با نام او

درس ۱ کنترل دیجیتال

ابزارهای ریاضی برای استفاده از تجهیزات دیجیتال در کنترل

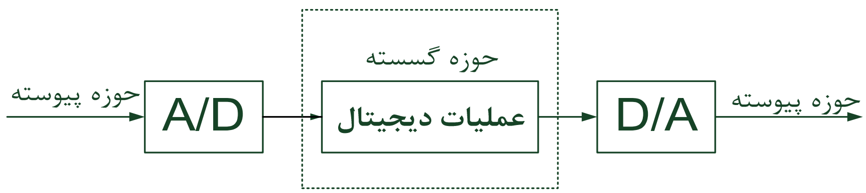
دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی
دانشکدهٔ مهندسی برق

نگارنده: حیرانی نوبری

۱) ابزارهای ریاضی برای استفاده از تجهیزات دیجیتال در کنترل

ما عموماً درگیر کنترل سیستمهایی هستیم که با فرضِ زمان پیوسته‌اند. ولی با توجه به پیشرفتی که در فن دیجیتال صورت پذیرفته شده است، چه کامپیوترهای دیجیتال و چه آی-سی‌های مبدل سیگنالهای پیوسته به دیجیتال و بر عکس و یا میکرو کنترل‌ها و غیره و چه سنسورهای ذاتاً دیجیتال مانند انکودرهای چرخشی و خطی، بهر حال سعی می‌کنیم از تجهیزات دیجیتال در کلیه فرآیندهای فن‌آوری اطلاعات، بهره بگیریم. امروزه نمونه‌های فراوانی را از این بهره‌گیری می‌توانید مشاهده کنید از اتاقهای فرمان شبکه‌های قدرت گرفته تا روباتها و ماشین افزارهای CNC وحتی عکاسی.

آنچه معمولاً در همه این موارد صورت می‌گیرد چیزی است مشابه آنچه در شکل ۱ نشان داده شده است. برای اینکه کاملاً مراقب همه تحولات در این مسیر باشیم میبایست ابزارهای ریاضی مطمئنی را در گذار از پیوسته به دیجیتال و بر عکس در اختیار بگیریم.



شکل (۱)

۱-۱) گذار از پیوسته به دیجیتال

در گذار از پیوسته به دیجیتال دو اتفاق می افتد :

اول : نمونه برداری در فواصل زمانی معین (گذار از پیوسته به گسسته)

دوم : گنجاندن در فواصل معین اعداد یا پیمانه کردن (گذار از گسسته به دیجیتال)

یعنی اولاً اطلاعات فقط در آن زمانهای نمونه‌برداری ضبط می‌گردد. مقادیری که بین این فواصل زمانی موجودند، حداقل ظاهراً، از دست می‌روند که یا واقعاً برای ما مهم نبوده‌اند و یا دوباره بازسازی آنها برای ما ممکن است و یا واقعاً اشتباهاتی رخ داده است. این بحث در جای خود مفصلاً رسیدگی خواهد شد.

ثانیاً چگونگی اطلاعات نیز تغییر کرده است. قبلاً می‌توانست هر عدد حقیقی بین ۰و۱ را بخود اختصاص دهد ولی حالا، مثلاً، بین این دو عدد فقط یکی از ۹ عدد از ۰.۱ الی ۰.۹ را می‌تواند اعلام کند. این را پیمانه کردن یا کوانتیزه کردنِ سیگنال نیز می‌گویند.

تمرین ۱- (شبیه سازی کامپیوتری یک مبدل پیوسته به دیجیتال) یک برنامه در فضای Matlab

بنویسید که ورودی آن سیگنال دلخواه x(t) بوده و خروجی آن اعدادی باشد که از روی خروجی یک A/Dی ۸ بیتی ساخته شده‌اند. فرض کنید حداقل و حداکثر مبدل را بین 0 تا 15 تنظیم کرده‌ایم. ضمناً فرض کنید سیگنال ورودی از یک تابع نوشته شده در همان فضا قابل خواندن است.

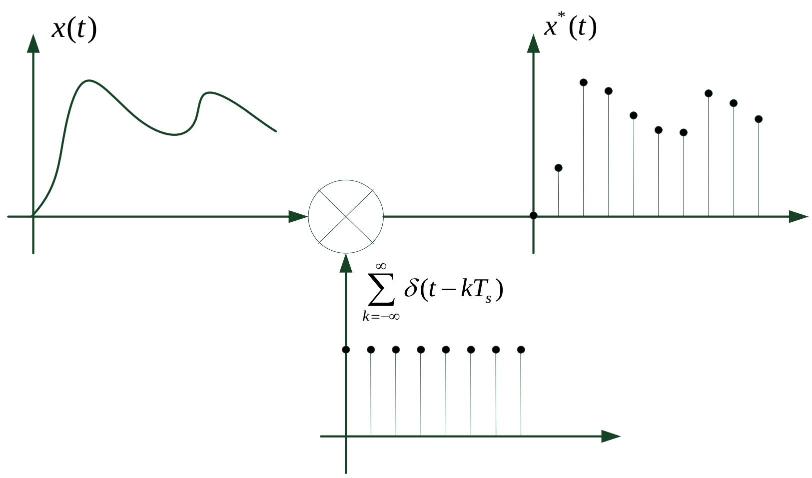
اتفاق دوم در عمل، عموماً اثرات غیر اساسی جانبی دارد و در تحلیل رفتار دینامیکی و پایداری چندان موثر نمی‌باشد و عموماً اثر آن نهایتاً به صورت یک خطای در دقت مدل می‌گردد. لذا در ادامه توجهی به اتفاق دوم نخواهیم داشت و اصولا به ابزارهای ریاضی خواهیم پرداخت که ما را در گذار از تحلیل در زمان پیوسته به تحلیل در زمان گسسته و بر عکس کمک کند، بدون توجه به پدیدهٔ پیمانه شدن!

۱-۱-۱) نمایش سیگنالهای نمونه برداری شده در حوزهٔ پیوسته و در حوزهٔ گسسته

سیگنالِ نمونه‌ها، x_d ، در حوزهٔ گسسته می‌تواند بصورت یک سری ضربه ولی با اندازه‌هایِ سیگنال در زمان‌های نمونه‌برداری بیان گردد، یعنی:

$$x_d(n) = x_c(nT_s) \qquad \text{یا} \qquad x_d(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_c(kT_s)\,\delta(n-k) \qquad (۰)$$

لذاست که نمونه برداری از سیگنالِ دلخواه x(t) در فواصل زمانی معین T_s را می‌توان مانند آنچه در شکل زیر آمده است به صورت یک سری ضربه و یا حاصلضرب سیگنال با قطار ضربهٔ با همین فواصل زمانی، مدلسازی نمود. این طرز نمایشِ ریاضی برای نمایشِ سیگنال نمونه‌برداری شده در حوزهٔ پیوسته کاربردِ جدی دارد. در واقع هرجا که نیاز باشد تا سیگنالِ نمونه‌ها که اصالتاً در جهان گسسته موجودند، در جهان پیوسته نیز بیان گردند، از این تعبیرِ قطار ضربه‌ها کمک گرفته می‌شود.



شکل (۲)

عموماً برای نمایش سیگنال نمونه برداری شده از علامت ستاره استفاده می‌گردد. به این ترتیب سیگنال نمونه‌برداری شده به صورت زیر از رویِ سیگنال اصلی قابل بیان است:

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t-kT_s) \qquad (1)$$

همین جا مفاهیم پریود نمونه برداری T_s تعداد نمونه‌ها در واحد زمان (به هرتز)f_s و فرکانسِ زاویه‌ایِ نمونه برداری ω_s را یادآور می‌شویم.
همانگونه که در بالا نیز آمد، نمایش همین سیگنال نمونه برداری شده در حوزهٔ گسسته فقط با یک زیر نویس برای متغیر مربوطه که نشان دهندهٔ شماره ترتیب آن است انجام میگردد البته نحوهٔ نمایش این زیر نویس متفاوت است که ما انواع آن را آورده‌ایم ولی ما در اینجا نمایش اول را انتخاب کرده‌ایم.

$$x[k] = x(k) = x_k \triangleq x(kT_s)$$

دقت کنید که نمایش $x^*(t)$ و $x[k]$ از لحاظ مفهومی معادلند ولی یکی در حوزهٔ پیوسته و دیگری در حوزهٔ گسسته بکار میرود.

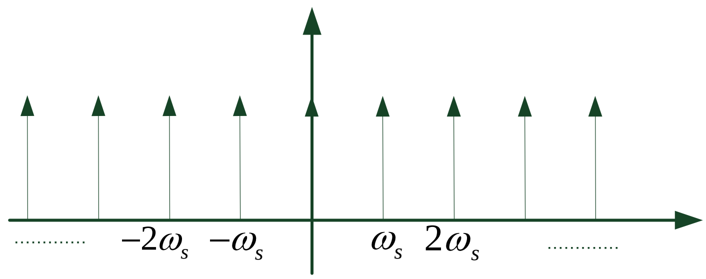
۱-۱-۲) ارتباط طیف (تبدیل فوریهٔ) سیگنال اصلی و سیگنال نمونه برداری شده

توجه کنید که چون قطار ضربه، سیگنالی متناوب است، طیفِ آن نیز قطار ضربه خواهد بود در مضارب فرکانس نمونه برداری. انرژی ضربه‌ها نیز در هر یک از این مضارب برابر ضریب سری فوریهٔ مربوط به آن مضرب فرکانسی است که در اینجا برای همه یکسان بوده و بدست می‌آید:

$$a_k = \frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \qquad (2)$$

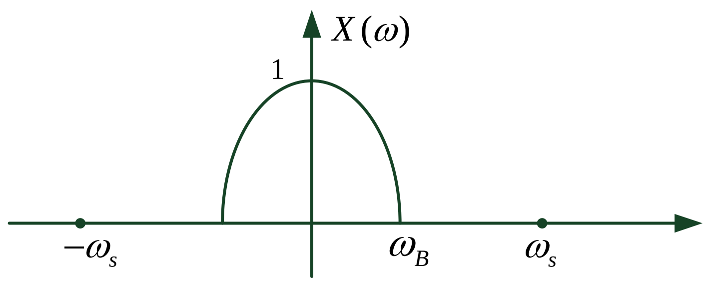
پس طیف قطار ضربه خواهد بود:

$$\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(j\omega - jk\omega_s)$$



شکل (۳)

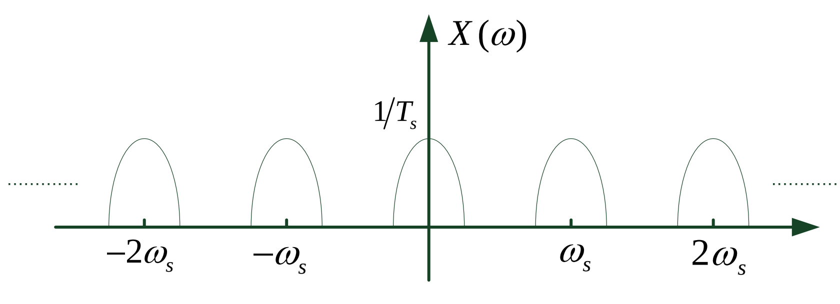
حال چنانچه پهنای باند سیگنال اصلی کوچکتر از نصب فرکانس نمونه برداری باشد، مشابه شکل زیر،



شکل (۴)

آنگاه طیف سیگنال نمونه برداری شده، از قاعدهٔ کانولوش، خواهد شد:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega - k\, j\omega_s) \qquad (۳)$$

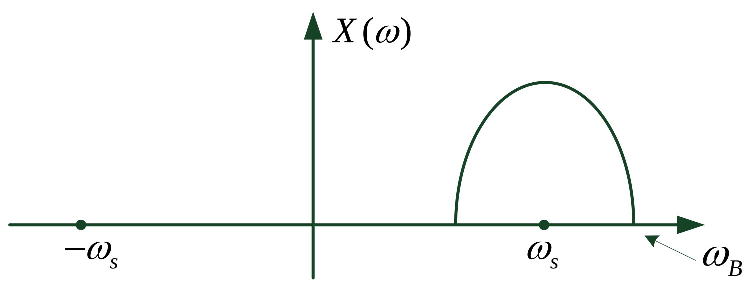


شکل (۵)

اول توجه کنید که ظاهراً اطلاعات سیگنال اصلی حفظ شده و از بین نرفته است و همان طیف اصلی را در طیف سیگنال نمونه برداری شده نیز عیناً داریم پس خوشبختانه نمونه برداری، خدشه‌ای در اطلاعات ایجاد نکرده است.

ولی در عین حال سیگنال نمونه برداری شده ظاهراً حاوی اطلاعات جدیدی است که انتظار نداشتیم و گویا همان طیف اصلی را عیناً، با انتقال به مضارب فرکانس نمونه برداری، حاضر قلمداد نموده است. به نظر شما واقعاً چرا چنین پندار ناصحیحی پس از نمونه برداری بوجود آمده است؟

این پندار، ناشی از یک حقیقت مهم است که سیستم نمونه بردار پس از نمونه برداری میخواهد به ما اعلام کند و یا بهتر بگوییم میخواهد اخطار کند که: چه بسا آنچه من به شما در فرکانس مثلا 0 نشان میدهم، اصلاً، متعلق به آن فرکانس نباشد بلکه مثلاً متعلق به فرکانس $\omega_s + 0$ باشد که چون فرکانس نمونه برداری مرا کم انتخاب کرده‌اید، آثار فراز و نشیب واقعی آنرا نمیتوانم اندازه گیری کنم و به شما اعلاک کنم و همینطور الی آخر. برای درک کیفی‌تر فرض کنید که طیف سیگنال اصلی بصورت زیر باشد:



شکل (۶)

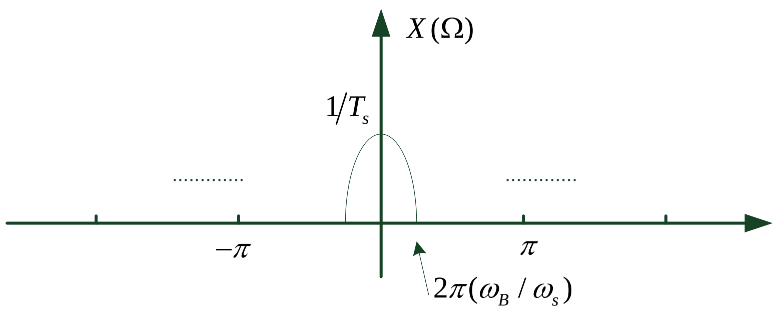
در نتیجه، نمونه بردارِ قبلی، باز هم، همان نتیجهٔ قبلی را بدون کم و کاست بیرون میدهد و یعنی باز هم در فرکانس صفر چیزی را اعلام میکند که حال میدانیم، دور از واقعیت است. به همین دلیل برای اخطار به ما، محتاطانه همان چیزهای که دیده را در فرکانسهای مضرب نمونه برداری نیز اعلام میکند.

