بسمه تعالی

درس ۲ کنترل دیجیتال

نگارنده: حیرانی نوبری

۲) چند روش طراحی کنترل کننده‌های دیجیتال برای سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان

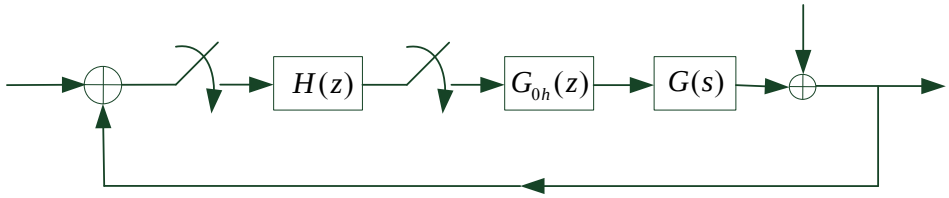
با استفاده از ابزارهای ریاضی که در درس ۱ به آنها پرداخته شد، می‌توان با جرأت بیشتری به طراحی کنترل کننده‌های دیجیتال برای سیستمهای خطی نامتغیر با زمان، بخصوص در ترکیبی مشابه شکل زیر، پرداخت. برای این کار مسیرهای متفاوتی پیشنهاد شده است که حسب موضوع، طراح میتواند هر یک را برگزیند. در این درس مشخصاً چهار مسیر معرفی می‌گردند که عمدتاً به همان روشهای آموخته شده در کنترل کلاسیک سیستمهای پیوسته باز می‌گردند.

اولین راه، که شاید در وهلهٔ اول به ذهن همه نیز مبادرت کند، این است که تمام طراحی را در همان حوزهٔ پیوسته انجام دهیم و سپس سعی کنیم بگونه‌ای کنترل کنندهٔ پیوستهٔ بدست آمده را به یک کنترل کنندهٔ دیجیتال تبدیل نموده و امیدوار باشیم که همان رفتار کنترل کنندهٔ پیوسته را حتی المقدور از خود نشان دهد. ملاحظات مربوط به این مسیر را در جای خود خواهیم دید.

دومین راه، سعی در استفاده مستقیم از روش مکان هندسی در صفحهٔ زد است. این نیز با ایجاد مفاهیم مقدماتی مشترک و سپس با چند مثال ارائه خواهد گشت.

سومین راه، بکارگیری مفاهیم فرکانسی و استفاده از همان روشهای بکار گرفته شده در حوزهٔ پیوسته، مانند نمایش بود، است. طبیعی است که این کار بطور مستقیم ممکن نبوده و نیاز به مبدلهایی دارد که در جای خود به آن پرداخته خواهد شد.

چهارمین راه که بطور اختصاصی برای سیستمهای گسسته مطرح شده است، سعی دارد کنترل کننده را بگونه‌ای بسازد که سیستم حلقه بستهٔ کلی، در کمترین زمان ممکن ورودی‌های خاصی را دقیقاً و بدون خطا دنبال کند و یا معادلاً در کمترین زمانِ ممکن بتواند اثر اغتشاشات خاصی را در خروجی، بطور کامل از بین ببرد. حذف صفر و قطب‌های سیستمِ اصلی بوسیلهٔ کنترل کننده، اساس این طراحی را تشکیل می‌دهد که در جای خود به آن خواهیم پرداخت.



شکل (۱)

۲-۱) استفاده از تقریبهای گسستهٔ کنترل کننده‌های پیوسته

در بسیاری موارد مواجهیم با یک سیستم موجود که با یک کنترل کنندهٔ پیوسته در حال کنترل است ولی بدلایل زیادی، که عموماً به مزایای استفاده از تجهزات دیجیتال باز می‌گردد، علاقمندیم

که کنترل کنندهٔ موجود پیوسته را به دیجیتال تبدیل کنیم. در مواردی نیز موضوع چنین نیست بلکه اصولاً راحت‌تریم که از فنون موجود در حوزهٔ پیوسته برای طراحی استفاده کنیم و سپس نتیجهٔ حاصله را به دیجیتال تبدیل کنیم.

در هر دو مورد بهر حال باید سه کار را بترتیب انجام دهیم:

طراحی در حوزهٔ پیوسته ولی این بار با ملاحظهٔ اینکه بعداً می‌خواهد بصورت دیجیتال تبدیل و استفاده شود.

