4} < \pi$ قرار دارد.

-۱۷

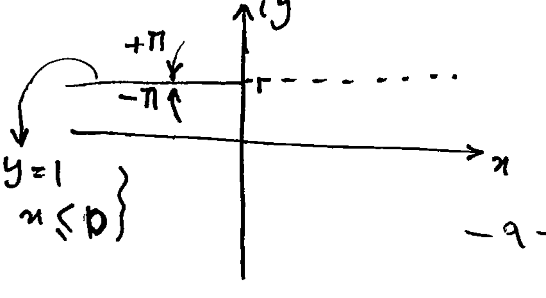
الف $w = \mathrm{Log}(z-i) = \mathrm{Log}(x+iy-i) = \mathrm{Log}(x+i(y-1)) = \mathrm{Log}(x+iY)$

$Y = y-1$ محور y را به Y انتقال می‌دهیم

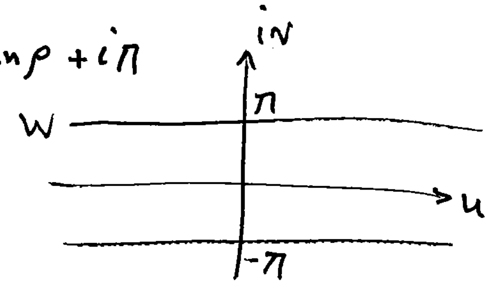
$w = \mathrm{Log}(x+iY) = \mathrm{Log}(\rho e^{i\xi}) \overbrace{\;-\pi < \xi < \pi\;} = \ln\rho + i\xi$

روی خط $\xi = \pi$ یا $\xi = -\pi$ که در اصل یکی‌اند مقدار تابع w دو مقدار پیدا می‌کند به همین دلیل تابع دو مقداری و غیر تحلیلی است.

$\xi = -\pi, \; w = \ln\rho - i\pi \qquad \xi = \pi, \; w = \ln\rho + i\pi$



نیم خط $\begin{cases} y=1 \\ x \le 0 \end{cases}$



توابع ساده (اولیه)

-۱۸

$u = \ln(x^2+y^2)$ $\qquad u_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$ $\qquad u_{xx} = \dfrac{-4x^2+2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$u_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$ $\qquad u_{yy} = \dfrac{-4y^2+2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$u_{xx}+u_{yy} = 0$ ✓

a) $(1+i)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt2}\, e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}\right)^2 =$ $\boxed{\exp \log z = z}$ -۱۹

$= \frac{1}{2}\, e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} = \exp \log\left(\frac{1}{2} e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}\right) = \exp\left(-\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)$

$\exp \log (1-i)^2 = \exp 2\log(1-i) = \left(\exp 2 \ln \sqrt2\right)\left(\exp\left(i\left(\frac{-\pi}{4}+2k\pi\right)\right)\right)$

$= \exp \ln 2 \cdot \exp i\left(\frac{-\pi}{4}+2k\pi\right)$

b) $(-1)^{1/\pi} = \left(e^{i(2k+1)\pi}\right)^{1/\pi} = e^{i(2k+1)}$

a) $i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{-\pi/2}$

-۲۰

b) $\left[\left(\frac{e}{2}\right)(-1-\sqrt3\, i)\right]^{3\pi i} = \left[\frac{e}{2}\left(2e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)\right]^{3\pi i} = \left[e^{1+i\frac{4\pi}{3}}\right]^{3\pi i} = e^{-4\pi^2}\cdot e^{i3\pi}$

$= e^{-4\pi^2}(\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = -e^{-4\pi^2}$ $\qquad -e^{-4\pi^2} \leftrightarrow$ مقدار اصلی

c) $(1-i)^{4i} = \left(\sqrt2\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{4i} = (\sqrt2)^{4i}\cdot e^{\pi} = e^{\pi}\cdot 4^i = e^{\pi}(\log 4^i) =$

$= e^{\pi}\cdot \exp(2i\ln 2) = e^{\pi}(\cos 2\ln 2 + i \sin 2\ln 2)$

$(-1+\sqrt3\, i)^{3/2} = \left(2e^{i(2k\pi-\frac{\pi}{3})}\right)^{3/2} = \sqrt[2]{8}\; e^{i(3k\pi-\frac{\pi}{2})}$ -۲۱