تمرین ۲- به نظر شما برای سیگنال بالا فرکانسِ نمونه برداری مناسبی انتخاب شده است ؟ بحث کنید.

تمرین ۳- به نظر شما اگر سیگنال از فرکانس صفر تا فرکانس 2 KHZ اطلاعات ارزشمندی داشته باشد برای از دست ندادن اطلاعات، بهتر است فرکانس نمونه برداری، چقدر انتخاب گردد ؟

طبیعی است که مفهوم فرکانس که درحوزه پیوسته داشتیم دیگر اعتبار خود را در حوزۀ گسسته از دست بدهد. لذا مفهوم زاویۀ فرکانس را به جای فرکانس بصورتیکه در زیر میآید جایگزین می-کنیم:

$$X_d\left(\Omega = 2\pi\frac{\omega}{\omega_s}\right) \;\triangleq\; X^*(\omega) \;\;\rightarrow\;\; = \frac{1}{T_s}X_c(\omega) \qquad (۴)$$



شکل (۷)

این طرز نمایش پاسخ فرکانسی (طیف)، فقط در حوزۀ گسسته معتبر خواهد بود. همانطور که گفته شد تساوی آخر موقعی برقرار است که پهنای باند سیگنال اصلی محدود بوده و فرکانس نمونه برداری نیز حداقل دو برابر پهنای باند انتجاب شده باشد. چناچه یکی از دو شرط فوق بر قرار نباشد، طیف سیگنال گسسته در فرکانسهایی که تکرار طیف اصلی روی هم می افتد، مخلوط شده و نتیجۀ دیگری خواهد داد.

حال بعنوان یک جمع بندی نهایی، مثالی را در نظر بگیرید. فرض کنید که از سگنال پیوسته‌ای پس از نمونه برداری با فرکانس 6KHZ، بعنوان یک اطلاعات طیف اعلام میگردد: در $\Omega=30^o$ ، اندازه 400 و فاز 32 درجه است. ترجمه این خبر در حوزۀ پیوسته چه خواهد بود و چه اطلاع فرکانسی در مورد سیگنال اصلی میتوان استنتاج نمود؟

داریم:

$$\Omega = 2\pi\frac{f}{f_s} \mapsto 2k\pi + \frac{\pi}{6} = 2\pi\frac{f}{6(KHz)} \quad\mapsto\quad f = (500Hz) + k(6KHz) \;\; k \in Z$$

یعنی در یکی از فرکانسهای فوق و یا در ترکیبی از آنها، اندازهٔ طیف سیگنال پیوستهٔ اولیه 2/3=(4000)/(6000) و فاز آن 32 درجه میباشد.

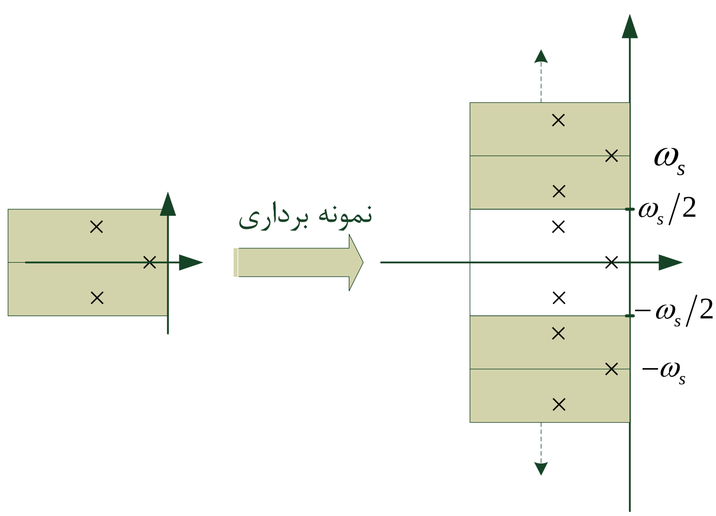
تمرین ۴- اگر بدانیم که فرکانس نمونه برداری از دو برابر پنهای باند سیگنال اصلی بزرگتر است آنگاه اظهار نظر فوق چقدر دقیقتر خواهد شد؟

۱-۱-۳) ارتباط لاپلاس سیگنال اصلی با لاپلاس سیگنال نمونه برداری شده

در این قسمت نه تنها تبدیل لاپلاس سیگنال نمونه برداری شده را از روی تبدیل لاپلاس سیگنال اصلی خواهیم یافت بلکه هر آنچه در قسمت بالا مشاهده کردیم را از مسیری دیگر به دست میآوریم. ابتدا توجه کنید که لاپلاس هر سیگنال $x(t)$ عبارتست از فوریهٔ حاصلضرب آن سیگنال در $e^{-\sigma t}$ که در آن σ یک عدد حقیقی است. به این ترتیب از معادلهٔ 3 نتیجه میشود:

$$X^*(s) = X^*(j\omega) * F(e^{-\sigma t}) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\omega - k\, j\omega_s) * F(e^{-\sigma t}) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(s - k\, j\omega_s) \quad (۵)$$

عبارت فوق یعنی اگر مثلا ترکیب قطبهای $X(s)$ مطابق شکل الف باشد آنگاه ترکیب قطبهای سیگنال نمونه برداری شده مطالق شکل ب خواهد شد که همان ترکیب الف است با این تفاوت که عیناً در ضرایب صحیح فرکانس نمونه برداری تکرار میگردد.



شکل (۸)

حال تابعی از s، طوری تعریف میکنیم که این تکرار را درون خود لحاظ نموده ولی به این شکل ظاهر ننماید. نام آنرا z میگذاریم. این تابع باید به گونه‌ای تعریف شود که داشته باشیم:

$$z(s+jk\omega_s)=z(s) \qquad (۶)$$

بخوبی میدانید که اینچنین تابعی جز تابع نمایی مختلط نیست. لذا تعریف می‌کنیم:

$$z(s)\triangleq e^{sT_s} \;\mapsto\; z(s+j\,k\omega_s)=e^{sT_s+jk\omega_s T_s}=e^{sT_s+j(2\pi k)}=e^{sT_s}=z(s) \qquad (۷)$$

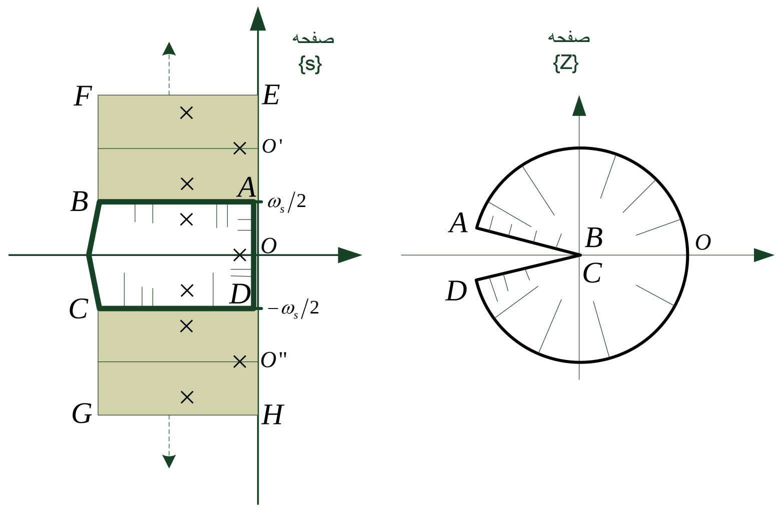
و در نتیجه لاپلاس سیگنال نمونه برداری شده بر حسب متغیر جدید z خواهد بود:

$$X(z)=X^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T_s}\ln(z)}=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c(s+k\,j\omega_s)\Big|_{s=\frac{1}{T_s}\ln(z)} \qquad (۸)$$

اینگونه نمایش دادن لاپلاس سیگنال نمونه برداری شده، فقط در حوزهٔ گسسته مرسوم است و به همین دلیل بجای آنکه به آن ‹‹لاپلاس سیگنال نمونه برداری شدهٔ از x(t) ›› بگوییم، بطور خلاصه، خواهیم گفت: ‹‹z (زدِ) سیگنال گسستهٔ x[n]››. البته در ضمیر خود ارتباط این دو را کاملاً محفوظ میداریم.

در بالا چون میخواستیم ارتباط لاپلاس سیگنال اصلی را با لاپلاس سیگنال نمونه برداری شده بدست آوریم، از معادلهٔ 3 شروع کردیم. حال قبل از آنکه از معادلهٔ 1 شروع کنیم و برای تبدیل z عبارت دیگری به دست آوریم، ترجیح میدهیم، ابتدا ببینیم: متغیر z که بجای s آمده، چه بلایی بر سر محور موهومی (jω) آورده است که توانسته است از تکرار جلوگیری کند؟ بعبارت بهتر میخواهیم تعریفی را که در معادلهٔ 7 آمده را بیشتر درک کنیم.

برای این کافیست با توجه به شکل زیر مشاهده کنید که تمامی مسیرهای بستهٔ OABCDO و O'EFBAO'و O"DCGHO" و... در صفحهٔ s به مسیر بستهٔ دایرهٔ واحد OABCDO در صفحهٔ z تبدیل میگردند.



شکل (۹)

تمرین ۵- موضوع فوق را با جاگذاری تک تک نقاط در معادلهٔ ۷ تحقیق کنید و ضمناً نشان دهید که سمت چپ محور موهومی در صفحهٔ s به داخل دایرهٔ واحد و سمت راست آن به بیرون دایرهٔ واحد در صفحهٔ z تصویر میگردد.

تمرین ۶- در حوزهٔ پیوسته برای بدست آوردن طیف از روی لاپلاس، بجای s ، $j\omega$ می‌گذاشتیم و تعبیر هندسی آن حرکت روی محور موهومی در صفحهٔ s بود نشان دهید که شبیه این موضوع در حوزهٔ گسسته عبارت است از آنکه بجای z، $e^{j\Omega}$ بگذاریم. ضمن اینکه نشان میدهد Ω همان تعریفی را دارد که در معادلهٔ ۴ آمد، تعبیر هندسی را نیز خودتان بگویید.

تذکر: یک چیزی که عموماً در نوشتار لحاظ میشود این است که وقتی از حرف Ω و z استفاده میشود دیگر لازم نمی‌دانند که اندیس d را در $X_d(\Omega)$ و یا $X_d(z)$، همچنان رعایت کنند و خواننده خود باید متوجه شود که این دو نماد فقط مخصوص حوزهٔ گسسته است.

نکته: فرض کنید تابعی در صفحهٔ مختلط تعریف شده و در یک مسیر بسته‌ای در آن صفحه قطبهایی داشته باشد. حال اگر این صفحهٔ مختلط تحت یک تبدیلی به یک صفحهٔ مختلط دیگر برده شود، آن تابع و آن مسیر بسته نیز به یک تابع دیگری و یک مسیر بستهٔ دیگری در صفحهٔ جدید مبدل می‌شوند. آنگاه قطبها نیز به داخل مسیر بسته در صفحهٔ جدید می‌روند، تحت همان تبدیل.

این موضوع بطور دقیقتر در تمرین ۷ باز خواهد شد.

۱-۱-۴) لاپلاس سیگنال نمونه برداری شده یا زد سیگنال گسستهٔ مربوطه

میدانید که تبدیل لاپلاس و به تبع آن تبدیل زد در سیستمهای گسسته، در تجزیه و تحلیل سیستمهای خطی، ابزار بسیار برنده‌ای هستند لذا بدست آوردن آن از راههای مختلف و دستیابی به تعابیر مختلف ریاضی و فیزیکی آن بسیار حائز اهمیت است.

در قسمت قبل چون عمدتاً می‌خواستیم نشان دهیم که چگونه از تبدیل لاپلاس سیگنال اصلی به تبدیل لاپلاس سیگنال نمونه برداری شده میرسیم و در حقیقت میخواستیم تبدیل زد را پیش بکشیم، لذا از معادلهٔ ۳ شروع کردیم و به نتایج دلخواه رسیدیم. ولی حالا می‌خواهیم مستقیماً از معادلهٔ ۱ شروع کنیم تا عبارتهای دیگری برای تبدیل زد بیابیم و تعابیر جدیدتر.

به این ترتیب تبدیل لاپلاس سیگنال نمونه برداری شده از معادلهٔ ۱ خواهد بود:

$$X^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)e^{-ksT_s} \qquad (۹)$$

بسیار جالب است که توجه کنید که دو عبارت بدست آمده در دو معادلهٔ ۵ و۹، هر دو یک تابع را نشان میدهند و با هم مساویند. حال بیاد بیاورید که عبارت e^{-sT_s} حاکی از یک تأخیر باندازهٔ T_s بود.

بیایید از تعریفی که در قسمت قبل برای z پیشنهاد شد دوباره جایگزین کنیم، می‌بینید که عبارت جدیدی برای سیگنال گسسته یافت میشود.

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \qquad (۱۰)$$

به همین جهت به z^{-1}، عنصر تأخیر نیز میگویند. این عبارت یکی از مهمترین راههای بدست آوردن زد سیگنالها میباشد.

مثال ۱- فرض کنید سیگنال پلهٔ واحد، با پریود T نمونه برداری می‌شود، تبدیل زد سیگنال گسستهٔ بوجود آمده را بیابید.

$$u_{-1}(t) \mapsto u_{-1}[0]=0.5 \;,\; u_{-1}[k]=1 \;\; k\geq 1 \quad \mapsto$$

$$U_{-1}(z) = 0.5+\sum_{k=1}^{\infty} (1)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} - 0.5 = \frac{1-(z^{-1})^{\infty}}{1-z^{-1}} - 0.5 \quad \xrightarrow{|z^{-1}|<1}$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}} - 0.5 = 0.5\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} = 0.5\frac{z+1}{z-1}$$

اگر با کمی اغماض، مقدار پله را در صفر نیز ۱ بگیریم و نه 0.5 ، آنگاه به عبارت زیر میرسیم:

$$Z\left\{\frac{1}{s}\right\} = U_{-1}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

با این اغماض، نمونه برداری شدهٔ پلهٔ واحد پیوسته، منطبق بر پلهٔ واحد گسسته میشود.