تبدیلِ کنترل‌کنندهٔ طراحی شدهٔ پیوسته به یک کنترل کنندهٔ دیجیتال.

تشکیلِ معادل گسستهٔ دقیق سیستم نهایی برای اطمینان از پایداری و رفتار واقعی سیستم.

طبیعی است که ما در اینجا ابتدا فقط به ملاحظاتی که باید در مرحلهٔ ۱ صورت پذیرد، می‌پردازیم و سپس روشهای مختلفی را که برای تقریبهای دیجیتال برای استفاده در مرحلهٔ ۲ پیشنهاد شده است، توضیح خواهیم داد.

۲-۱-۱- ملاحظهٔ وجود اجباری *D/A*

چنانچه در شکل ۱ نیز ملاحظه می‌کنید، طراح کنترل کنندهٔ پیوسته نباید فقط $G(s)$ را بلکه باید $G_{0h}G(s)$ را بعنوان سیستم تحت کنترل تلقی کند. برای کمک به این طراح، تقریب مناسب زیر برای $G_{0h}(s)$ ارائه می‌گردد تا در طراحی خود چه در صفحهٔ s و چه در حوزهٔ فرکانسی استفاده کند.

$$e^{-Ts} \approx \frac{1-\frac{T}{2}s}{1+\frac{T}{2}s} \Rightarrow G_{0h}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \approx \frac{1-\frac{1-(T/2)s}{1+(T/2)s}}{s} = \frac{\frac{Ts}{1+(T/2)s}}{s} = \frac{T}{1+(T/2)s} = \frac{2}{s+2/T} \quad (۱)$$

البته بهرهٔ dc آن T_s است ولی با توجه به اینکه بهرهٔ dc یِ آن نسبت به ورودیِ پلهٔ گسسته باید تعیین گردد و نه نسبت به ورودی پلهٔ پیوسته(چراکه ورودیِ آن گسسته است و ضربه‌ای)، لذا بهرهٔ dcیِ آن واحد (1) فرض می‌گردد. یعنی یک $\frac{1}{T_s} = f_s$ در عبارت بالا ضرب می‌کنیم تا معادلِ ریاضیِ درست را در نظر گرفته باشیم:

$$\frac{2f_s}{s+2f_s}$$

چه هنگام طراحی در صفحهٔ s و چه هنگام طراحی در حوزهٔ فرکانس باید توجه داشت که مشخصه‌های اصلی طراحی باید به اندازهٔ کافی از این قطبِ $-\frac{2}{T_s} = -2f_s$(یا فرکانسِ $2f_s$) دور

باشند و همواره این حقیقت لحاظ شود که این قطبِ اضافی فقط یک تقریب است و فقط تا کمی بعد از آن کار محاسباتی ما معتبر است.

اگر خواسته‌های طراحی به حول وحوش این فرکانس(بویژه بعد از آن) الزاماتی دارد، مطمئن باشید که فرکانس نمونه‌برداری را به غلط انتخاب نموده‌اید و این خود معیاری است برای انتخابِ صحیحِ فرکانس نمونه برداری که حتماً باید رعایت گردد.

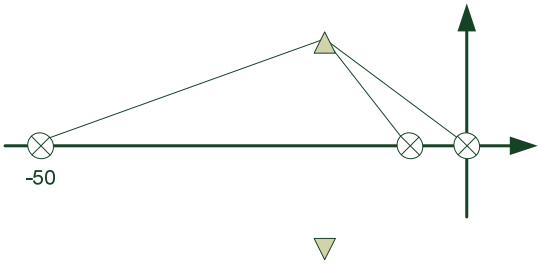
مثال۱- برای سیستم مرتبهٔ اول زیر قصد داریم یک کنترل کنندهٔ دیجیتال طراحی کنیم ولی ابتدا می‌خواهیم یک طراحی در حوزهٔ پیوسته انجامن داده و سپس آن را دیجیتالی کنیم. خواسته‌های طراحی خطای ماندگار *0* برای ورودی پلهٔ و ثابت زمانی حدود 0.1s و ضریب میرایی *0.7* است.