$= -i\sqrt[2]{8} = -i2\sqrt2$

$i\sqrt[2]{8} = i2\sqrt2$

①

حل مسائل انتگرال از کتاب Churchil

No. 1 Page 99

۴- $\int f(z)\,dz = \int \frac{z+2}{z}\,dz \qquad z = 2e^{i\theta} \quad 0 \le \theta \le \pi$ (a)

$$\int \frac{2e^{i\theta}+2}{2e^{i\theta}} \cdot 2ie^{i\theta}\,d\theta = i2\int\left(e^{i\theta}+1\right)d\theta = 2\left[e^{i\theta}\right]_0^{\pi} + 2i\left[\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= 2\left(e^{i\pi}-e^{0}\right)+2i\pi = -4+2i\pi$$

$\pi \le \theta \le 2\pi$ (b)

$$2\left[e^{i\theta}\right]_{\pi}^{2\pi} + 2i\left[\theta\right]_{\pi}^{2\pi} = 2\left(e^{2i\pi}-e^{i\pi}\right)+2i\pi = 4+2i\pi$$

$0 \le \pi \le 2\pi$ (c)

$$2\left[e^{i\theta}\right]_0^{2\pi} + 2i\left[\theta\right]_0^{2\pi} = 2\left(e^{2i\pi}-e^{0}\right)+2i(2\pi) = 4i\pi$$

۱- انتگرال

No. 1 Page 91

(a) $$\int_1^2\left(\frac{1}{t}-i\right)^2 dt = \int_1^2\left(\frac{1}{t^2}-\frac{2i}{t}-1\right)dt = \left[-t^{-1}-2i\ln t-t\right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{2}-2i\ln 2-\cancel{2}+\cancel{1}-2i\times 0+\cancel{1} = -\frac{1}{2}-2i\ln 2$$

(b) $$\int_0^{\pi/6} e^{i2t}\,dt = \frac{1}{2i}\left[e^{2it}\right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{2i}\left[e^{i2\times\frac{\pi}{6}}-e^{0}\right] = \frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{2i}$$

$$= +\frac{\sqrt{3}}{4}+i\frac{1}{4}$$

(c) $$\int_0^{\infty} e^{-zt}\,dt = \frac{1}{-z}\left[e^{-zt}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{z} \qquad (\operatorname{Re} z > 0)$$

No. 2 Page 91

۲- نشان دهید

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta}\,e^{-in\theta}\,d\theta \begin{cases} 0 & \text{when} \quad m \ne n \\ 2\pi & \text{when} \quad m = n \end{cases}$$

حل مسائل انتگرال (ادامه)

وقتی $m=n$

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{-in\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi$$

وقتی $m \neq n$

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} \cdot e^{-in\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{i(m-n)} \left[e^{i(m-n)\theta}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{i(m-n)} \Big[\underset{1}{\underset{\downarrow}{e^{i(m-n)2\pi}}} - \underset{1}{\underset{\downarrow}{e^{i(m-n)\times 0}}}\Big] = 0$$

No 3 page 91

۳-

$$\int_0^{\pi} \left(e^{(1+i)x}\right) dx = \int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx + i \int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx$$

$$\int_0^{\pi} e^{(1+i)x}\, dx = \frac{1}{1+i}\left[e^{(1+i)x}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{1+i}\left[e^{(1+i)\pi} - e^{0}\right] =$$

$$\frac{e^{\pi}(\cos\pi + i\sin\pi) - 1}{1+i} = \frac{-e^{\pi} - 1}{1+i} = \frac{-(e^{\pi}+1)(1-i)}{1+1} = \frac{-(e^{\pi}+1)}{2} + i\,\frac{e^{\pi}+1}{2}$$

با مساوی قرار دادن قسمت های حقیقی و موهومی دو انتگرال فوق بدست می آیند.

۵-

$f(z) = z-1$ از $z=0$ تا $z=2$

$\int_C f(z)\, dz$

الف: $z = 1 + e^{i\theta}$ $\quad \pi \leq \theta \leq 2\pi$

ب: $0 \leq x \leq 2$ از محور حقیقی

الف: $$\int_C (z-1)\, dz = \int_{\pi}^{2\pi} (\cancel{1} + e^{i\theta} \cancel{-1})\, i e^{i\theta}\, d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} i e^{2i\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{i}{2i}\left[e^{2i\theta}\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[e^{4\pi i} - e^{2\pi i}\right] = 0$$

الف: $$\int_C (z-1)\, dz = \int_0^2 (x-1)\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^2 = 0$$