مثال ۲- فرض کنید سیگنال $e^{-2t}u(t)$ ، با پریود T نمونه برداری میشود، تبدیل زد سیگنال گسستهٔ بوجود آمده را بیابید.

$$x(t) = e^{-2t}u_{-1}(t) \quad \mapsto \quad x(kT) = e^{-2kT}u_{-1}(kT) \quad \mapsto \quad x[0] = 0.5 \quad , \quad x[k] = \left(e^{-2T}\right)^k \quad , k \ge 1$$

$$\mapsto \quad X(z) = 0.5 + \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-2T})z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-2T}z^{-1})^k - 0.5$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2T}z^{-1}} - 0.5 = 0.5\frac{1+e^{-2T}z^{-1}}{1-e^{-2T}z^{-1}} = 0.5\frac{z+e^{-2T}}{z-e^{-2T}} \quad = \frac{1-(e^{-2T}z^{-1})^{\infty}}{1-e^{-2T}z^{-1}} - 0.5 \xrightarrow{|e^{-2T}z^{-1}|<1}$$

دوباره اگر مقدار پله را در صفر نیز 1 بگیریم و نه 0.5، آنگاه به عبارت زیر می‌رسیم:

$$Z\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-aT}}$$

که بعنوان نمونه با دورهٔ نمونه‌برداری 0.5^{s} ، تبدیل زد خواهد شد:

$$X(z) = Z\left\{\frac{1}{s+2}\right\}_{T=0.5} = 0.5\frac{1+(0.3679)z^{-1}}{1-(0.3679)z^{-1}} = 0.5\frac{z+0.3679}{z-0.3679} \qquad or$$

$$X(z) = Z\left\{\frac{1}{s+2}\right\}_{T=0.5} = \frac{z}{z-0.3679}$$

بیشتر مراجع، شکل دوم را ارائه می‌کنند که پس از حل تمرینهای ۱۳و۱۴و۱۵ بیشتر متوجه خواهید شد که عبارت دقیق، همانست که اول به دست آوردیم. در ادامه ما نیز عموماً از عبارت دوم استفاده می‌کنیم.

مثال ۳- سیگنالی که لاپلاس آن $\frac{1}{(s+a)^2}$ است با پریود T نمومه برداری میشود، تبدیل زد سیگنال گسسته بوجود آمده را بیابید.

$$X(s)=\frac{1}{(s+a)^2}\mapsto x(t)=te^{-at}u_{-1}\mapsto x(kT)=kTe^{-akT}\mapsto x[k]=kT(e^{-aT})^k\ k\geq 0 \quad \mapsto$$

$$\frac{X(z)}{T}=\sum_{k=0}^{\infty}\ k(e^{-aT})^k z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\ k(e^{-aT}z^{-1})^k=\sum_{k=0}^{\infty}\ k(w)^k=w\sum_{k=1}^{\infty}\ k(w)^{k-1}$$

$$=w\left(\sum_{k=0}^{\infty}\ k(w)^k\right)_w^{'}\xrightarrow{|w|<1}w\left(\frac{1}{1-w}\right)_w^{'}=\frac{w}{(1-w)^2}$$

$$X(z)=\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-T}z^{-1})^2}=\frac{Te^{-aT}z}{(z-e^{aT})^2}\quad,\quad |e^{-aT}z^{-1}|<1$$

که بعنوان نمونه با دورهٔ نمونه برداری، برابر 0.1 ثابت زمانی سیگنال، تبدیل زد خواهد شد:

$$T=\frac{1}{10}\frac{1}{a}=\frac{1}{10a}\mapsto X(z)=\frac{1}{10a}\frac{e^{-0.1}z^{-1}}{\left(1-e^{-0.1}z^{-1}\right)^2}\quad=$$

$$=\frac{1}{10a}\frac{0.9048z}{\left(z-0.9048\right)^2}\qquad 0.9048|z^{-1}|<1\quad\mapsto\quad |z|>0.9048$$

تمرین ۷- با توجه به این که هر تابع لاپلاس خطی کسری را میتوان بر حسب مودها (قطبها)ی سیستم، تجزیهٔ کسر نمود و همچنین با توجه به چند مثال بالا الگوریتمی را ارائه دهید که بتوان از لاپلاس سیگنالی به زد نمونه برداری شدهٔ همان سیگنال رسید و برای سه سیگنال زیر که لاپلاسشان داده شده، زد نمونهای آنها را بدست آورید. پریود نمونه برداری را T بگیرید.

$$X(s)=\frac{20(s+1)^2}{(s+2)^2(s+5)}\qquad Y(s)=\frac{200}{s(s^2+20s+200)}\qquad Q(s)=\frac{4}{s^2+4}$$

با توجه به تمرین و مثالهای بالا، حالا باید بتوان حدس زد که هر قطب در صفحهٔ s بعد از نمونه برداری چگونه و به چه قطبی در صفحهٔ z مبدل میشود و ارتباط رفتار زمانی آن دو نیز کاملاً روشن است. برای تسلط و آشنایی بیشتر بهتر است تمرینهای زیر زا به دقت انجام دهید. در تمامی موارد از شکل ۹ و تعریفی که در معادلهٔ 7 آمد استفاده کنید.

تمرین ۸- نشان دهید هر قطب حقیقی منفی از صفر تا بینهایت در حوزهٔ پیوسته به یک قطب حقیقی از 1 تا 0 در حوزهٔ گسسته تبدیل میشود و نیز هر قطب حقیقی مثبت از صفر تا بینهایت در حوزهٔ پیوسته به یک قطب حقیقی بین ۱ تا بینهایت در حوزهٔ گسسته تبدیل میشود، بطوریکه

$$s = a \quad \mapsto \quad z = e^{aT_s}$$

در مورد تأثیر نحوهٔ انتخاب T_s بحث کنید.

تمرین ۹- یک برنامه در محیط Matlab بنویسید که با مقدار ثابت a (مثلا 1-) شروع کرده و با امکان تغییر فرکانس نمونه برداری تاثیر آنرا روی طیف سیگنال نمونه برداری شده در مقایسهٔ آن با طیف سیگنال اصلی مشاهده کنید و نتیجه گیری کنید برای آنکه از سیگنال اصلی مشخصات اساسی به حوزهٔ گسسته منتقل شود، فرکانس نمونه برداری حداقل چقدر باید باشد؟ و نیز بگویید تحت شرایطی که این فرکانس مناسب انتخاب شود، طیف گسسته تا چه فرکانسی تقریباً معتبر است؟ اثر اختلاط فرکانسی را نیز تحت شرایط مختلف دقیقا توجیه کنید. (راهنمایی: از دستورهای dbode و bode استفاده کنید) این تمرین را با هر دو نوع حلی که در مثال ۲ ارائه شد، تکرار کنید و بگویید به نظر شما کدامیک بهتر است؟

تمرین ۱۰ - نشان دهید تمام قطبهای مزدوج مختلط مقدار حقیقی ثابت در حوزهٔ پیوسته به دایره‌ای با شعاع ثابت در حوزهٔ گسسته تبدیل میگردند و بسته به فرکانس نوسان آنها از $\omega_d = 0$ تا $\omega_d = \omega_s / 2$، روی دایرهٔ مذکور از زاویهٔ $\Omega=0$ تا $\Omega=\pi$ قرار میگیرند بطوریکه

$$s = \alpha \pm j\omega_d \quad \mapsto \quad z = re^{\pm j\Omega} = r\angle \pm \Omega \qquad r = e^{\alpha T_s} \quad \Omega = \pm 2\pi \frac{\omega_d}{\omega_s}$$

تمرین ۱۱- برنامه‌ای در محیط Matlab بنویسید تا موضوع تمرین ۱۰ مملوس گردد. مثلاً $a = 1$ بگیرید و با فرض f_s=10Hz، f_d را از f_d=0Hz تا f_d=5Hz تغییر دهید و هر بار مکان قطبها در حوزهٔ

پیوسته و گسسته را بدست آورده و با رسم شکل مقایسه کنید و ضمنا سیگنالهای پیوسته و گسستهٔ معادل آنها را همراه هم رسم کرده و مقایسه کنید.

تمرین ۱۲- تمرین ۱۱ را دوباره تکرار کنید ولی این بار بجای مقایسهٔ رفتار در حوزهٔ زمان آنها را در حوزهٔ فرکاتس مقایسه کنید و نیز سعی کنید در هر f_a با تغییر فرکانس نمونه برداری، مشابه آنچه در تمرین ۹ کاوش کردید، را دوباره تکرار کنید.

تمرین ۱۳- (طیف سیکنال نمونه برداری شده و پدیدهٔ اختلاط فرکانسی) با توجه به زد سیگنال پلهٔ واحد نمونه برداری شده که در مثال ۱ بدست آمده، طیف آنرا بین π-و π بدست آورده و بطور تقریبی رسم کنید و برای مقدار آن در π، با توجه به مطالبی که حول معادلهٔ 4 آمده، تعبیر و توجیهی ارائه کنید. (آیا مشاهده میکنید محدود نبودن پنهای باند سیگنال چگونه باعث اختلاط فرکانسی شده است؟)

تمرین ۱۴- چنانچه دقت کردید در مثالهای بالا، با تعربف دقیق پله در لحظهٔ صفر کار را انجام دادیم. حال اگر بخواهیم سیگنال گسسته‌ای که از نمونه برداری پلهٔ واحد بدست می‌آید در لحظهٔ صفر مقدار یک داشته باشد و نه نیم، کافیست مثلا بجای اینکه از $u(t)$ نمونه برداری کنیم، از $u(t+T_s/2)$ نمونه برداری کنیم. حال برای این حالت، مثال ۱ را و سپس تمرین ۱۳ را دوباره حل کنید.

تمرین ۱۵- مثال ۲ را دوباره با جابجا کردن $u(t+T_s/2)$ بجای $u(t)$ حل کنید. آیا این جابجایی در حل مثال ۳ تاثیری دارد؟ توضیح دهید.

راهی که در اینجا با چتد مثال برای بدست آوردن زد یک سیگنال چه از روی خود سیگنال و چه از روی لاپلاس آن ارائه شد، میتواند با کمک خواص تبدیل زد، راهی برای بدست آوردن زد سیگنالهای پیچیده تر دیگری نیز باشد و به این ترتیب بسیاری از آنچه را که در جداول مربوطه می‌بینید، میتوانید خودتان نیز بدست آورید. خواص تبدیل زد در جدولی ارائه شده‌اند.

۱-۱-۵) رسیدن از زد سیگنال به خود سیگنالِ گسسته (معکوس تبدیل زد)

یکی از ساده ترین و متداولترین راه دستی برای رسیدن از زد سیگنال به خود سیگنال پیمودن راه بر عکسی است که رد بالا آموختیم، یعنی تجزیهٔ کسر و سپس یافتن معادلهای گسستهٔ تک تک کسرهای بدست آمده از روی جدول. البته همانطور که در مثال آتی خواهید دید، عموما بجایِ $X(z)$ ، $X(z)/z$ را تجزیه کسر می کنند.

یک راه دیگر، تقسیم صورت به مخرج است که این راه در مواردی استفاده میشود که خواهان تعداد محدودی ازسیگنال باشیم.

راه دیگر، حل معادلهٔ تفاضلی مربوط به آن تبدیل زد است که این را در بخش مربوط به معادلات تفاضلی حالت، جاییکه از تحقق سیستمهای دیجیتال صحبت خواهیم کرد، شرح میدهیم. این راهها نیز بیشتر هنگامی استفاده میشوند که بخواهیم بوسیلهٔ کامپیوتر محاسبه کنیم.

راه‌حلهای ریاضی دیگری نیز هست ولی چون اکثر آنها مفهوم فیزیکی جدیدی را القا نمی‌کنند چندان مد نظر ما نیستند. در ادامه با یک مثال سه روش فوق را مرور می‌کنیم.

مثال ۴- از روی X(z)، x[n] را به هر سه روش حداقل تا n=4 تعیین کنید.

$$X(z)=\frac{z^2+z+2}{(z-1)(z^2-z+1)}$$

روش تجزیهٔ کسر: X(z)/z را به عوامل اول تجزیه کرده و از روی جدول جاگذاری می‌کنیم:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z^2+z+2}{z(z-1)(z^2-z+1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z-1e^{j60^o}}+\frac{D}{z-1e^{-j60^o}}\quad\Rightarrow A=\frac{2}{(-1)(1)}=-2, B=\frac{4}{(1)}=4$$

$$C=\frac{1e^{2j60^o}+1e^{j60^o}}{1e^{j60^o}(1e^{j60^o}-1)(1e^{j60^o}-1e^{-j60^o})}=-1+1.1547j\quad,\quad D=C^o$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{-2}{z}+\frac{4}{z-1}+\frac{-2z-1}{z^2-z+1}\quad\Rightarrow\quad X(z)=-2+4\frac{z}{z-1}-2\frac{z^2+0.5z}{z^2-z+1}$$

$$=-2+4\frac{z}{z-1}-2\left(\frac{z^2-0.5z}{z^2-z+1}+\frac{z}{z^2-z+1}\right)=-2+4\frac{z}{z-1}-2\frac{z^2-0.5z}{z^2-z+1}-\frac{2}{(\sqrt{3}/2)z^2-z+1}$$

$$=-2+4\frac{z}{z-1}-2\frac{z^2-0.5z}{z^2-z+1}-\frac{2}{(\sqrt{3}/2)}\frac{z(\sqrt{3}/2)}{z^2-z+1}$$

$$\Rightarrow\quad x[n]=-2\delta[n]+4u[n]-2Cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)u[n]-\frac{4}{\sqrt{3}}Sin\left(k\frac{\pi}{3}\right)u[n]$$

X[0]=0 , x[1]=1 , x[2]=3 , x[3]=6 , x[4]=7 , x[5]=5 , …

روش تقسیم:

$$X(z) = z^2 + z + 2$$

$$z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = z^{-1}$$

$$3z + z^{-1}$$

$$z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = 3z^{-2}$$

$$6 - 5z^{-1} + 3z^{-2}$$

$$z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = 6z^{-3}$$

$$7z^{-1} - 9z^{-2} + 6z^{-3}$$

$$z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = 7z^{-4}$$

$$5z^{-2} - 8z^{-3} + 7z^{-4}$$

$$z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = 5z^{-5}$$

$$\ddots \quad \ddots \quad \ddots$$

روش تشکیل معادلات تقاضلی:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} \quad \triangleq \quad X(z) = \frac{z^2 + z + 2}{z^3 - 2z^2 + 2z - 1} = \frac{z^{-2} + z^{-2} + 2z^{-3}}{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3}} \Rightarrow$$

$$y[n] - 2y[n-1] + 2y[n-2] - y[n-3] = r[n-1] + r[n-2] + 2r[n-3]$$

$$r[n] = \delta[n] \quad \Rightarrow y[0] = 2y[-1] - 2y[-2] + y[-3] = 0$$

$$y[1] = 2y[0] - 2y[-1] + y[-2] + \delta[0] = 1$$

$$y[2] = 2y[1] - 2y[0] + y[-1] + \delta[0] = 3$$

$$y[4] = 2y[3] - 2y[2] + y[1] = 7$$

$$y[5] = 2y[4] - 2y[3] + y[2] = 5$$

تمرین ۱۶- زدهای سه سیگنال را در تمرین ۷ بدست آوردهاید. با استفاده از هر سه روش بالا، حداقل پنچ نمونهٔ اول هر یک از سیگنالها را بدست آورید. برای موارد نوسانی فرکانس نمونه برداری را دو برابر فرکانس اصلی و برای مورد غیر نوسانی پریود نمونه برداری را نصف کوچکترین ثابت زمانی در نظر بگیرید.