$$G(s)=\frac{3}{s+3}$$

حل: می‌دانید که لازم است یک انتگرالگیر خالص به سیستم اضافه گردد تا خواستهٔ ما در مورد خطای ماندگار ایجاب گردد. با توجه به ثابت زمانی و ضریب میرایی خواسته شده نیز محل قطب‌های غالب را $-10\pm10j$ می‌گیریم. در ادامه برای رسیدن به این قطبها با توجه به اینکه یک قطب در مبدأ گذارده‌ایم حال می‌توان یک صفر نیز گذارد (یعنی در واقع در حال طراحیِ یک *PI* هستیم). پس مانده که جای این صفر را تعیین کنیم. برای این کافیست ابتدا زاویهٔ اضافیِ لازمه را برای قرارگیریِ قطبها در آنجا محاسبه و سپس تأمین آنرا از این صفر خواهان باشیم که به این ترتیب جایِ آن تعیین خواهد شد.

چون قطبهای مؤثر نهایی فرکانسی حدود ۱۰ دارند، قطب مربوط به فرکانس نمونه‌ها را نیز -50 انتخاب می‌کنیم(یعنی فرکانس نمونه‌برداری را $25Hz$ گرفته‌ایم).

به این ترتیب برای محل قطب جبرانساز می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده نمود:



$$-135-(180-\tan^{-1}\frac{10}{7})-\tan^{-1}\frac{10}{40}+\theta_{\text{لازم}}=-180$$

$$\theta_{\text{لازم}}=94^\circ$$

که این یعنی تقریباً باید صفر را زیر قطبهای مطلوب گذارد. به شکلِ بالا توجه کنید! و از محاسبهٔ دقیقِ آن صرف نظر می‌کنیم. پس می‌ماند محاسبهٔ بهرهٔ جبرانساز که برای بهرهٔ مکان هندسی کل بدست می‌آید:

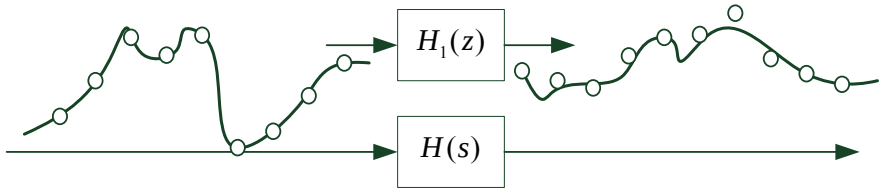
$$\frac{(10^2+40^2)^{\frac{1}{2}}\,(10^2+7^2)^{\frac{1}{2}}\,(10^2+10^2)^{\frac{1}{2}}}{10}=712$$

و با توجه به اینکه بهرهٔ مکان هندسی برای سیستم اصلی بعلاوهٔ مدل نگهدار برابر $3\cdot 50=150$ است (*50* مربوط به بهرهٔ مکان هندسی نگهدار است. گفتیم که طوری تعیین میشود تا بهرهٔ *dc*یِ آن برابر ۱ گردد). پس جبرانساز بصورت زیر نهایی می‌شود:

$$\frac{712}{150}\frac{s+10}{s}=4.75\cdot\frac{s+10}{s}=4.75\left(1+\frac{1}{0.1\,s}\right)$$

۲-۱-۲- تقریب‌های گسستهٔ فیلترهای پیوسته

ملاحظه می‌کنید که حال کافیست راهی بیابیم که فیلتر پیوستهٔ طراحی شده را با یک فیلتر دیجیتال مناسب، جایگزین کند. مهمترین نکته که هیچگاه نباید فراموش شود این است که: هر فیلتر دیجیتالی که بصورت سببی (علی) بعنوان جایگزینی برای فیلتر پیوسته معرفی و استفاده شود، همواره تقریبی از آن فیلتر پیوسته است و هرگز نخواهیم توانست ادعا کنیم که فیلتر جایگزین دقیقاً همان کاری را می‌کند که فیلتر پیوسته انجام می‌دهد. این موضوع از این حقیقت مهم نشأت می‌گیرد که اصولاً به فیلتر دیجیتال اطلاعات کاملی از سیگنال ورودی داده نمی‌شود و فقط نمونه‌هایی در اختیار او قرار می‌گیرد (به شکل ۲ توجه کنید). لذا اطلاعات بین نمونه ها را ندارد و مختار است که این اطلاعات بینی را خودش هرگونه که صلاح می‌داند، در نظر بگیرد.