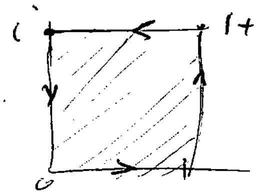
۳

حل مسائل انتگرال

NO. 3 P. 100

۶- $f(z)=\pi\exp(\pi\bar{z})$ مرز یک چهارگوش با رئوس در نقاط 0 , 1 , i , $1+i$ و جهت چرخش مثبت است

$$\int_C f(z)dz = \int_C \pi\exp(\pi\bar{z})dz$$



$$= \int_0^1 \pi\exp(\pi x)dx + \int_0^1 i\pi\exp(\pi - i\pi y)dy + \int_1^0 \pi\exp(x\pi+i\pi)dx + i\int_1^0 \pi\exp(-i\pi y)dy$$

$$= \pi\int_0^1 \left[\exp(\pi x) \underline{+} \exp(\pi x \underline{+} i\pi)\right]dx + i\pi\int_0^1 \left(e^{\pi}e^{-i\pi y} - e^{-i\pi y}\right)dy$$

$$= 2\pi\int_0^1 e^{\pi x}dx + i\pi(e^{\pi}-1)\int_0^1 e^{-i\pi y}dy = 2\left[e^{\pi x}\right]_0^1 - (e^{\pi}-1)\left[e^{-i\pi y}\right]_0^1$$

$$= 2(e^{\pi}-1) + 2(e^{\pi}-1) = 4(e^{\pi}-1)$$

NO. 4 Page 100

۷-

$$f(z)=\begin{cases}1 & y<0\\ 4y & y>0\end{cases} \qquad y=x^3 \qquad \text{از } -1-i \text{ تا } 1+i$$

$$\int_C f(z)\,dz = \int f(x,y)(dx+idy) \Rightarrow \int_{-1-i}^{1} 1\,dz = 2+i \quad @\ f(z)=1$$

$$\int 4y\,(dx+idy) = \int_{-1}^{1} 4x^3dx + i\int_0^1 4y\,dy = \left[x^4\right]_{-1}^{1} + i2\left[y^2\right]_0^1 = 2i$$

$@\ f(z)=4y$

$$\int f(z)dz = 2+i+2i = 2+3i$$

۸-

NO. 5 P. 100

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} 1\,dz = \left[z\right]_{z_1}^{z_2} = z_2 - z_1$$

۴

حل مسائل انتگرال

NO. 6 p. 100 —9

$C \to : |z|=1 \qquad 0<\theta<2\pi \qquad |z|>0$

$\theta \downarrow \arg z$

$$\int_C z^{-1+i}\, dz = \int \exp[(-1+i)\log z]\, dz$$

$$\log z = \cancel{\ln 1}_{0} + i\theta \to z = e^{i\theta} \to dz = i e^{i\theta} d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \exp[(-1+i)\cdot i\theta]\cdot i\cdot e^{i\theta}\cdot d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{-\theta}\, d\theta =$$

$$= -i\left[e^{-\theta}\right]_0^{2\pi} = -i\,(e^{-2\pi}-1)$$

NO. 7. P. 100 —۱۰

$$\int_C z^m z^{-n}\, dz \qquad \text{اگر } m=n \Rightarrow \int_C 1\, dz \overset{\vee}{=} \int_0^{2\pi} 1\, d\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$\text{اگر } m \neq n \qquad \int z^{m-n}\, dz = \frac{1}{m-n}\left(z^{m-n+1}\right] = \frac{1}{m-n}\left[e^{i\theta(m-n+1)}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{m-n+1}\left[e^{2\pi(m-n+1)} - e^0\right] = 0$$

—11

NO. 8 p. 100

$$z = \sqrt{4y^2} + iy \Rightarrow x = \sqrt{4-y^2} \qquad dx = -\frac{2y}{2}(4-y^2)^{-\frac{1}{2}} dy$$

$y_1 = -2 \longleftrightarrow x_1 = 0$

$y_2 = 2 \longleftrightarrow x_2 = 0$

$$I = \int_C \bar{z}\, dz = \int_{-2}^{2} \left[\sqrt{4-y^2} - iy\right](dx + i dy) = \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{4-y^2} - iy\right)\left(-y(4-y^2)^{-\frac{1}{2}} + i\right) dy$$

$$\int_{-2}^{2} \left(-y + i\sqrt{4-y^2} + iy^2(4-y^2)^{-\frac{1}{2}} + y\right) dy = \int_{-2}^{2} \left(i(4-y^2)^{\frac{1}{2}} + y^2(4-y^2)^{-\frac{1}{2}}\right) dy = i\int_{-2}^{2} \frac{4}{\sqrt{4-y^2}}\, dy$$