۱-۲) گذار از دیجیتال به پیوسته

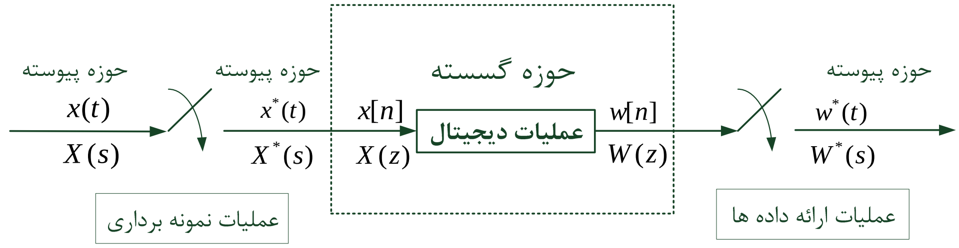
در بخش قبل، ابزارهای ریاضی خوبی برای تسلط به تحول از حوزهٔ پیوسته به حوزهٔ گسسته معرفی شدند. حال که سیگنال به حوزهٔ گسسته منتقل شد، مثلاً بصورت یک سری عدد به حافظهٔ یک کامپیوتر رفت، نوبت آن است که تحولات لازم روی داده‌ها صورت پذیرد و نتایج لازم دوباره بصورت اعدادی آمادهٔ تحویل به قسمت بعدی گردد. این تحولات نیز سیستمهایی هستند که این بار به آنها سیستمهای دیجیتالی می‌گوییم و مثلاً وقتی بصورت یک فیلتر عمل کنند، به آنها فیلترهای دیجیتال گفته میشود و دوباره همان اصطلاحاتی که در حوزهٔ پیوسته داشتیم مانند سیستم مرتبهٔ اول دوم، معادلات حالت، تحققها و غیره، عیناً تکرار میشود.

اما در اینجا فعلاً نمی‌خواهیم به بررسی این سیستمها، خواصشان و نحوهٔ تحققشان بپردازیم بلکه فرض میکنیم بهرحال تحولی صورت پذیرفته و داده‌ها آمادهٔ تحویلند. این داده‌ها عموماً دوباره باید به سیستمهای پیوسته تحویل شده تا کارهای بعدی انجام شود. حال میخواهیم بدانیم چگونه این گذار از گسسته به پیوسته را مدل کنیم و چگونگی اعمال این سیگنال گسسته را به سیستمهای پیوسته و نحوهٔ تحلیل اثر اینگونه سیگنالها را در سیستمهای پیوسته بیاموزیم.

برای شروع توجه میکنیم که این بار یک سری عدد میخواهند با دورهٔ ثابتی به حوزهٔ پیوسته بروند. دوباره می‌آییم اینها را در حوزهٔ پیوسته بصورت همان قطار ضربه‌ها، مشابه آنچه در نمونه برداری دیدیم مدل نموده و به حوزهٔ پیوسته انتقال میدهیم. دیگر در اینجا سیگنال پیوسته‌ای وجود نداشته که عبارت نمایش سیگنال نمونه برداری شده در حوزهٔ پیوسته برای این مدل معنی داشته باشد. لذا حال می‌توان به آن نام دیگری داد مثلاً: نمایش سیگنال گسسته در حوزهٔ پیوسته والبته این نامگذاری کلی تر به نظر میرسد. در اینجا تعبیردورهٔ نمونه برداری نیز جای خود را به دورهٔ داده‌ها می‌دهد. حال هر سیستم پیوسته‌ای میتواند این سیگنال را بعنوان ورودی خود تلقی کند.

خلاصهٔ گذار از دو حوزه به یکدیگر

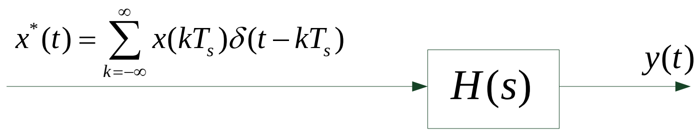
آنچه بعنوان ابزار گذار از یکی از دو حوزهٔ پیوسته و گسسته به دیگری معرفی شدند، به لحاظ ریاضی کاملا یکسانند و نحوهٔ ارتباط دادن آنها به یکدیگر نیز روشن است، هر چند تعبیر هر یک با دیگری متفاوت است. لذا بعنوان جمع بندی، شکل زیر ارائه می‌گردد.



شکل (۱۰)

۱-۳) معادل گسستهٔ سیستمهای پیوسته برای ورودیهای ضربه‌ای

هم اکنون مشکل نمایش ریاضی سیگنالهای گسسته را در حوزهٔ پیوسته و ورود به دنیای پیوسته را حل نموده‌ایم ولی از طرف دیگر در این دنیای پیوسته عادت نداریم با چنین سیگنالهای ضربه‌ای کار کنیم. بخصوص که شدیداً دوست داریم از خواص تبدیل لاپلاس استفاده کنیم و مثلا در شکل زیر دوست داریم از آن مفهوم استثنایی تابع تبدیل لاپلاس استفاده کرده،



شکل (۱۱)

و بگوییم:

$$Y(s)=X^*(s)H(s) \qquad (۱۱)$$

در حالیکه میدانیم $X^*(s)$ صورت پیچیده‌ای دارد و با این حاصلضرب در نگاه اول به نظر نمیرسد که به چیز قابل تحلیلی دست یابیم.

بیایید نا امید نشده و بجای آنکه بخواهیم y(t) را در تمام زمانها بیابیم، سعی کنیم که آنرا در همان زمانِ ارائهٔ داده‌ها بیابیم و فعلاً از اتفاقاتی که بین زمانهای ارائه، می‌افتد، چشم پوشی کنیم. این یعنی بجایِ آنکه سیگنال پیوستهٔ خروجی را بیابیم، سیگنال گسستهٔ آنرا یا به همان تعبیر اول ما، سیگنال نمونه برداری شدهٔ خروجی را بیابیم. در ادامه این کار را هم در حوزهٔ لاپلاس و هم در حوزهٔ زمان انجام خواهیم داد که هر یک نتایج جالب خود را بهمراه دارند.

ابتدا همان معادلهٔ ۱۱ را تشکیل داده و سعی می‌کنیم لاپلاس خروجی گسسته شده را بیابیم:

$$Y(s)=X^*(s)H(s)=\left(\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s-k\,j\omega_s)\right)H(s)\mapsto Y^*(s)=\left(X^*(s)H(s)\right)^*=$$

$$Y^*(s)=\frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s-k\,j\omega_s-mj\omega_s)\right)H(s-mj\omega_s)\right]=$$

$$\frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{T_s}\sum_{i=-\infty}^{\infty} X(s-l\,j\omega_s)\right)H(s-mj\omega_s)\right]=$$

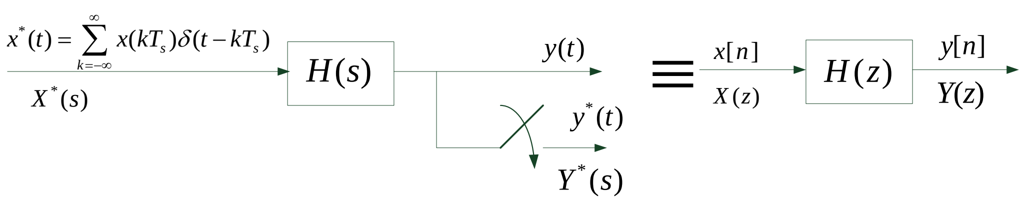
$$= \frac{1}{T_s^2}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\;\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s-l\,j\omega_s)H(s-mj\omega_s) = \left(\frac{1}{T_s}\sum_{l=-\infty}^{\infty} X(s-l\,j\omega_s)\right)\left(\frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty} H(s-mj\omega_s)\right)$$

$$\mapsto \quad Y^*(s) = \left(X^*(s)H(s)\right)^* = X^*(s)H^*(s) \qquad (۱۲)$$

و فوراً میتوان نتیجه گرفت:

$$\frac{Y^*(s)}{X^*(s)} = H^*(s) \quad or \quad \frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) \qquad (۱۳)$$

و این یعنی: همواره نسبت زدِ "نمونه‌های خروجی" به زدِ "ورودیِ نمونه‌ها" مساوی زدِ "نمونه‌های پاسخ ضربۀ سیستم" است. به همین دلیل H(z) را تحت این شرایط، تابع تبدیلِ گسستۀ معادلِ تابع تبدیلِ پیوستۀ H(s) می‌گوییم و یا با اختصار میگوییم: H(z) معادلِ گسستۀ H(s) است. این موضوع بدقت در شکل زیر به نمایش گذاشته شده است:



شکل (۱۲)

با کمی دقت در می‌یابید که روش بدست آوردن H(z) از روی H(s) را نیز قبلاً در مثالها و تمرینهای بخش پیشین، بدون آنکه توجه داشته باشیم، آموخته‌ایم.

مثال -۵ بگویید: در مثال ۱ برای سیستم پیوسته‌ای، معادل گسسته یافته شد؟ معادلات بین خروجی و ورودی را برای معادل گسستۀ که بر اساس جواب اول بدست آمده است، بدست آورید.

پاسخ: باید دید پلۀ واحد، پاسخ ضربۀ چه سیستمی است؟ میدانیم که پلۀ واحد پاسخ ضربۀ انتگراگیر خالص است یعنی با توجه به حل آن مثال، می‌توان گفت:

$$\frac{Y(s)}{X^*(s)} = H(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{Y^*(s)}{X^*(s)} = H^*(s) = \left\{\frac{1}{s}\right\}^* \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = Z\left\{\frac{1}{s}\right\} = 0.5\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

در ادامه برای یافتن معادلات حاکم بین ورودی و خروجی گسسته به صورت زیر عمل می‌کنیم:

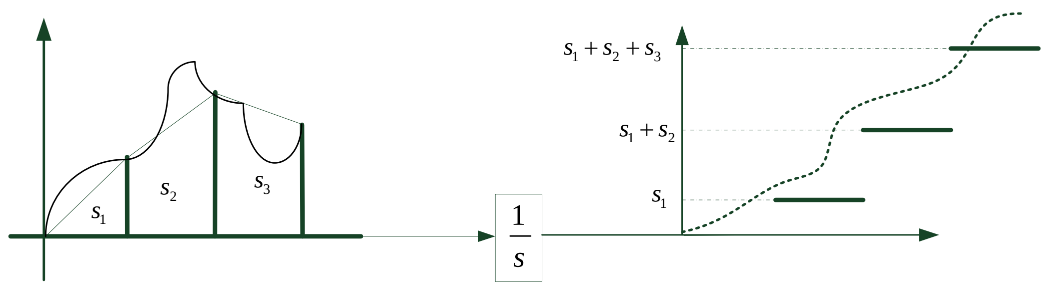
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = 0.5\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad (1-z^{-1})Y(z) = (1+z^{-1})X(z) \quad \Rightarrow$$

$$y[n] - y[n-1] = 0.5\,(x[n] + x[n-1])$$

$$y[n] = y[n-1] + 0.5(x[n] + x[n-1])$$

چنانچه ملاحظه می‌کنید، انتگرالگیری بر حسب ورودی نمونه‌ای، بصورت ذوزنقه‌ای مانند شکل زیر صورت میگیرد (بدون احتساب فاصلهٔ زمانی T_s). توجه کنید که قبل از ورود نمونهٔ مثلاً سوم در شکل زیر، یعنی در فاصلهٔ زمانی بین نمونهٔ دوم و سوم، فقط جمع مساحت دو قسمت قبلی را در خروجی اعلام می‌کند.

اما اگر ورودی به صورت ضربه‌ای نباشد (مانند نقطه چین)، آنگاه، نه در زمانهای نمونه برداری و نه بین آنها، خروجی از آنچه در بالا به دست آمد تبعیت نمی‌کند.



شکل (۱۳)

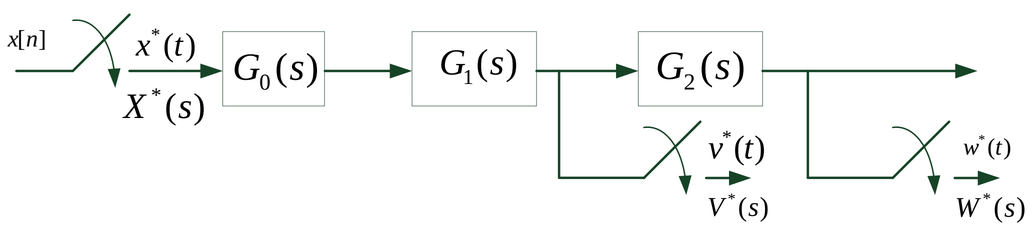
نکتهٔ بسیار مهم: توجه کنید که از همین مثال ساده نیز مشخص است که فقط موقعی خروجیِ سیستمِ گسسته، منطبق بر نمونه‌های خروجیِ سیستم پیوسته است که ورودیِ سیستمِ پیوسته بصورتِ ضربه-ای باشد و نه هر ورودیِ دلخواهی که در نقاطِ نمونه برداری یکسان است. چرا که مساحتِ تحت منحنی هر سیگنال دلخواهی که نمونه‌های آن از آن نقاط نمونه بگذرد، دقیقاً همان مساحت ذوزنقه‌ها نخواهد بود بلکه به رفتارِ منحنی بین زمان نمونه‌ها نیز بستگی پیدا میکند. تازه همهٔ اینها به شرط این است که فاصلهٔ نمونه‌ها را ۱ ثانیه بگیرید و گرنه کلاً یک ضریب نیز، اختلاف به وجود می‌آید. به همین دلیل تأکید می‌شود که: نسبتِ زدِ "نمونه‌های خروجی " به زدِ "ورودیِ نمونه‌ها" مساویِ زدِ " نمونه‌های پاسخ ضربهٔ سیستمِ پیوسته" است و نه اینکه: نسبت زدِ "نمونه‌های خروجی" به زدِ "

نمونه‌های هر ورودی" مساویِ زدِ " نمونه‌های پاسخ ضربهٔ سیستم" است. عموماً این موضوع را بصورت زیر نیز تأکید می‌کنند:

$$Y(s)=H(s)X(s) \quad \mapsto \quad Y^*(s)=\{H(s)X(s)\}^* \neq H^*(s)X^*(s) \qquad (۱۴)$$

$$Y(s)=H(s)X^*(s) \quad \mapsto \quad Y^*(s)=\{H(s)X^*(s)\}^* = H^*(s)X^*(s) \qquad (۱۵)$$

تمرین ۱۷- با تشکیل معادلهٔ تفاضلیِ پاسخِ دومِ مثالِ ۱ ، چگونگی انتگراگیری آنرا تشریح کنید؟
تمرین ۱۸- در مثال ۲ برای چه سیستم پیوسته‌ای معادل گسسته یافته شد.
تمرین ۱۹- در مثال ۳ برای چه سیستم پیوسته‌ای معادل گسسته یافته شد.
تمرین ۱۹.۱ – یک مثال در محیط simulink درست کنید که نمودارهای مشابه شکل ۱۳ ایجاد کرده و خروجی‌ها را نیز مانند این شکل به صورت مقایسه‌ای رسم کنید.
مثال ۶- در دیاگرام زیر ابتدا معادل گسستهٔ از x[n] به v[n] و از v[n] به w[n] را معرفی کرده و سپس دیاگرامِ مدل معادل گسسته را ارائه دهید.