شکل (۲)

این موضوع را به زبانی دیگر نیز بیان می‌کنیم تا از الطاف این بیان هم بهره‌مند گردیم. بار دیگر بیاد آورید که یک فیلتر پیوسته، صرف نظر از تعداد انتگرالگیرهایش، بهر صورت، درحال انتگرالگیری است. حال برای سادگی فقط یک انتگرالگیر خالص را تصور کنید. وقتی شما از زمان t_k تا t_{k+1} فقط دو مقدار دارید و از منحنیِ ورودی در این بین خبری ندارید، چگونه میتوانید انتگرال واقعی را بدست آورید؟ پس هر فرضی هم برای حل این مشکل انجام دهیم بهرحال از حقیقت فاصله گرفته و دچار تقریب هستیم. در شکل ۲ نیز می‌بینید که خروجی فیلتر گسسته لزوماً مطابق فیلتر پیوسته نیست. البته هر چه سعی کنیم که این انتگرالگیری دقیقتر و با واقعیت منطبقتر صورت گیرد حتماً تقریب بهتری خواهیم داشت.

همین آزادی در نحوهٔ تصور اطلاعات بینی، روشهای مختلفی را برای تقریب زدن ایجاد کرده است که در ادامه با ارائهٔ این تصورهای مختلف روشهای پیشنهادی برای تقریب را معرفی خواهیم کرد. اما با توجه به همان صحبتی که بالاتر در مورد انتگرالگیری شد، هر تصوری که صورت پذیرد، کار میتواند نهایتاً به دو شکل پیاده گردد:

الف- با تصوری که برای ورودی فیلتر پیوسته فرض میشود، خروجی فیلتر را بدست آورده زد نمونه‌های خروجی به زد نمونهای ورودی را، فیلتر تقریبی خود قلمداد کنیم.

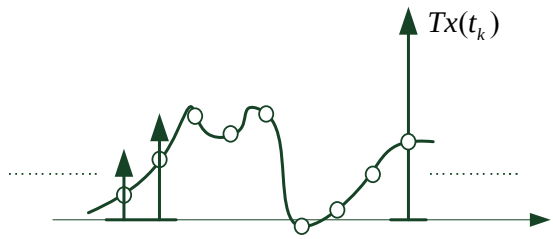
ب- ابتدا با آن تصور، فقط تقریب گسستهٔ یک انتگرالگیرِ خالص بدست می‌آید و سپس بجای تمام انتگرالگیرهای پیوسته این انتگرالگیرِ گسستهٔ تقریبی، جایگزین می‌گردد و نهایتاً فیلتر تقریبی گسسته بدست می‌آید. بعبارت ساده‌تر یعنی: با هر تصوری که داریم، ابتدا مدل گسستهٔ تقریبی $1/s$ بر حسب z برست آورده شود و سپس در فیلتر پیوسته بجای همهٔ $1/s$ ها بر حسب z گذارده شده و فیلتر دیجیتال را بدست آوریم.

در ادامه بازای هر روشی که به تصوری خاص باز می‌گردد، این دو مسیر نیز برای تقریب‌سازی یادآور می‌شود و در مثالهای مختلف تفاوت این دو مسیر، دیده خواهد شد.

۲-۱-۲-۱- ضربه‌ای تصور کردن وروری

این تصور، سیگنال ورودی را بین زمان نمونه‌ها 0 در نظر می‌گیرد و در عوض درست در این زمانها مقدار T برابر نمونه هایی را که دارد، در نظر می‌گیرد (به شکل ۳ توجه کنید). بعبارت بهتر این تصور می‌گوید: مقداری که هم‌اکنون در مثلاً t_k دارم نمایندهٔ تمام مقادیر ورودی از $t_k - \frac{T}{2}$ تا $t_k + \frac{T}{2}$ است و همهٔ آنها را فقط بصورت یک ضربه در آن زمان ولی به اندازهٔ T برابر در نظر می‌گیرم.

چناچه توجه دارید نتیجهٔ این تصور چیزی نخواهد بود مگر، T برابر همان معادل گسستهٔ ورودی‌های ضربه‌ای که قبلاً نحوهٔ بدست آوردن آنرا در درس ۱ آموخته‌اید.