(۵)

حل مسائل انتگرال

-۱۲

No. 9 Page 100

$|z| = 2 \quad z = 2 \;-\; z = 2i$ ربع اول

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2-1} \right| \leq M.L \leq \frac{\pi}{3} \qquad L = \frac{1}{4}\, 2\pi R = \frac{2\pi}{4} \times 2 = \pi$$

$$M \geqslant |f(z)|$$

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z^2 - 1| = \begin{cases} 5 \;@\; \theta = \frac{\pi}{2} \\ 3 \;@\; \theta = \pi \end{cases} \qquad \frac{1}{|z^2-1|} \leq \frac{1}{3}$$

کران پایین؟

پس $M.L = \frac{1}{3} \cdot \pi = \frac{\pi}{3}$

-۱۳

NO. 11 P. 100

در مثلث 0 ، $3i$ ، -4

$$\left| \int_C (e^z - \bar{z})\, dz \right| \leq 60 \qquad L = 3 + 4 + 5 = 12$$

$|e^z - \bar{z}| \leq M$ کران بالای $f(z)$ در مسیر C

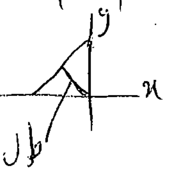
$$|e^z - \bar{z}| \leq |e^z| + |z|$$

$|e^z - \bar{z}| \;@\; z = 0 \;=\; 1$ $\qquad |e^z| = |e^x| \quad -4 < x < 0$

$|e^z - \bar{z}| \;@\; z = 3i \;=\; \cos^2 3 + (\sin 3 - 3)^2 < 4$ $\qquad |e^x| \leq 1$

$|e^z - \bar{z}| \;@\; z = -4 \;=\; |e^{-4} + 4| < 5$ $\qquad |\bar{z}| = |z| \leq 4$

$|z|$ پس 5 کران بالای $f(z)$ هست پس



$M = 5 \qquad M.L = 5 \times 12 = 60$

$$\left| \int (e^z - \bar{z})\, dz \right| \leq M.L = 60$$

طول این خط $|z|$ است که در $z=-4$ حداکثر است

حل مسائل انتگرال

NO. 13 $\quad C_0:$ $\quad$ -۱۴

$|z-z_0|=R$

$z=z_0+Re^{i\theta} \qquad -\pi \le \theta \le \pi$

(a) $\displaystyle\int_{C_0}\frac{dz}{z-z_0}=2\pi i$

$dz=iRe^{i\theta}d\theta$

$$\int \frac{e^{i\theta}}{Re^{i\theta}}\cdot iRd\theta = i\left[\theta\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi i$$

(b) $\displaystyle\int_{C_0}(z-z_0)^{n-1}dz=0$

$n=0,\pm1,\pm2\ldots$

$$\int \left(Re^{i\theta}\right)^{n-1}\cdot iRe^{i\theta}\cdot d\theta = i\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta n}\,d\theta$$

$$=\frac{i}{in}\left[e^{i\theta n}\right]_{-\pi}^{+\pi} = 0$$

(c) $\displaystyle\int_{C_0}(z-z_0)^{a-1}dz = i\,\frac{2R^a}{a}\sin(a\pi)$ $\quad$ حقیقی $a\neq 0$

$$\int\left(Re^{i\theta}\right)^{a-1}\cdot Re^{i\theta}\,d\theta = R^a\int_{-\pi}^{\pi}e^{ia\theta}d\theta=\frac{R^a}{ia}\left[e^{ia\theta}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{R^a}{ia}\Big[\underbrace{e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}}_{2i\sin a\pi}\Big] = \frac{R^a}{2a}\sin a\pi$$

حل مسائل انتگرال

۱۵ $R>1 \quad C_R \to |z|=R$ جهت مثبت

$$\left|\int_{C_R} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}\, dz\right| < 2\pi\left(\frac{\pi+\ln R}{R}\right)$$

نامساوی مثلث: $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

$$|z_1|-|z_2| \le |z_1-z_2| \le |z_2|+|z_1|$$

اثبات $|z_1-z_2| = |z_1+(-z_2)| \le |z_1|+|-z_2| = |z_1|+|z_2|$

Computing M: $\quad |f(z)| \le M \quad \forall z \in D$

$$Q(x,y) = |f(x,iy)| = |u(x,y)+iv(x,y)|$$
$$= \sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}$$

وقتی Q ماکزیمم است که $\sqrt{u^2+v^2}$ ماکزیمم باشد و وقتی $\sqrt{u^2+v^2}$ ماکزیمم است که u^2+v^2 ماکزیمم باشد. پس با مشتق جزئی گرفتن زیر رادیکال نسبت به x و y و مساوی صفر قرار دادن آنها می‌توان ماکزیمم زیر رادیکال را بدست آورد.