شکل (۱۴)

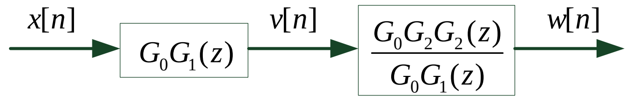
با توجه به شکل داریم:

$$V(s)=G_0(s)G_1(s)X^*(s) \mapsto V^*(s)=\{G_0(s)G_1(s)\}^* X^*(s)$$

$$=(G_0G_1)^*(s)X^*(s) \quad \mapsto \quad V(Z)=G_0G_1(z)X(z)$$

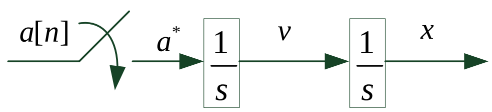
$$\mapsto \quad \frac{V(z)}{X(z)}=G_0G_1(z) \quad , \quad W(z)=G_0G_1G_2(z)X(z) \quad \mapsto \quad \frac{W(z)}{V(z)}=\frac{G_0G_1G_2(z)}{G_0G_1(z)}V(z)$$

و در نتیجه دیاگرام معادل گسستهٔ زیر به دست می‌آید:



شکل (۱۵)

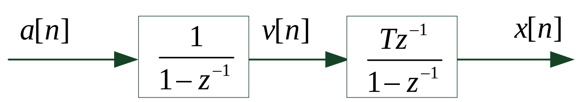
مثال ۷- برای سیستم زیر یک معادل گسسته به گونه‌ای ارائه کنید که نمونه‌های دوره‌ای هر دو متغیر حالت در دسترس قرار گیرد (این دو متغیر حالت می‌توانند مثلاً موقعیت و سرعت یک متحرک باشند).



شکل (۱۶)

مانند مثال قبل، ابتدا تابع تبدیلهای زد لازم را به دست آورده، سپس دیاگرام گسسته را ارائه می‌کنیم:

$$\frac{V(z)}{A(z)} = Z\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{1}{1-z^{-1}} \ , \quad \frac{X(z)}{A(z)} = Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \quad \mapsto \quad \frac{X(z)}{V(z)} = \frac{T\ z^{-1}}{1-z^{-1}}$$



شکل (۱۷)

بسیار مهم است که دقت کنید:

$$\frac{X(z)}{V(z)} \neq Z\left\{\frac{X(s)}{V(s)} = \frac{1}{s}\right\} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

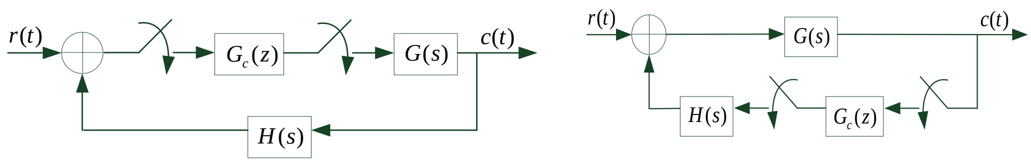
این همان حقیقت مهمی است که در معادلهٔ 14 آمده است.

تمرین ۱۹.۴ – در مثال بالا با فرض $a[n]=u_{-1}[n]$ ابتدا $v[n]$ و $x[n]$ را بدست آورده و همراه $a[n]$ رسم کرده و سپس روی همان شکل، $v(t)$ و $x(t)$ را نیز تا نمونهٔ پنجم رسم کنید.

تمرین ۱۹.۷ – تمرین ۱۹.۴ را با فرض $A(z)=2z^{-1}-z^{-3}$ حل کنید.

تمرین ۲۰ – مثال بالا را با استفاده از مدلی که در اول مثال ۱ به دست آمد، دوباره حل کنید و توضیح دهید که فقط اختلاف بر سر نقاط پرش در اولین انتگرالگیری است.

تمرین ۲۱– در دیاگرام‌های زیر ابتدا زدِ خروجیِ $C(z)$ را بر حسب ورودی و بقیهٔ تابع تبدیلهای داده شده بدست آورید. سپس بگویید آیا تابع تبدیل گسسته‌ای برای سیستم می‌توان ارائه کرد؟ چنانچه جوابتان مثبت است آن را ارائه کرده و دیاگرام مدل معادل گسسته را نیز رسم کنید.



(الف)

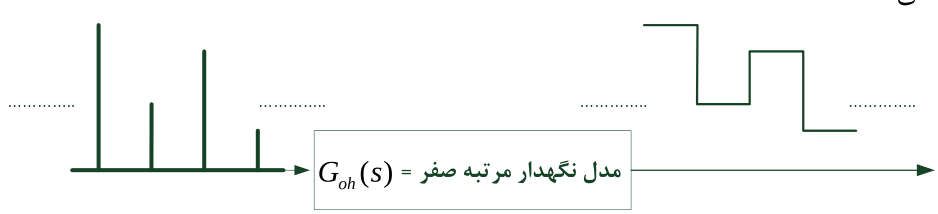
(ب)

شکل (۱۸)

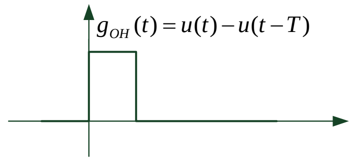
مثال ۸– **مدلسازی D/A یا نگهدار مرتبهٔ صفر**– می‌دانیم که یک مبدل دیجیتال به پیوسته، عملاً عدد ورودی را تبدیل به یک سیگنال پیوسته نموده و سیگنال را تا ورود عدد بعدی (یعنی تا دورهٔ بعدی) به همین اندازه نگه میدارد و به همین ترتیب الی آخر. برایِ کارِ این نگهدار در حوزهٔ پیوسته مدلی ارائه کنید.

توجه کنید که چون می‌خواهیم نگهدار را در حوزهٔ پیوسته مدل کنیم، باید فرض کنیم ورودی آن سیگنالِ قطارِ ضربه‌ای مشهور است. از طرفی این نگهدار بنابر تعریفی که شده هم خطی است و هم نامتغیر با زمان، لذا با یافتن پاسخ ضربهٔ آن میتوان مدل آنرا بدست آورد.

حال توجه کنید که بنابر تعریف، این نگهدار، برای قطار ضربه‌ای، پاسخی مشابه آنچه در شکل زیر است می‌دهد:



شکل (۱۹)



شکل (۲۰)

$g_{OH}(t)=u(t)-u(t-T)$

به این ترتیب مدل ما باید بگونه ای باشد که به ضربهٔ واحد پاسخ را بدهد و لذا تابع تبدیل نگهدار مرتبهٔ صفر یا D/A، خواهد بود:

$$G_{0h}(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-sT}=\frac{1-e^{-Ts}}{s} \qquad (۱۶)$$

تمرین ۲۲- نشان دهید برای هر G(s)، همواره داریم:

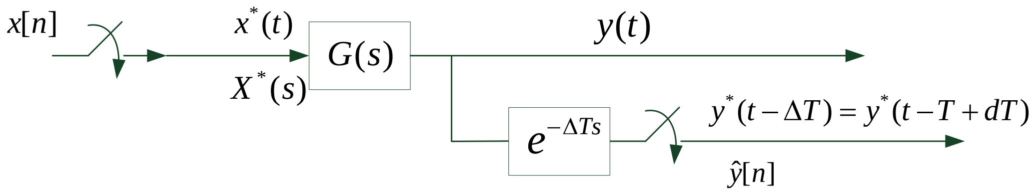
$$Z\{G_{0h}(s)G(s)\}=(1-z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \qquad (۱۷)$$

تمرین ۲۳- مدل D/A بدست آمده را در نظر بگیرید و مدل معادل گسستهٔ آنرا هم با نتیجهٔ اول مثال ۱ و هم با نتیجهٔ دوم آن بدست آورید. با توجه به مقایسهٔ دو مدل، آیا میتوانید دلیل دیگری برای انتخاب نتیجهٔ دوم و نه اول را در اکثر جداول و کتب بیان کنید.

تمرین ۲۴- در مثال ۷ این بار فرض کنید بعد از فرآیند ارارئه داده‌ها و قبل از انتگرالگیر اول یک D/A قرار دارد. حال یکبار دیگر آن مثال را حل کرده و با فرض $A(z)=1-2z^{-1}$، ابتدا v[n] و x[n] را بدست آورده و همراه a[n] رسم کرده و سپس روی همان شکل، v(t) و x(t) را نیز تا نمونهٔ پنچم رسم کنید.

مثال ۹- **بدست آوردن اطلاعات بین زمانهای نمونه برداری (روش۱)**، توجه کردید که به کمک معادلهای گسسته توانستم اطلاعات سیگنالهای پیوسته را در زمانهای نمونه برداری بدست آوریم.
حال میخواهیم این روش را تعمیم داده و اطلاعات را در هر لحظهٔ دلخواه بین زمانهای نمونه برداری نیز بدست آوریم.

برای این منظور دیاگرام زیر را در نظر گرفته



شکل (۲۱)

و نشان دهید تابع معادل گسستهٔ تعمیم یافته‌ای که از معادلهٔ زیر بدست می‌آید، مقادیر ورودی x[n] را به مقادیر خروجی در زمان ΔT پیش از زمانِ کنونی (یا در زمان dT=(1-Δ)T پس از دورهٔ قبلی) $\hat{y}[n]$ ، مربوط میکند.

$$Z_d\{G(s)\} = G(z,d) \triangleq \frac{\hat{Y}(z)}{X(z)} = z^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kT+dT)z^{-k} \qquad (۱۸)$$

حل: این موضوع براحتی بصورت زیر اثبات میگردد:

$$G(z,d) = Z\{G(s)e^{-\Delta Ts}\} = Z\{G(s)e^{-Ts}e^{dTs}\} = z^{-1}Z\{G(s)e^{dTs}\} = z^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kT+dT)z^{-k} \qquad (۱۹)$$

تمرین ۲۵- در ادامهٔ مثال بالا فرض کنید G(s) را بتوان با تجربهٔ کسر بصورت

$$G(s) = \frac{A}{s+\alpha} + \frac{B}{(s+\beta)^2}$$

در آورد. نشان دهید که زد تعمیم یافتهٔ معادل آن خواهد بود:

$$G(z,d) = \frac{Ae^{-d\alpha T}z^{-1}}{1-e^{-\alpha T}z^{-1}} + \frac{BTe^{-d\beta T}\left[e^{-\beta T}z^{-2} + d\left(z^{-1} - e^{-\beta T}z^{-2}\right)\right]}{(1-e^{-\beta T}z^{-1})}$$

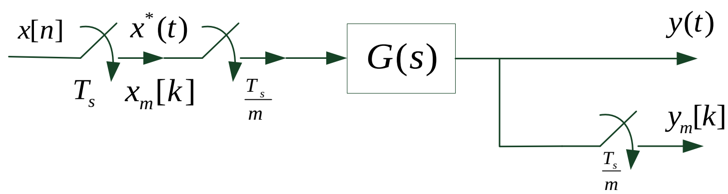
$$= \frac{Ae^{-d\alpha T}}{z-e^{-\alpha T}} + \frac{BTe^{-d\beta T}\left[e^{-\beta T} + d\left(z-e^{-\beta T}\right)\right]}{(z-e^{-\beta T})^2}$$

تمرین ۲۶- برای لاپلاسهای داده شده در تمرین ۷، زد تعمیم یافتهٔ معادل را بیابید.

تمرین ۲۷- بکمک خواص تبدیل زد و 19، زد تعمیم یافتهٔ معادل سیستم زیر را بدست آورید.

$$H(s) = \frac{C}{(s+\gamma)^3}$$

مثال ۱۰- **بدست آوردن اطلاعات بین زمانهای نمونه برداری (روش۲)**، در این روش بطور مجاری نمونه بردارهایی قرار میدهیم که پریود نمونه برداری آنها 1/m پریود واقعی باشند. مانند آنچه در دیاگرام زیر آمده است.



شکل (۲۲)

حال کافیست زد جدید را بدست آوریم. نشان دهید این زد، از روی زد معادل قبلی به شکل زیر بدست میآید:

$$Y(z_1)_m = X(z_1^m)G(z_1)_m \quad , \qquad G(z_1)_m \triangleq G(z_1)\Big|_{T_s \to \frac{T_s}{m}} \tag{۲۰}$$

حل: با توجه تعریف معادل گسسته، مستقیماً برای پریود جدید داریم:

$$G(z_1)_m \triangleq \frac{Z_1\{y_m[k]\}}{Z_1\{x_m[k]\}} = \frac{Y(z_1)_m}{X(z_1)_m} = Z_1\{G(s)\}\Big|_{\frac{T_s}{m}} = G(z_1)\Big|_{T_s \to \frac{T_s}{m}}$$

برای عدم تداخل، زد جدید را با زیر نویس 1 نمایش میدهیم. حال با توجه به حقیقت زیر

$$X(z_1)_m \underline{\Delta} \quad Z_1\{x_m[k]\} = \sum_{1=-\infty}^{\infty} x_m[l]z_1^{-l} = \ldots + x_m[0]z_1^{0} + 0z_1^{-1} + 0z_1^{-2} + \cdots + x_m[m]z_1^{-m} +$$

$$0+\cdots+x_m[2m]z_1^{-2m}+\cdots=\cdots+x_m[0]z_1^{-0}+x_m[m]z_1^{-m}+x_m[2m]z_1^{-2m}+x_m[3m]z_1^{-3m}+\cdots$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_m[jm]\left(z_1^m\right)^{-j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j]\left(z\right)^{-j} \Big|_{z=z_1^m}$$

$$Z_1\{x_m[k]\} = X(z_1)_m = X\left(z_1^m\right)$$

حکم 20 ثابت میشود. معادل گسسته‌ای که اینچنین بدست می‌آید را معدل گسستهٔ m تایی می-گوییم.