شکل (۳)

حال چناچه بخاطر دارید این روش برای که یک انتگراگیرخالص با توجه به حل دوگانه‌ای که در مثال ۱ درس ۱ دیدید، دو نتیجهٔ زیر را خواهد داد:

$$\frac{1}{s} \Rightarrow TZ\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{T}{2}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{T}{2}\cdot\frac{z+1}{z-1} \qquad (۳)$$

یا

$$= \frac{T}{1-z^{-1}} = \frac{Tz}{z-1} \qquad (۴)$$

و چنانچه در همانجا هم راجع به تعبیر هندسی هر دو، صحبت شد، می‌دانید که اولی انتگرالگیری ذوزنقه‌ای و دومی انتگرالگیری مستطیلی پایینی را پیشنهاد می‌دهند.

مثال ۲- برای دو انتگرالگیر خالص سری، تقریب پیوسته را با تصور بالا و به دو روش الف و ب که در بالاتر آمد، ارائه کنید.

حل: برای ب از روی۳و۴ ، بترتیب بدست می‌آید:

$$\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s} \Rightarrow \frac{T}{2}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\cdot\frac{T}{2}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{T^2}{4}\cdot\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-2z^{-1}+z^{-2}} \qquad (۵)$$

و

$$= \frac{T}{1-z^{-1}}\cdot\frac{T}{1-z^{-1}} = \frac{T^2}{1-2z^{-1}+z^{-2}} \qquad (۶)$$

و برای الف نیز از جدول خواهیم داشت:

$$T\,Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{T^2 z}{(z-1)^2} = \frac{T^2 z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}} \qquad (۷)$$

تمرین ۱- برای کنترل کنندهٔ بدست آمده در مثال ۱ با استفاده از تصور ضربه‌ای و مسیر الف، تقریب گسسته‌ای پیشنهاد کنید.

تمرین ۲- برای کنترل کنندهٔ بدست آمده در مثال ۱ با استفاده از تصور ضربه‌ای و مسیر ب، تقریب گسسته‌ای پیشنهاد کنید.

تمرین۳- با توجه به تصور ضربه‌ای و مسیر ب، ملاحظه می‌کند که کلیهٔ نقاط صفحهٔ s به نحوی از این صفحه به صفحهٔ z می‌روند. با عنایت به این موضوع بدست آورید که نقاط سمت چپ محور موهومی در صفحهٔ s به چه نقاطی در صفحهٔ z می‌روند و از اینجا نتیجه‌گیری کنید که آیا فیلترهای پایدار پیوسته تحت این تبدیل‌ها، لزوماً به فیلترهای پایدار گسسته منجر می‌شوند یا خیر؟ برای توضیح بهتر شکل مناسبی را در زیر رسم کنید. این تمرین را برای هر دو حل موجود اجرا کنید.

شکل (۴)

۲-۱-۲-۲- تصور پلکانی دیر هنگام

در شکل ۵ هر سه مورد پلکانی زود هنگام، به هنگام و دیر هنگام نمایش داده شده‌اند. و اما برای حالت دیر هنگام، توجه می‌کنیم که سیگنال ورودی به سیستمِ پیوسته مانند آن است که از خروجیِ یک نگهدار مرتبهٔ صفر درست شده باشد. پس برای مسیر الف، تقریب ما، همان گسستهٔ به همراه نگهدار مرتبهٔ صفر را نتیجه خواهد داد.

حال دوباره برای کاربرد در مسیر ب، ابتدا تقریب یک انتگرالگیر خالص را می‌یابیم:

$$\frac{1}{s} \quad \rightarrow \quad Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s}\right\} = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \left(T\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\right) \qquad (8)$$

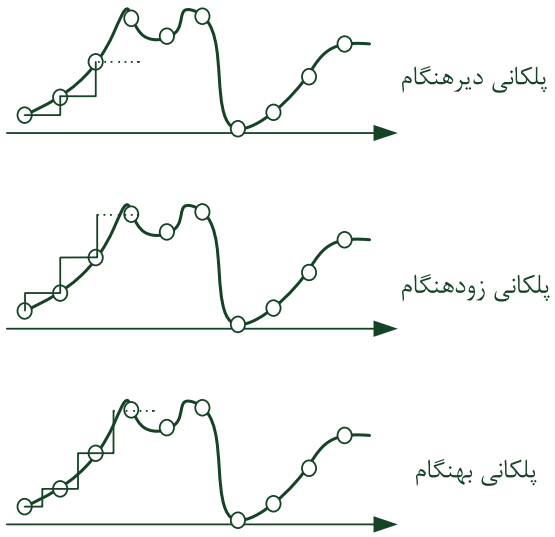
مثال ۳- برای دو انتگرالگیر خالص سری، تقریب پیوسته را با تصور پلکانی دیرهنگام و به دو روش الف و ب ، ارائه کنید.