کران بالا یا کران پایین، واحد نیست که این را با حداقل کران بالا یا حداکثر کران پایین نباید اشتباه کرد. اگر $|f(z)| \le 1$ است مثلاً $|f(z)| \le 2$ هم می‌تواند باشد پس تمام اعداد بالاتر از ۱ کران بالای $f(z)$ هستند.

حل مسائل انتگرال

ادامه حل مسئله ۱۵

در این مسئله حداکثر کران بالای $f(z)$ را بدست می‌آوریم:
بعد از بدست آوردن آن به نامساوی مطرح شده در صورت مسئله می‌رسیم.

$$|z| = R$$

$$f(z) = \frac{\operatorname{Log} z}{z^2} \qquad \int_C f(z)\,dz = \int_C \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}\,dz \leq L.M$$

$$L = 2\pi R \qquad M \geq |f(z)| = \left|\frac{\operatorname{Log} z}{z^2}\right| =$$

$$\frac{|\operatorname{Log} z|}{|z^2|} = \frac{|\ln R + i\theta|}{R^2} \leq \frac{\sqrt{\ln^2 R + \pi^2}}{R^2} \qquad \operatorname{Log} z = \ln R + i\theta \quad -\pi < \theta < \pi$$

$$= \frac{\sqrt{(\ln R + \pi)^2 - 2\ln R\,\pi}}{R^2} \leq \frac{\ln R + \pi}{R^2}$$

$|\ln R + i\theta|$ وقتی حداکثر می‌شود که θ حداکثر باشد یعنی θ پس حداکثر $|\ln R + i\theta| = |\ln R + i\theta| =$

$\ln R$. پس : $M = \dfrac{\ln R}{R^2}$

$$\int_C \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}\,dz \leq L.M$$

حال می‌توان گفت $2\pi \dfrac{(\ln R + \pi)}{R}$ یکی از کرانهای بالای $|f(z)|$ است پس

$$\int_C \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}\,dz < 2\pi\,\frac{\ln R + \pi}{R}$$

حل قضیه کوشی - گورسارت و انتگرال کوشی

- ۱

a) $\displaystyle\int_i^{i/2} e^{\pi z}\,dz = \frac{1}{\pi}e^{\pi z}\Big|_i^{i/2} = \frac{1}{\pi}\left(e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(i+1)$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}\,dz = 2\sin\frac{z}{2}\Big|_0^{\pi+2i} = 2\sin(\pi+2i) = 2(\sin\pi\cosh 2 + i\cos\pi\sinh 2)$

$= -2i\sinh 2$

c) $\displaystyle\int_1^3 (z-2)^3\,dz = \frac{1}{4}(z-2)^4\Big|_1^3 = \frac{1}{4} - (-1)^4 = -\frac{3}{4}$

- ۲

a) $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = \int \frac{z^2}{z-3}\,dz = 0$ $\quad$ $z=3$ خارج از مسیر C است پس

b) $\displaystyle\int_C z e^{-z}\,dz = 0$ $\quad$ زیر تابع زیر انتگرال روی و درون C تحلیلی است

c) $\displaystyle\int_C \mathrm{Log}(z+2)\,dz = 0$ $\quad$ این تابع روی خط $x=-2$ غیرتحلیلی است که خارج از دایره C قرار دارد. پس تابع روی و درون مسیر تحلیلی است

- ۳

b) $\displaystyle f(z) = \frac{z+2}{\sin\frac{z}{2}}$ $\quad$ $\sin\frac{z}{2} = 0 = \sin n\pi \rightarrow \boxed{z = 2n\pi}$

تکین های تابع

چون تکین ها در B قرار ندارند پس $I=0$ است.