مثال ۱۱- با توجه به دیاگرام بلوکی زیر، برای ورودی پلهٔ واحد، مقادیر خروجی را در فواصل زمانی نصفِ دورهٔ ارائه داده‌ها بدست آورید، از 0 تا $2T_s$. T_s را Ln(4) بگیرید.

شکل (۲۳)

حل: با توجه به تعاریفی که در بالا آمد داریم:

$$G(z_1)_2 = G(z_1)\Big|_{T_s \to \frac{T_s}{2}} = Z_1\left\{\frac{1-e^{-TS}}{s(s+1)}\right\} = Z_1\left\{\frac{1-\left(e^{-\frac{T}{2}S}\right)^2}{s(s+1)}\right\} \xrightarrow{z_1=e^{\frac{T}{2}s}} \left(1-z_1^{-2}\right)Z_1\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} =$$

$$G(z_1)_2 = (1-z_1^{-2})Z_1\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{(s+1)}\right\} = (1-z_1^{-2})\left(\frac{1}{1-z_1^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-Ts/2}z_1^{-1}}\right)$$

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \mapsto X(x_1^2) = \frac{1}{1-z_1^{-2}} \mapsto Y(z_1)_2 = X(z_1^2)G(z_1)_2 = \frac{1}{1-z_1^{-1}} - \frac{1}{1-0.5z_1^{-1}}$$

$$\mapsto y_2[k] = u_{-1}[k] - \left(\frac{1}{2}\right)^k u_{-1}[k] \mapsto y_2[0] = 0 \;,\; y_2[1] = \frac{1}{2} \,,\; y_2[2] = \frac{3}{4} \,,\; y_2[4] = \frac{7}{8}$$

$$, \; y_2[6] = \frac{15}{16} \,,\; y_2[5] = \frac{31}{32}$$

تمرین ۲۸- برای دیاگرام شکل ۱۸ الف تمرین ۲۱، دیاگرام معادل گسستهٔ m تایی را بر حسب زیر سیستمهای داده شده در دیاگرام، بدست آورید.

تمرین ۱و ۲۸- مثال ۱۱ را با استفاده از زد تعمیم یافته حل کنید.

تمرین ۲، ۲۸ مثال ۱۱ را در نظر گرفته و این بار مقدار خروجی را در دو نقطهٔ بین نمونه‌ها بدست آورید. (راهنمایی: $m = 3$ است.)

تمرین ۳، ۲۸ – سیستم مثال ۱۱ را در محیط simulink ایجاد و خروجی را رسم کرده و با نتایج بدست آمده در تمرینهای فوق مقایسه کنید.

توجه کنید که برای حالتی که پاسخ ضربه ناپیوسته باشد؛

$$\lim_{d\to 0} z\, H(z,d) = H(z)$$

ولی

$$\lim_{d\to 1} H(z,d) \neq H(z)$$

و برای حالتی که پاسخ ضربه پیوسته باشد؛

$$\lim_{d\to 0} z\, H(z,d) = H(z)$$

و

$$\lim_{d\to 1} H(z,d) = H(z,1) = H(z)$$

۱-۴) معادل گسستهٔ سیستمهای پیوسته، مبدل معادلات دیفرانسیل به معادلات تفاضلی‌اند

در این قسمت می‌خواهیم حقیقتِ مهمی که با بی اعتنایی از کنار آن گذشتیم را متذکر شویم. در تمامی مواردی که در قسمت قبلی برای سیسمتهای پیوستهٔ خطی، معادل گسسته‌ای یافت شد، آن معادل گسسته با یک تابع تبدیل خطی کسری از متغیر z بیان گردید. از طرف دیگر از درس سیگنالها و سیستمها می‌دانید که یک تابع تبدیل خطی کسری از متغیر z معرف یک سیستم خطی گسسته‌ای است که با معادلات تفاضلی خطی بیان میشود.

بنابر این معلوم میشود که هر سیستمی که با معادلات دیفرانسیل خطی بیان میشود، وقتی ورودی آنرا فقط ورودیهای نمونه‌ای (ضربه‌ای) در نظر بگیریم و از خروجی نیز فقط نمونه‌های آن مد نظر باشند، می‌توانیم بجای آن معادلات دیفرانسیل، معادلاتِ تفاضلیِ خطیِ معادل آنرا جایگزین کنیم.

جواب این معادلات تفاضلی برای هر ورودی نمونه‌ای جوابی است قاطع و دقیق و هیچ تقریبی را بهمراه ندارد. این در حالی است که معادلات دیفرانسیل با کامپیوترهای دیجیتال قابل فهم نمی‌باشد ولی در مقابل معادلات تفاضلی براحتی بوسیلهٔ یک برنامهٔ سادهٔ کامپیوتری قابل اجرا و حل می‌باشد.

در این بخش بکمک مفهوم بسیار اساسیِ معادلات حالت سیستمها که حتماً تاکنون با آن مواجه شده‌اید این مطلبِ بسیار مهم را دوباره بدست خواهیم آورد و از این طریق افقهای مهمی در درک عمیقتر سیستمهای دیجیتال و تحقق آنها، چه آنهایی که بعنوان معادل سیستم پیوسته‌ای مطرح هستند و چه آنهایی که خود بعنوان یک کنترل کنندهٔ دیجیتال و یا یک فیلتر دیجیتال در سیستم عمل میکنند، برای ما بوجود خواهد آمد.

۱-۴-۱) معادلات حالت در حوزهٔ پیوسته

حالت یک سیستم کمترین اطلاعاتی است که لازم است در مورد آن سیستم داده شود تا بتوان ادعا نمود وضعیت سیستم در تمام ابعاد آن دقیقاً قابل تعیین و مشخص است. یا با بیان ریاضی: حالت عبارتست از کمترین متغیرهایی که لازم است مقدار آنها در زمانی داده شود، تا بتوان مقدار هر متغیر دیگر در سیستم را دقیقاً در همان زمان معین نمود. همین مهفوم، فوراً این را هم القا میکند که به محض اطلاع از حالت در هر لحظه، آمادگی وجود دارد که با ورود متغیرهای آزاد و تغییر حالت سیستم، حالتهای آتی سیستم را در لحظات بعدی نیز مشخص نمود. وقتی بخواهیم مفهوم حالت را به کمک تعاریف موجود ریاضی بسازیم طبیعی است که به سراغ مفهوم دیفرانسیل و انتگرال برویم به این ترتیب که هر حالت عبارت خواهد بود از خروجی یک انتگرالگیر که آخرین مقدار آن، مقدار اولیه‌ای خواهد بود برای بدست آوردن مقادیر بعدی آن حالت. در نتیجه مدل ریاضی یک سیستم چیزی نخواهد بود جز چند انتگرالگیر (به تعداد متغیرهای حالت) بعلاوهٔ معادلاتی که ورودی این

انتگرالگیرها را بر حسب متغیرهای ورودی (آزاد) و متغیرهای حالت و احیاناً خود زمان میدهند. به این مجموعهٔ کامل معادلات، معادلات حالت سیستم گفته میشود و در شکل کلی آن به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m, t) = f_1(\underline{x}, \underline{u}, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m, t) = f_2(\underline{x}, \underline{u}, t) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m, t) = f_n(\underline{x}, \underline{u}, t) \end{array}\right\} \mapsto \underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \qquad (۲۱)$$

حروف زیر خط دار به معنی بردار بودن آنهاست.

بلافاصله از بحث و بررسی کلی این معادلات گذشته و فقط شرایطی را در نظر میگیریم که تمامی fها خطی بوده (هم نسبت به متغیرهای حالت و هم نسبت به ورودیهای آزاد) و ضمناً امکان وابسته به زمان بودن آنها را نیز سلب میکنیم و همینطور برای سادگی سیستم را تک ورودی فرض خواهیم نمود. به این ترتیب معادلات حالت سیستمهای خطی نا متغیر با زمان تک ورودی خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u$$

خروجی سیستم هم چیزی نیست جز ترکیبی از متغیرهای حالت و ورودی لذا:

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + du$$

و نهایتاً می‌توان تمام آنچه در بالا دیده شد را بصورت سادهٔ زیر نیز نمایش داد:

$$\underline{\dot{x}} = A\underline{x} + \underline{b}u \quad , \quad y = \underline{c}^T \underline{x} + du \qquad (۲۲)$$

در اینجا ما فرض کرده‌ایم که سیستم از مرتبهٔ n است و شرایط اولیهٔ $x_1(0)$ ، $x_2(0)$ ، ... و $x_n(0)$ و یا بطور خلاصه $\underline{x}(0)$ داده شده‌اند. ضمناً توجه کنید که همواره ماتریس A مربعی خواهد بود.

در ادامه ما به نحوهٔ بدست آوردن حل این معادلات دیفرانسیل نپرداخته بلکه فقط از ساده‌ترین نتایجی که قبلاً هم شما در جاهای دیگر دیده‌اید استفاده نموده و حل را ارائه میکنیم تا استفاده‌های بعدی را ببریم.

ساده ترین مثال - مثال ۱۲: فرض کنید تنها نیرویی که به جسمی می‌تواند وارد میشود در کنترل شماست و بصورت ورودی آزاد می‌تواند اعمال گردد. مدل ریاضی که سرعت این جسم را به عنوان خروجی بدهد به شرح زیر است:

$$\dot{x} = bu \qquad , \qquad y = x \qquad b \triangleq \frac{1}{M} \qquad , \qquad x(0) \triangleq v_0$$

حل آنرا همهٔ شما میدانید که عبارتست از:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t bu(\tau) \qquad , \qquad y(t) = x(t) \qquad \text{(۲۳)}$$

اگر یادتان باشد قسمت اول را پاسخ بدون تحریک یا ورودی صفر و قسمت دوم را پاسخ حالت صفر یا بدون شرایط اولیه، می‌گوییم.

مثال ۱۳- حال فرض کنید به غیر از نیرویی که شما می‌توانید اعمال کنید نیروی مقاومی وجود دارد که مقدار آن نیز متناسب با سرعت افزایش یا کاهش می‌یابد. حال معادلهٔ حالت سرعت خواهد شد:

$$\dot{x} = ax + bu \qquad , \qquad y = x \qquad b \triangleq \frac{1}{M} \qquad , \qquad x(0) \triangleq v_0$$

حل این نیز اولین کاری است که شما در درس معادلات دیفرانسیل انجام داده‌اید.

$$\dot{x} - ax = bu \quad \mapsto \quad e^{-at}(\dot{x} - ax) = e^{-at}(bu) \quad \mapsto \quad \frac{d}{dt}(e^{-at}x) = e^{-at}(bu) \ \mapsto$$

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}(e^{-a\tau}x)d\tau = \int_0^t e^{-a\tau}(bu)d\tau \quad \mapsto \quad e^{-(at-0)}x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-a\tau}\, bu(\tau)d\tau$$

$$x(t)=e^{a(t-0)}x(0)+\int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau) \qquad , \qquad y(t)=x(t) \qquad (۲۴)$$

برای درک عمیق ابتدا فرض کنید ورودی نداشته باشیم یعنی u(t) =0. به این ترتیب عبارت a^{t-0} با ضرب شدنش در حالت اولیه، حالتِ سیستم را از هر حالتی در زمان صفر به حالت در زمان دلخواه t می‌برد. لذا به این عبارت تحول حالت سیستم نیز میگوییم. دقت کنید که در مثال بالاتر نیز چون پارامتر a صفر بود این تحول بصورت عدد ثابت 1 ظاهر شد.

واقعاً چرا تابع نمایی جواب است؟ علت اصلی این است که تنها تابعی که مشتقش با خودش متناسب است این تابع است.

در صورت کلی نیز وقتی پارامتر a به ماتریس A و یک معادلهٔ حالت تبدیل شود، جواب 22، به همان شکلی که در بالا دیده شد، بصورت کلی زیر در خواهد آمد:

$$\underline{x}(t)=e^{A(t-0)}\underline{x}(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\underline{b}u(\tau)d\tau \quad , \quad y(t)=\underline{c}^T\underline{x}(t)+du(t) \qquad (۲۵)$$

به این ترتیب به همان دلیلی که در بالا رفت، به ماتریس e^{At} ماتریس تحول حالت گویند. ممکن است گفته شود که این ماتریس نمایی چگونه تعریف میشود؟ جواب این است که از روی بسط تیلور مربوط به تابع نمایی یعنی:

$$e^A=I+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\frac{A^4}{4!}+\cdots+\frac{A^n}{n!}+\cdots \qquad (۲۶)$$

به این ترتیب اکثر خواص تابع نمایی برای نمای یک ماتریس نیز وجود دارد مگر جاهایی که جابجایی دو ماتریس در حاصلخضرب نیاز باشد.

تمرین ۲۹- نشان دهید در حالت کلی تساوی $e^{A+B}=e^A.e^B$ صحیح نیست. شرط لازم و کافی برای صحیح بودن این تساوی چیست؟ و نتیجه بگیرید که: $I=e^A.e^{-A}$ و دوباره نتیجه بگیرید که ماتریس تحول حالت همواره معکوس پذیر است.

تمرین ۳۰ – در مثال ۱۲ می‌خواهیم مکان جسم نیز در دست باشد و بعنوان خروجی سیستم نیز در نظر گرفته می‌شود. معادلات حالت را بصورت ماتریسی معادلهٔ ۲۲ بنویسید.

تمرین ۳۲- نشان دهید

$$\frac{d\left(e^{At}\right)}{dt} = Ae^{At} \tag{۲۷}$$

۱-۴-۱-۱) بدست آوردن e^{At} با استفاده از معکوس تبدیل لاپلاس

بیایید از طرفین ۲۲ لاپلاس گرفته و لاپلاس عبارتهای بدست آمده در ۲۵ را بیابیم.

$$L\{\dot{\underline{x}}\} = L\{A\underline{x} + \underline{b}u\} \quad , \quad L\{y\} = L\{\underline{c}^T \underline{x} + du\}$$

$$s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) = A\underline{X}(s) + \underline{b}U(s) \;\mapsto\; (sI - A)\underline{X}(s) = \underline{x}(0) + \underline{b}U(s) \mapsto$$

$$\underline{X}(s) = (sI - A)^{-1}\underline{x}(0) + (sI - A)^{-1}\underline{b}U(s) \;,\; Y(s) = \underline{c}^T\,\underline{X}(s) + dU(s)$$

$$H(s) = \underline{c}^T (sI - A)^{-1}\underline{b} \tag{۲۸}$$

بیاد بیاورید که برای یافتن تابع تبدیل، شرایط اولیه را صفر می‌گیریم.