حل: برای ب از روی ۸ ، بدست می‌آید:

$$\frac{1}{s^2}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}\Rightarrow\frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}}\cdot\frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}}=\frac{T^2z^{-2}}{1-2z^{-1}+z^{-2}} \qquad (۹)$$

و برای الف نیز از روی جدول خواهیم داشت:

$$(1-z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s^3}\right\}=-\frac{z-1}{z}\cdot\frac{Tz}{2}\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{Tz}{(z-1)^2}\right)=\frac{z-1}{z}\cdot\frac{T^2z}{2}\cdot\frac{(z-1)^2-2(z-1)z}{(z-1)^4}=$$
$$=\frac{T^2}{2}\cdot\frac{z+1}{(z-1)^2}=\frac{T^2}{2}\cdot\frac{z^{-1}+z^{-2}}{1-2z^{-1}+z^{-2}} \qquad (۱۰)$$



شکل ۵

تمرین ۴- برای کنترل کنندهٔ بدست آمده در مثال ۱ با استفاده از تصور پلکانی دیرهنگام و مسیر الف، تقریب گسسته‌ای پیشنهاد کنید.

تمرین ۵- برای کنترل کنندهٔ به دست آمده در مثال ۱ با استفاده از تصور پلکانی دیرهنگام و مسیر ب، تقریب گسسته‌ای پیشنهاد کنید.

تمرین ۶- با توجه به تصور پلکانی دیر هنگام و مسیر ب، ملاحظه می‌کنید که کلیهٔ نقاط صفحهٔ s به نحوی از این صفحه به صفحهٔ z می‌روند. با عنایت به این موضوع بدست آورید که نقاط سمت چپ محور موهومی در صفحهٔ s به چه نقاطی در صفحهٔ z می‌روند و از اینجا نتیجه‌گیری کنید که آیا فیلترهای پایدار پیوسته تحت این تبدیل، لزوماً به فیلترهای پایدار گسسته منجر می‌شوند یا خیر؟ برای توضیح بهتر شکل مناسبی را در زیر رسم کنید.

شکل(۶)

۲-۱-۲-۳- تصور پلکانی زود هنگام

دوباره به شکل ۴ برای زود هنگام توجه کنید. سیگنال ورودی به سیستم پیوسته مانند آن است که از خروجی یک نگهدار مرتبهٔ صفر درست شده‌اند ولی این بار، گویا داده‌ها یک پریود زودتر به آن ارسال شده‌اند. پس برای مسیر الف، تقریب ما، همان معادل گسستهٔ به همراه نگهدار مرتبهٔ صفر ولی ضربدر z است.

$$\frac{1}{s} \Rightarrow z \quad , \quad Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{1}{s}\right\} = z(1-z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{T}{1-z^{-1}} \qquad (۱۱)$$

که اگر دقت کنید معادل یکی از تبدیلهای بدست آمده در تصور ضربه‌ای است (به معادلهٔ ۴ نگاه کنید).

مثال ۴- برای دو انتگرالگیر خالص سری، تقریب گسسته را با تصور پلکانی زود هنگام و فقط به روش الف ارائه کنید.

حل: از روی حل مثال ۳ داریم:

$$z(1-z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{T^2}{2}\cdot\frac{z^2+z}{(z-1)^2} = \frac{T^2}{2}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}} \qquad (۱۲)$$

تمرین ۷- برای کنترل کنندهٔ بدست آمده در مثال۱ با استفاده از تصور پلکانی زود هنگام و مسیر الف، تقریب گسسته‌ای پیشنهاد کنید.