- ۵

$\displaystyle\int_{-1}^1 z^i\,dz = \int_{-1}^1 \exp i\,\mathrm{Log}\,z\,dz = \frac{1}{1+i}\, z\, e^{i\,\mathrm{Log}\,z}\Big|_{-1}^1 =$

$\displaystyle= \frac{1}{1+i}\left(e^{i\,\mathrm{Log}\,1} + e^{i\,\mathrm{Log}\,-1}\right) = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)}\left(1+e^{-\pi}\right) = \frac{1-i}{2}\left(1+e^{-\pi}\right)$

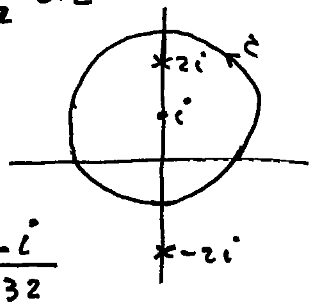
$\mathrm{Log}(1) = 0$ $\qquad$ $\mathrm{Log}(-1) = i\pi$

- ۶

a) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{-z}}{z - i\pi/2}\,dz = 2\pi i \times e^{-z}\Big|_{z=i\pi/2} = 2\pi$ $\quad$ تکین درون C قرار دارد

b) $\displaystyle\oint_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\,dz = 2\pi i \times \frac{\cos z}{z^2+8}\Big|_{z=0} = i\frac{\pi}{4}$ $\quad$ فقط $z=0$ درون C قرار دارد

b) $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2}$ $\quad \oint_c \dfrac{1}{(z^2+4)^2}\,dz = \oint_c \dfrac{1}{(z-i2)^2(z+i2)^2}\,dz$ ۷-



$$= \frac{\phi'(z)}{1!}\Big|_{z=2i} \qquad \phi(z) = \frac{1}{(z+i2)^2}$$

$$\phi'(z) = -2(z+i2)^{-3}\Big|_{z=i2} \qquad \phi'(i2) = -2(4i)^{-3} = \frac{-i}{32}$$

$$I = \frac{-i}{32}$$

تکین مرتبه دو $2i$ داخل c قرار دارد.

$$g(w) = \oint_c \frac{2z^2-z-2}{z-w}\,dz \qquad c: |z| = 3$$ ۸-

اگر $|w|<3$ باشد یعنی تکین در c قرار دارد پس

$$g(w) = 2\pi i \times (2w^2-w-2)\Big|_{w=2} \longrightarrow g(2) = i8\pi$$

اگر $|w|>3$ باشد آنگاه تکین در c قرار ندارد و مقدار انتگرال مساوی صفر خواهد شد.

$$g(w) = \oint_c \frac{z^3+2z}{(z-w)^3}\,dz = \oint \frac{\phi(z)}{(z-w)^3}\,dz$$ w تکین مرتبه سوم است ۹-

$$\phi(z) = z^3+2z \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{دو بار مشتق}} \phi'(z) = 3z^2+2 \quad \text{و} \quad \phi''(z) = 6z$$

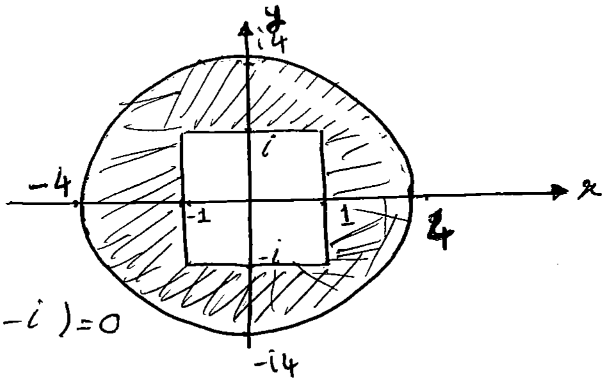
$$g(w) = 2\pi i \cdot \frac{\phi''(z)}{2!}\Big|_{z=w} = i6\pi w$$

اگر w داخل c نباشد $g(w)=0$ است.

Subject: Solution of حل مسائل

Page. Date.

Page 7 _ No 3 _ a)



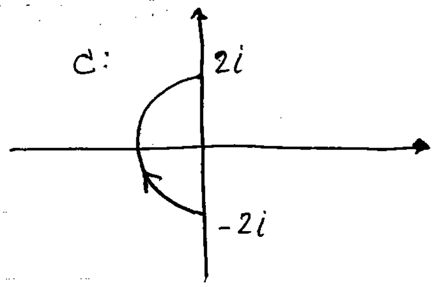
a) $f(Z) = \dfrac{1}{3Z^2+1}$

$3Z^2+1=0 \Rightarrow (\sqrt{3}Z+i)(\sqrt{3}Z-i)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} Z = \dfrac{i}{\sqrt{3}} \\ Z = \dfrac{-i}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \oint_B f(Z)\,dZ = 0 \Rightarrow$ چون نقاط غیرتحلیلی تابع $f(Z)$ در حوزه‌ی B قرار ندارند.