نتیجه‌ای که ما در اینجا بیشتر مد نظر داریم، از مقایسهٔ ۲۵ و X(s) در بالا بدست می‌آید:

$$L\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1} \tag{۲۹}$$

مثال ۱۴- در تمرین ۳۱ ماتریس تحول حالت را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto L\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-a & 0 \\ -1 & s-0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s-a)}\begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s-a)} & 0 \\ \dfrac{1}{s(s-a)} & \dfrac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\mapsto \quad e^{At} = L^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s-a)} & 0 \\ \dfrac{1}{s(s-a)} & \dfrac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{at}u_{-1}(t) & 0 \\ (1/a)(e^{at}-1)u_{-1}(t) & u_{-1}(t) \end{bmatrix}$$

تمرین ۳۳- هم مستقیماً از ۲۶ و هم از معکوس تبدیل لاپلاس ثابت کنید:

$$e^I = eI$$

۱-۴-۲) از معادلات حالت در حوزهٔ پیوسته به معادلات حالت در حوزهٔ گسسته

کافیست، معادلات حالت پیوسته را در هر دورهٔ نمونه برداری یا همان دورهٔ ارائه داده‌ها، حل کنیم. ببینید آیا از روی ۲۵، حق داریم بنویسیم:

$$\underline{x}(t_{k-1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)}\underline{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}\underline{b}u(\tau)d\tau \quad , \quad y(t_k) = \underline{c}^T x(t_k) + du(t_k) \qquad (۳۰)$$

حال با فرضیات مختلف روی ورودی در فاصلهٔ یک پریود، می‌توان معادل گسستهٔ مورد نظر را یافت. ابتدا با همان فرض ورودی ضربه‌ای ادامه داده و سعی می‌کنیم معادل گسسته را با استفاده از معادلات حالت نیز بدست آوریم.

دقت کنید که از همان هنگامیکه نتیجهٔ دوم در مثال ۱ را ترجیح دادیم، ضربه را طوری در نظر گرفته‌ایم که انتگرال آن پله‌ای است که زمان 0 دقیقاً مقدار ۱ را دارد و نه 1/2 پس ضربهٔ $\delta(t-t_{k+1})$ دقیقاً قبل از t_k تمام شده است و لذا برای ورودی قطار ضربه‌ای از t_k تا t_{k+1}، فقط داریم: $u(t_{k+1})\delta(t-t_{k+1})$ و لذا 30 ساده خواهد شد به:

$$\underline{x}(t_{k-1}) = e^{AT}\,\underline{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}\underline{b}\,u(t_{k+1})\delta(\tau - t_{k+1})d\tau \quad , \quad y(t_k) = \underline{c}^T x(t_k) + du(t_k)$$

$$\underline{x}(t_{k+1}) = e^{AT}\,\underline{x}(t_k) + e^{A(t_{k+1}-t_{k+1})}\underline{b}\,u(t_{k+1}) \quad \mapsto \quad \underline{x}(t_{k+1}) = e^{AT}\,\underline{x}(t_k) + \underline{b}\,u(t_{k+1}) \quad \mapsto$$

$$\underline{x}[k+1] = F\,\underline{x}[k] + \underline{b}\,u[k+1] \quad , \quad F \underline{\underline{\Delta}}\, e^{AT} \quad , \quad y[k] = \underline{c}^T\,\underline{x}[k] + d\,u[k] \qquad (۳۱)$$

این معادلات تقاضلی حالت (یا تحقق) گسسته است که معادل همان سیستم پیوستهٔ 25 است و چنانچه انتظار داشتیم خطی و نا متغیر با زمان است. حال توجه کنید که همان تابع تبدیل معادل گسسته که در بخش قبل تعریف کردیم، از روی این تحقق گسسته نیز بشکل زیر بدست می‌آید:

$$z\underline{X}(z) = F\,\underline{X}(z) + \underline{b}zU(z) \quad , \quad Y(z) = \underline{c}^T\,\underline{X}(z) + dU(z)$$

$$(zI - F)\underline{X}(z) = \underline{b}zU(z) \;\mapsto\; \underline{X}(z) = (zI-F)^{-1}\underline{b}zU(z) \quad \mapsto$$

$$Y(z)=\underline{c}^T(zI-F)^{-1}\underline{b}zU(z)+dU(z) \quad \mapsto \quad \frac{Y(z)}{U(z)}=H(z)=\underline{c}^T(zI-F)^{-1}\underline{b}z+d \quad (۳۲)$$

مثال ۱۵- برای سیستم مثال ۱۲ که با فرض M =1 فقط یک انتگرالگیر است، یک تحقق معادل گسسته ارائه دهید و تابع تبدیل گسستهٔ معادل را نیز بدست آورید.

حل:

$$c=1 \quad , \quad b=1 \quad , \quad d=0 \quad , \quad F=e^0=1 \;\mapsto$$

$$x[l+1]=x[k]+u[k+1] \quad , \quad y[k]=x[k] \;\mapsto\; H(z)=\frac{z}{z-1}=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

که همان نتیجه‌ای است که در بخش گذشته بدست آمد.

مثال ۱۶- برای سیستم مثال ۱۳- (با فرض M =1) که با یک سیستم مرتبهٔ اول است، یک تحقق معادل گسسته ارائه دهید و تابع تبدیل گسستهٔ معادل را نیز بدست آورید.

حل: دقت کنید که داریم:

$$c=1 \quad , \quad b=1 \quad , \quad d=0 \quad , \quad F=e^{aT} \;\mapsto$$

$$x[k+1]=e^{aT}x[k]+u[k+1] \quad , \quad y[k]=x[k] \;\mapsto\; H(z)=\frac{z}{z-e^{aT}}=\frac{1}{1-e^{aT}z^{-1}}$$

که مشابه همان نتیجه‌ای است که در بخش گذشته بدست آمد.

تمرین ۳۴- از روی نتایج تمرین ۳۰ و روابط ۳۱ و ۳۲ تحقق معادل گسستهٔ مربوطه را یافته و تابع تبدیل گسسته را نیز بدست آورده با نتیج آنچه در بخش قبل بدست آمد، مقایسه کنید.

۱-۴-۲-۱) معادل گسستهٔ همراه با نگهدار مرتبهٔ صفر(D/A)

در اینجا فرض بر این است که قبل از هر سیستم پیوسته‌ای، این نگهدار یا همان D/A ملحوظ است. به همین دلیل معادلی که از این طریق بدست می‌آید میگوییم معادل مرتبهٔ صفر کلمهٔ مرتبه نیز بعلت مرتبهٔ صفر بودن نگهدار است.

با لحاظ وجود نگهدار مرتبهٔ صفر بعد از قطار ضربه‌ها و قبل سیستم پیوسته، میتوان ورودی سیستم از t_k تا t_k گرفت و لذا 30 ساده خواهد شد به:

$$\underline{x}(t_{k+1}) = e^{AT}\,\underline{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1})}\underline{b}u(t_k)d\tau = e^{AT}\,\underline{x}(t_k) + \left\{\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}d\tau\right]\underline{b}\right\}u(t_k)$$

$$\beta = t_{k+1} - \tau \mapsto \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}d\tau = \int_T^0 e^{A\beta}(-d\beta) = \int_0^T e^{A\beta}d\beta \quad \mapsto$$

$$\underline{x}(t_{k+1}) = e^{AT}\,\underline{x}(t_k) + \left\{\left[\int_0^T e^{A\beta}\,d\beta\right]\underline{b}\right\}u(t_k) \qquad \underline{g}\ \underline{\underline{\Delta}}\left[\int_0^T e^{A\beta}d\beta\right] \qquad \underline{b} = \left[\int_0^T e^{A\beta}\underline{b}\,d\beta\right] \quad \mapsto$$

$$\underline{x}[k+1] = F\,\underline{x}[k] + \underline{g}\,u[k] \quad , \quad y[k] = \underline{c}^T x[k] + d\,u[k] \qquad (۳۳)$$

و از آنجا برای تابع تبدیل زد معادل بدست می‌آید:

$$z\,\underline{X}(z) = F\,\underline{X}(z) + \underline{g}\,U(z) \quad , \quad Y(z) = \underline{c}^T\,\underline{X}(z) + d\,U(z) \quad \mapsto$$

$$(zI - F)\underline{X}(z) = \underline{g}\,U(z) \mapsto \underline{X}(z) = (zI - F)^{-1}\underline{g}\,U(z) \quad \mapsto$$

$$Y(z) = \underline{c}^T(zI - F)^{-1}\underline{g}\,U(z) + d\,U(z) \mapsto H(z) = \underline{c}^T(zI - F)^{-1}\underline{g} + d \qquad (۳۴)$$

پس از بدست آوردن F می‌توان با انتگرالگیری، g را نیز بدست آورد.
مثال ۱۷- مثال ۱۵ را با فرض حضور نگهدار مرتبهٔ صفر دوباره آورده و با نتیجهٔ بخش قبل مقایسه کنید.
حل: F را قبلاً بدست آورده‌ایم لذا کافیست از روی آن g را بدست آوریم:

$$\underline{g} = \int_0^T e^{A\beta}d\beta = \int_0^T d\beta = T \mapsto x[k+1] = x[k] + T\,u[k] \ , \ y[k] = x[k] \quad \mapsto$$

$$H(z) = \frac{T}{z-1} = \frac{T\,z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

نتیجه با آنچه در بخش قبل در لابلای بعضی مثالها یا تمرین‌ها بدست آمد، تطبیق می‌کند.

مثال ۱۸- مثال۱۶ را با فرض حضور نگهدار مرتبهٔ صفر دوباره بدست آورده و با نتیجهٔ بخش قبل مقایسه کنید.

حل: F را قبلاً بدست آورده‌ایم لذا کافیست از روی آن G را بدست آوریم:

$$\underline{g} = \int_0^T e^{A\beta} d\beta = \int_0^T e^{a\beta} d\beta = \frac{1}{a} e^{a\beta}\Big|_0^T = \frac{1}{a}(e^{aT} - 1) \mapsto$$

$$x[k+1] = e^{aT} x[k] + \left[\frac{1}{a}\left(e^{aT} - 1\right)\right] u[k] \ , \ \ y[k] = x[k] \mapsto$$

$$H(z) = \frac{(1/a)(e^{aT} - 1)}{z - e^{aT}} = \frac{(1/a)(e^{aT} - 1) z^{-1}}{1 - e^{aT} z^{-1}}$$

مثال ۱۹- تمرین ۳۵ را با فرض حضور نگهدار مرتبهٔ صفر بعد از ارائه داده‌ها، حل کنید.

حل: چنانچه دقت کنید ماتریس تحول حالت در حل مثال ۱۴ بدست آمده است. و از حل ۳۵ نیز میدانیم که: $b^T = [1 \ \ 0]$ و $c^T = [0 \ \ 1]$ ، لذا داریم:

$$F = \begin{bmatrix} e^{aT} & 0 \\ (1/a)(e^{aT} - 1) & 1 \end{bmatrix} \ , \ \ \underline{g} = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{a\beta} \\ 1/a(e^{a\beta} - 1) \end{bmatrix} d\beta = \begin{bmatrix} 1/a(e^{aT} - 1) \\ 1/a^2(e^{aT} - 1) - T/a \end{bmatrix} \quad \mapsto$$

$$\underline{x}[k+1] = \begin{bmatrix} e^{aT} & 0 \\ 1/a(e^{aT} - 1) & 1 \end{bmatrix} \underline{x}[k] + \begin{bmatrix} 1/a(e^{aT} - 1) \\ 1/a^2(e^{aT} - 1) - T/a \end{bmatrix} u[k] \quad , \quad y[k] = [0 \ \ 1]\, \underline{x}[k] \quad \mapsto$$

و برای تابع تبدیل معادل گسسته داریم:

$$(zI - F)^{-1} = \begin{bmatrix} z - e^{aT} & 0 \\ -1/a(e^{aT} - 1) & z - 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z - e^{aT})(z - 1)} \begin{bmatrix} z - 1 & 0 \\ 1/a(e^{aT} - 1) & z - e^{aT} \end{bmatrix} \quad \mapsto$$

$$\underline{c}^T (zI - F)^{-1} \underline{g} = \frac{1}{(z - e^{aT})(z - 1)} \begin{bmatrix} 1/a(e^{aT} - 1) & z - e^{aT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a(e^{aT} - 1) \\ 1/a^2(e^{aT} - 1) - T/a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1/a^2(e^{aT} - 1)(e^{aT} - 1 + z - e^{aT}) - T/a(z - e^{aT})}{(z - e^{aT})(z - 1)} = \frac{1/a^2(e^{aT} - 1)(z - 1) - T/a(z - e^{aT})}{(z - e^{aT})(z - 1)}$$

تمرین ۳۶- برای بدست آوردن تابع نمایی یک ماتریس، راه‌های دستی و راههای عددی فراوانی پیشنهاد شده است. سعی کنید مجموعه‌ای از آنها بهمراه یک مثال از هر کدام جمع آوری کنید.

تمرین ۳۷- همانگونه که دیدید، ما برای رسیدن به تحقق معادل گسسته از ۲۲ به ۳۱ ، به نحوی از ۳۰ استفاده کردیم. حال فرض کنید ورودی بدلایلی، با اندازهٔ δ نسبت به زمان نمونه برداری دیرتر به سیستم پیوسته اعمال میگردد (مثلا D/A این تاخیر را دارد). تحقق معادل گسستهٔ مرتبهٔ صفر را تحت این شرایط پیدا کنید.

تمرین ۳۸- مشابه آنچه در تمرین ۳۷ انجام دادید، این بار تحقق معادل گسستهٔ تعمیم یافته که در مثال ۹ بحث شد را، با فرض حضور نگهدار مرتبهٔ صفر بدست آورید.

۱-۴-۳) معرفی تحقق‌های گسستهٔ مختلف برای یک تابع تبدیل

دیدیم که تحقق گسستهٔ ۳۱ معادل تحقق پیوستهٔ ۲۲ می‌باشد و به تبع آن، تابع تبدیل گسستهٔ 32 نیز معادل تابع تبدیل پیوستهٔ ۲۸ خواهد بود. اما یادآور می‌شویم که تعداد بی شماری تحقق پیوسته میتوان ساخت که همگی به یک تابع تبدیل منجر شوند. در نتیجه تعداد بی شماری تحقق گسسته نیز میتوان ساخت که همگی به یک تابع تبدیل منجر شوند و این یعنی برای یک تابع تبدیل میتوان بی‌شماری تحقق ساخت. لذا اگر بخواهیم فیلتر یا کنترل کنندهٔ دیجیتالی بسازیم و یا برای سیستم پیوسته‌ای مدلی گسسته ارائه کنیم که فقط تابع تبدیلی را ارضا کند، بی شمار راه حل وجود دارد و فقط ملاحظات عملی در محاسبات و غیره، می‌تواند انتخاب تحقق خاصی را از میان این بی‌شمار تحقق، بهتر قلمداد کند.

