

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \begin{matrix} m \\ \boxed{} \\ n \end{matrix}$$

$$N(A) = \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^n}}{\vec{x}} \mid A\vec{x} = \vec{0} \right\} = \text{set of null-vectors of } A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$A\vec{v} = 0$

$N(A)$ linear?

$$\vec{x}, \vec{y} \in N(A) \stackrel{?}{\Rightarrow} \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in N(A)$$

$$\downarrow$$

$$Ax = 0$$

$$Ay = 0$$

$$A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha 0 + \beta 0 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in N(A)$$

null-space of A is a linear subspace.

$$Ax = b \Rightarrow \begin{matrix} \textcircled{E} \\ \downarrow \\ \textcircled{F} \end{matrix} Ax = Fb$$

$$\begin{matrix} \textcircled{A} \\ \downarrow \\ \textcircled{E} \end{matrix} x = 0 \iff \begin{matrix} \textcircled{E} \\ \downarrow \\ \textcircled{A} \end{matrix} x = 0$$

invertible

$$Ax = 0$$

$$\underbrace{A \circledE \circledE^{-1}}_V x = 0$$

$$\rightarrow \begin{matrix} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{1} ? ? ? \\ \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \\ \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \\ \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \\ \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \textcircled{X} x x x x \\ 0 \textcircled{X} x x x x \\ 0 0 \textcircled{X} x x x \\ \vdots \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \\ \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \\ \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \\ \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \\ \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \\ \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{0} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 7 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & -12 & -12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

LA 12 III

row echelon form

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -6z \\ +4z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6z \\ +4z \end{bmatrix}$$

$$-4y = 4z \Rightarrow y = -z$$

$$x + 5y = -6z \Rightarrow x - 5z = -6z$$

$$x = -z$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ -z \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow z \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$