و تمام مسیر انتگرال‌گیری و درون آن در B قرار دارند

Page 7 _ No 4) $\displaystyle\int_{-2i}^{2i} \frac{dZ}{Z} = -\pi i \qquad \log Z = \ln r + i\theta \ (r>0;\ 0<\theta<2\pi)$



$\displaystyle\int_{-2i}^{2i} \frac{dZ}{Z} = \operatorname{Ln} Z = \left[\operatorname{Ln} r + i\theta\right]_{-2i}^{+2i}$

$\begin{cases} 2i = 2e^{i\pi/2} \\ -2i = 2e^{i3\pi/2} \end{cases}$

$\oint \Rightarrow \left[\operatorname{Ln} r + i\theta\right]_{2e^{i3\pi/2}}^{2e^{i\pi/2}} = \left[2+\frac{\pi}{2}i\right] - \left[2+\frac{3\pi}{2}i\right] = -\pi i$

$\oint_c \dfrac{\phi(z)}{z}dz = 2\pi i \cdot \phi(0)$

برای دایره‌ی $|Z|=2$ داریم:

$\oint_c \dfrac{dZ}{Z} = 2\pi i\,\phi(0) = 2\pi i \times 1 = 2\pi i$

Page 8 _ No 9) $\oint_c \dfrac{f(Z)}{(Z-Z_0)^{n+1}}dZ = \dfrac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(Z_0)$

حالت اول) $Z=\omega$ (نقطه‌ی تکین) داخل بازه قرار دارد:

$f(Z) = Z^3 + 2Z$

$\Rightarrow f'(Z) = 3Z^2+2 \Rightarrow f''(Z) = 6Z \Rightarrow f''(\omega) = 6\omega$

$\Rightarrow \oint \dfrac{Z^3+2Z}{(Z-\omega)^3}dZ = 2\pi i \times \dfrac{1}{2!} \times 6\omega = 6\pi i\omega$

حالت دوم) $Z=\omega$ خارج از بازه (حوزه) است پس

$\oint \dfrac{f(Z)}{(Z-\omega)^3}dZ = \phi$

Subject: Solution of جواب مسائل
Page. Date.

Page 9 - No 10) $\dfrac{1}{4z-z^2} = \dfrac{1}{4z} + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{4^{n+2}}$: $0<|z|<4$

$$\frac{1}{4z-z^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{4-z}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{4}}\right)$$

if $\left|\frac{z}{4}\right|<1 \Rightarrow |z|<4 \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{z}{4}} = 1+\left(\frac{z}{4}\right)+\left(\frac{z}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z}{4}\right)^n$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{4}\times\left[1+\left(\frac{z}{4}\right)+\left(\frac{z}{4}\right)^2+\cdots\right]\right) = \frac{1}{4z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+2}} \quad \checkmark$$

very important

*Page 10 - No 2) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$

** برای تابع $f(z)$ در دو حوزه سری لوران اعتبار دارد:

الف) $0<|z|<1$ ب) $|z|>1$

الف) $0<|z|<1 \Rightarrow \dfrac{1}{z^2(1-z)} = \dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1}{z^2}\left(1+z+z^2+\cdots\right)$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^3 + \cdots$$

ب) $|z|>1 \Rightarrow \dfrac{1}{z^2(1-z)} = \dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{-1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}$ $\left(\left|\frac{1}{z}\right|<1\right) \Rightarrow |z|>1$

$$\Rightarrow \frac{-1}{z^3}\cdot\left(1+\left(\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}\right)^3+\cdots\right) = \frac{-1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \cdots$$

Page 10 - No 5) $\dfrac{1}{z^2 \sinh z} = \dfrac{1}{z^3} - \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{z} + \dfrac{7}{360} z + \cdots$

$\oint_c \dfrac{1}{z^2\sinh z}\,dz = ?$ $c: |z|=1$

$$\oint_c \frac{1}{z^2\sinh z}\,dz = \oint_c\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z} + \cdots\right)dz = 2\pi i\left(0-\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{-\pi i}{3}$$

Subject: Solution of
Page. Date.