تمرین ۴۰- با مراجعه به مدلسازی و متغیرهای حالت که در حوزهٔ پیوسته مطرح است، خواهید دید که چندین نوع تحقق مختلف برای یک تابع تبدیل معرفی میشوند. عیناً به همان شکل و فقط با تغییر ساده از عنصر انتگرالگیر خالص(1/s) به عنصر تاخیر خالص (z^{-1}) می‌توانید همان تحقق‌ها را در حوزهٔ گسسته نیز بسازید و فقط باید تعابیر گسسته را پیاده کنید. این کار را انجام داده و معادلات تفاضلی حالت را در مواردِ مشهور ارائه کنید.

تمرین ۴۱- در محیط Matlab برنامه‌ای بنویسید که ضرایب صورت و مخرج یک تابع تبدیل گسستهٔ مرتبهٔ شش را گرفته و بتواند، حسب انتخاب، هر یک از انواع تحقق‌های آنرا که در تمرین قبلی یافته‌اید، ساخته و برای هر ورودی دلخواهی که در برداری ریخته شده است، اجرا کند.

تمرین ۴۲- تابع تبدیل درجهٔ دوم زیر را به هر یک از روشهایی که در تمرین ۴۱ آماده کرده‌اید، محقق ساخته و بازای ورودی پله و شیب، خروجی را بدست آورید و نتایج را با هم مقایسه کنید.

$$H(z)=\frac{z+0.1}{(z-0.01)(z-0.99)}$$

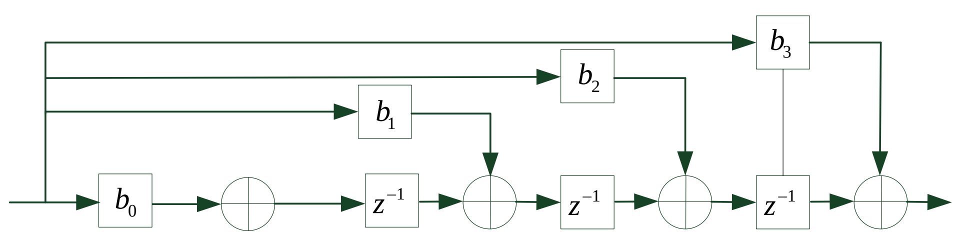
در ادامه یک نوع تحقق دیگری را معرفی خواهیم کرد. برای آنکه با این تحقق آشنا شوید ابتدا برای مرتبهٔ سه، آنرا محاسبه خواهیم نمود. برای این منظور تابع تبدیل کلی زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\frac{b_3z^3+b_2z^2+b_1z+b_0}{z^3+a_2z^2+a_1z+a_0}=\frac{b_3+b_2z^{-1}+b_1z^{-2}+b_0z^{-3}}{1+a_2z^{-1}+a_1z^{-2}+a_0z^{-3}} \qquad (۳۵)$$

حال در ابتدا فرض کنید تابع تبدیل به شکل زیر است:

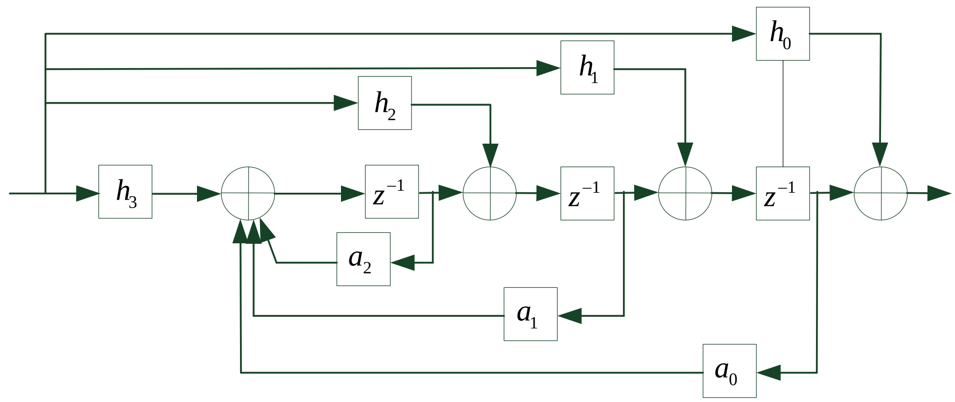
$$\frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\frac{b_3z^3+b_2z^2+b_1z+b_0}{z^3}=\frac{b_3+b_2z^{-1}+b_1z^{-2}+b_0z^{-3}}{1} \qquad (۳۶)$$

اولاً توجه کنید که پاسخ ضربهٔ چنین سیستمی پس از چند نمونه صفر خواهد شد(در این مورد پس از چهارمین نمونه همگی صفر خواهند شد) و به همین دلیل اینگونه سیستمها را FIR(Finite Impulse Respunse) یعنی با پاسخ ضربهٔ محدود نامیده‌اند. حال تحقق سادهٔ زیر را برای این سیستم در نظر بگیرید.



شکل (۲۴)

حال برگردیم به همان تابع تبدیل کلی ۳۲ و دیاگرام زیر را استفاده کنیم تا همچنان ابتدای پاسخ ضربه، خود را در تحقق نشان دهد.



شکل (۲۵)

یعنی با این انتخاب، هنوز هم پاسخ ضربه خواهد بود:

$h[0]=h_0 \quad , \quad h[1]=h_1 \quad , \quad h[2]=h_2 \quad , \quad h[3]=h_3 \quad , \quad \ldots$

و ضمناً مخرج تابع تبدیل نیز با توجه به همان قاعدهٔ ماسون خواهد بود:

$$\Delta = 1 + a_2 z^{-1} + a_1 z^{-2} + a_0 z^{-3}$$

حال باید ببینیم با این تحقق، hها چگونه به bها که در صورت تابع تبدیلند، مربوط خواهند شد. برای این منظور کافیست صورت را نیز از روش ماسون محاسبه کنیم و با صورت موجود متحد قرار دهیم:

$$\begin{aligned}
\Sigma T_i \Delta_i &= \left(h_3 z^{-3}\right)(1) + \left(h_2 z^{-2}\right)\left(1 + a_2 z^{-1}\right) + \left(h_1 z^{-1}\right)\left(1 + a_2 z^{-1} + a_1 z^{-2}\right) + \left(h_0\right)\left(1 + a_2 z^{-1} + a_1 z^{-2} + a_0 z^{-3}\right) \\
&= \left(h_3 + h_2 a_2 + h_1 a_1 + h_0 a_0\right) z^{-3} + \left(h_2 + h_1 a_2 + h_0 a_1\right) z^{-2} + (h_1 + h_0 a_2) z^{-1} + (h_0) \\
&\mapsto \begin{cases} b_3 = h_0 \\ b_2 = h_1 + b_0 a_2 \\ b_1 = h_2 + h_1 a_2 + h_0 a_1 \\ b_0 = h_3 + h_2 a_2 + h_1 a_1 + h_0 a_0 \end{cases} \\
&\qquad \mapsto \begin{cases} h_0 = b_3 \\ h_1 = b_2 - b_3 a_3 \\ h_2 = b_1 - b_2 a_2 + b_3 a_2^2 - b_3 a_1 \\ h_3 = b_0 - b_1 a_2 + b_{22}^2 - b_3 a_2^3 + b_3 a_1 a_2 - b_2 a_1 + b_3 a_2 a_1 - b_3 a_0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{۳۷}$$

و معادلات این تحقق نیز خواهد بود:

$$\begin{pmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ x_3[k+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_3[k] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} u[k]$$

$$y[k] = (1 \;\; 0 \;\; 0) \begin{pmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_3[k] \end{pmatrix} + h_0\, u[k] \qquad (۳۸)$$

توجه کنید که فقط موقعی پاسخ ضربه در زمان صفر میتواند مقدار غیر صفر داشته باشد که صورت و مخرج تابع تبدیل هم درجه باشند $(h_0 = 0 \longleftrightarrow b_3 = 0)$.

دقت کنید که این تحقق با هیچیک از تحققهای کانونی استاندارد اشتباه نشود. در این تحقق قسمت بالایی شبیه یکی از تحققهای کانونی استاندارد و قسمت پایینی شبیه دیگری است. به همین دلیل این تحقق نیز کانونی خوانده می‌شود.

تمرین ۴۳- با تقسیم مستقیم صورت به مخرج تابع تبدیل ۳۵، چهار مقدار اول پاسخ ضربهٔ سیستم را بر حسب a ها و b ها بدست آورده و دوباره ۳۷ را ثابت کنید.

تمرین ۴۴- برنامه‌ای در محیط Matlab بنویسید که از روی ضرایب صورت و مخرج تابع، تبدیل، تحقق بالا را ساخته و اجرا کند. سپس تابع تمرین ۴۲ را وارد نموده و نتایج را بطور مشابه بدست آورید.

تمرین ۴۵- نشان دهید دو تحقق 33 و تحقق زیر، هم تابع تبدیل‌اند.

$$\underline{\hat{x}}[k+1] = F^T \underline{\hat{x}}[k] + \underline{c}\, u[k] \quad , \quad y[k] = \underline{g}^T \underline{\hat{x}}[k] + d\, u[k] \qquad (۳۳)$$

راهنمایی: از خاصیت $F^{-T} = (F^{-1})^T = (F^T)^{-1}$ در ماتریسها استفاده کنید. توجه کنید که متغیرهای حالت در دو تحقق یکسان نیستند و لذار از نماد متفاوت استفاده شده است.

تمرین ۴۶- با توجه به تمرین ۴۵، برای تحقق ۳۸ یک تحقق تابع تبدیل ارائه کنید.

تمرین۴۷- با توجه به تمرین ۴۵، برای تحقق‌هایی که در تمرین ۴۰ مورد بررسی قرار دادید، تحقق‌های هم تابع تبدیل ارائه کنید. چنانچه ارتباط خاصی را یافتید، ذکر کنید.

۱-۵- آمونهای پایداری و ناپایداری برای معادل‌های گسسته

معادل آنچه در سیستمهای پیوسته برای تعداد ریشه‌های سمت راست محور موهرمی یک چند جمله ای دیده‌اید (روث- هرویتز) برای تعیین بیرون دایرهٔ واحد بودن نیز ورشی مشابه وجود دارد. این روش معروف به آزمون ژوری است که در ضمینهٔ ۱ ب شرح داده شده است.

همینطور، مشابه معیار نایکویست برای تعیین پایداری ویا ناپایداری حلقه بسته که در سیستمهای پیوسته دیده‌اید، برای سیستمهای گسسته نیز عیناً وجود دارد که شرح آن در ضمینهٔ ۲ آماده است.

لازم است با مراجعه به این ضمائم، تسلط به این ابزارهای بوجود آید.

نهایتاً اگر تحقق سیستم در دسترس باشد میتوان پایداری و ناپایداری را از روی مقادیر ویژهٔ ماتریس F نیز تعیین نمود. به عبارت بهتر این مقادیر همان مودها یا قطبهای تابع تبدیل خواهند بود و چنانچه حتی یکی از مقادیر ویژه، بیرون یا روی دایرهٔ واحد باشد، شرط BIBO که برای پایداری آموخته‌اید، مخدوش خواهد شد.

خواص پایه‌ای تبدیل z

خطی بودن

$$\alpha f_1(t) \qquad\qquad \alpha F_1(z)$$

انتقال در محور زمان

$$f(t-kT) \qquad\qquad z^{-k}F(z)$$

$$f(t+kT) \qquad\qquad z^k\left[F(z)-\sum_{i=0}^{k-1} f(iT)z^{-i}\right]$$

ضرب در تابع نمایی

$$e^{\mp at}f(t) \qquad\qquad F(ze^{\mp at})$$

عنصر تفاضل

$$\Delta^m f(nT) \qquad\qquad (z-1)^m F(z)-z\sum_{k=0}^{m-1} (z-1)^{m-k-1}\Delta^k f(0)$$

$$\Delta^m f(nT) \qquad\qquad (1-z^{-1})^m F(z)$$

عنصر جمع

$$g(nT)=\sum_{k=0}^{n} f(kT) \qquad\qquad G(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}F(z)$$

تغییر مقیاس در زمان

$$f(at) \qquad\qquad F\left(z^{1/a}\right)$$

ضرب یا تقسیم زمان

$$tf(t) \qquad\qquad -zT\left\{\frac{d}{dz}F(z)\right\}$$

$t^{-1} f(t)$ $\qquad$ $-\frac{1}{T}\int_{0}^{z} \frac{1}{w} F(w)\, dw$

قضایای مقادیر اولیه و نهایی

$f(t \to 0) = F(z \to \infty)$ $\qquad$ $f(t \to \infty) = (1 - z^{-1}) F(z)|_{z \to 1}$

خاصیت کانولوشن

$g(nT) = \sum_{k=0}^{n} f_1(kT) f_2(nT - kT)$ $\qquad$ $G(z) = F_1(z) F_2(z)$

$f_1(t) f_2(t)$ $\qquad$ $\frac{1}{2\pi j}\oint_{c} \frac{F_1(w) F_2(z/w)}{w} dw$

قضیهٔ پارسوال

$\sum_{k=0}^{\infty} f_1(t) f_2(t)$ $\qquad$ $\frac{1}{2\pi j}\oint_{c} z^{-1} F_1(z) F_2(z^{-1}) dz$

چندین سیگنال پایه بهمراه زد و زد تعمیم یافتهٔ شان

$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$	$F(z,d)$
$\delta(t)$	1	1	0
$u_{-1}(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{z-1}$
T	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{T[d(z-1)+1]}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{e^{-adT}}{z-e^{-aT}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	$\frac{Te^{-adT}\left[e^{-aT}+d(z-e^{-aT})\right]}{(z-e^{-aT})^2}$
$\sin\ \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$	$\frac{z\sin d\omega T+\sin(1-d)\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$	$\frac{z\cos d\omega T-\cos(1-d)\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$	$\frac{e^{-adT}[z\sin d\omega T+e^{-aT}\sin(1-d)\omega T]}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{z(z-e^{-aT}\cos\omega T)}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$	$\frac{e^{-adT}[z\cos d\omega T-e^{-aT}\cos(1-d)\omega T]}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$