ادامه‌ی حل مسائل

Page 10_No 7) $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \qquad 0 < |z| < \infty$

بسط تیلر حول نقطه $\Rightarrow z=\phi$

الف) $g(z) = f[f(z)] \quad \Rightarrow g'(z) = f'(f(z)) \times f'(z)$

$\Rightarrow g''(z) = f''[f(z)] \times f'^2(z) + f'[f(z)] \times f''(z)$

$\Rightarrow g'''(z) = f'''[f(z)] f'^3(z) + 2 f''[f(z)] \cdot f''(z) f'(z) + f''[f(z)] \cdot f'(z) f''(z) + f'[f(z)] \cdot f'''(z) \Rightarrow @\ z=0 \begin{cases} f'(z) = 1 \\ f''(z) = 2a_2 \\ f'''(z) = 6a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(z) = 1 \\ g''(z) = 2a_2 + 2a_2 = 4a_2 \\ g'''(z) = 12a_2^2 + 12a_3 \end{cases}$

$\Rightarrow g(z) = z + \frac{(4a_2)}{2!} z^2 + \frac{(12a_2^2 + 12a_3)}{3!} z^3 + \cdots$

ب) $f[f(z)] = f(z) + a_2 f^2(z) + a_3 f^3(z) + \cdots$

$\Rightarrow f[f(z)] = [z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots] + a_2[z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots]^2 + a_3[z + a_2 z^2 \cdots]^3$

$= z + 2a_2 z^2 + 2(a_2^2 + a_3) z^3 + \cdots$

ج) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = \phi \\ a_3 = \frac{-1}{3!} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = a_1 = 1 \\ b_2 = 2a_2 = \phi \\ b_3 = 2 \times (\frac{-1}{3!}) = \frac{-1}{3} \end{cases}$

$\sin(\sin z) =$

$\sin(\sin z) = z - \frac{1}{3} z^3 + \cdots$

Page 11_No 1-e) $\frac{\cos z}{[(\frac{\pi}{2}) - z]^7} \quad @\ z = \pi/2$

$$\frac{\cos z}{[(\frac{\pi}{2}) - z]^7} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - z)}{[\frac{\pi}{2} - z]^7} = \frac{(\frac{\pi}{2} - z) - \frac{(\frac{\pi}{2} - z)^3}{3!} + \frac{(\frac{\pi}{2} - z)^5}{5!} - \cdots}{(\frac{\pi}{2} - z)^7}$$

$$= \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - z)^6} - \frac{1}{6(\frac{\pi}{2} - z)^4} + \frac{1}{120(\frac{\pi}{2} - z)^2}$$

قطب ششم مرتبه 6 می باشد.

Subject: Solution of ادامه‌ی حل مسائل
Page. Date.

Page 11 - No 5)

الف) $f(z_0)=\phi$

$$g(z)=\frac{f(z)}{z-z_0} \Rightarrow \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{z-z_0}=\frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\text{if } f(z_0)=0 \Rightarrow f(z_0)=k(z-z_0)^n$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0}\frac{k(z-z_0)^n}{z-z_0}=k(z-z_0)^{n-1} \Rightarrow g(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{z-z_0} & z\neq z_0\\ k(z-z_0)^{n-1} & z=z_0\end{cases}$$

نقطه‌ی تکین برداشتنی .

ب) $f(z_0)\neq\phi$

$$g(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}=\frac{f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots}{z-z_0}$$

$$\text{so } f(z_0)\neq\phi \Rightarrow g(z)=\underbrace{\frac{f(z_0)}{z-z_0}}_{\text{قطب ساده مرتبه اول}}+f'(z_0)+\frac{f''(z_0)}{2}(z-z_0)+\cdots$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}[g(z)]=f(z_0)$$

Page 12 - No 9) الف) $\csc z=\frac{1}{\sin z}$; $\sin z=0 \Rightarrow z=0\,;n\pi$

$z=n\pi\,;\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

$$\Rightarrow z=0 \to \text{قطب ساده} \Rightarrow \lim_{z\to0} z\csc z=\lim_{z\to0}\frac{z}{\sin z}=1 \checkmark$$

ب) $f(z)=\csc z=\frac{1}{\sin z} \Rightarrow z=0 \longrightarrow$ قطب ساده

$$\varphi(0)=\frac{P(0)}{q'(0)}\ ;\ P(0)=1\ ;\ q=\sin z \Rightarrow q'=\cos z \Rightarrow q'(0)=1$$

$$\Rightarrow \varphi(0)=1=\operatorname{Res}[f(z)] \checkmark$$

Page 12 - No 12-a) $\oint_C \tan z\,dz \quad c:|z|=2 \quad \tan z=\frac{\sin z}{\cos z} \quad z=\frac{2n+1}{2}\pi$, $n=0,+1,+2$

$$\Rightarrow B=\frac{P}{q'}=\frac{\sin\pi/2}{-\sin\pi/2}=-1 \Rightarrow \oint_C \tan z\,dz=-2\pi i$$