تمرین ۸- ملاحظه کنید که: برای کنترل کنندهٔ بدست آمده در مثال ۱ با استفاده از تصور پلکانی زود هنگام و مسیر ب، تقریب گسسته، همان نتیجهٔ مسیر ب در یکی از دو حل تصور ضربه‌ای است.

۲-۱-۲-۴- تصور پلکانی بهنگام

در شکل ۴ برای پلکانی بهنگام توجه کنید که سیگنال ورودی به سیستم پیوسته مانند آن است که از خروجی یک نگهدار مرتبهٔ صفر درست شده، ولی این بار، گویا داده‌ها نیم پریود زودتر به آن ارسال شده‌اند.

تمرین ۹- با توجه به تعبیر فوق نشان دهید در حالت کلی برای تقریب با تصور پلکانی بهنگام داریم:

$$(z-1)Z_{d=0.5}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}=(z-1)G_1(z,d=0.5) \quad G_1(s)={G(s)}/{s} \qquad (۱۳)$$

مثال ۵- برای دو انتگرالگیر خالص سری، تقریب پیوسته را با تصور پلکانی بهنگام و فقط به روش الف، ارائه کنید.

حل: از معادلهٔ بالا مستقیماً به دست می‌آید (از جدول و خواص زد استفاده شود):

$$(z-1)\,Z_{d=0.5}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} \qquad (۱۴)$$

تمرین ۱۰- نشان دهید مسیر ب با تصور پلکانی بهنگام به یکی از تبدیلهای به دست آمده در تصور ضربه‌ای منجر خواهد شد.

تمرین ۱۱- برای کنترل کنندهٔ به دست آمده در مثال۱ با استفاده از تصور پلکانی بهنگام و مسیر الف، تقریب گسسته‌ای پیشنهاد کنید.

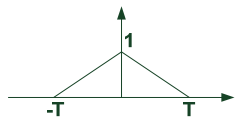
تمرین ۱۲- ملاحظه کنید که: برای کنترل کنندهٔ به دست آمده در مثال۱ با استفاده از تصور پلکانی بهنگام و مسیر ب، تقریب گسسته، همان نتیجهٔ مسیر ب در یکی از دو حل تصور ضربه‌ای است.

۲-۱-۲-۵ - تصورهای شیبدار (با حافظه)

منظور از تصورهای شیب‌دارِ گوناگون، در شکل۷ آمده است. در ادامه طی تمرین‌های زیر، راهی برای به دست آوردن تقریب با تصور شیبدار زود هنگام ارائه می‌گردد.

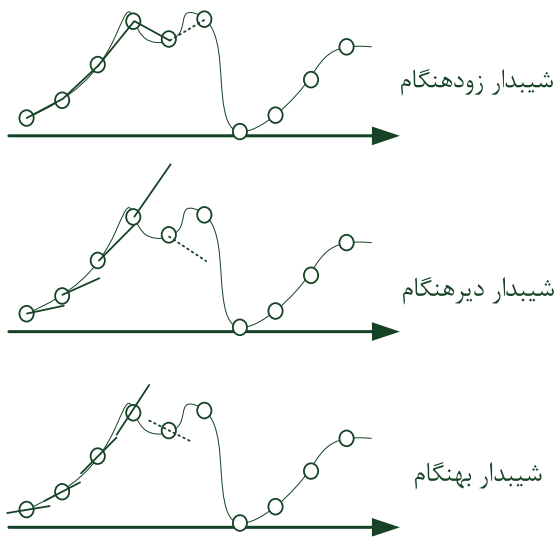
ابتدا توجه می‌کنیم که این تصور مانند تمامی تصورهای پیشین خطی است و لذا از روی پاسخ ضربهٔ واحد، می‌توان تابع تبدیل لاپلاس آن را نوشت.

تمرین ۱۳ - نشان دهید پاسخ ضربهٔ تصور شیب‌دار زود هنگام به صورت زیر است:



تمرین ۱۴- از روی پاسخ ضربه بدست آمده در تمرین قبل، نشان دهید تابع تبدیل لاپلاس برای این تصور خواهد بود:

$$\frac{1}{T}\left(\frac{e^{Ts}-2+e^{-Ts}}{s^2}\right) \qquad (۱۵)$$



شکل (۷)

تمرین ۱۵- با توجه به نتایج دو تمرین بالا استدلال کنید که تقریب گسستهٔ با تصور شیب‌دار زود هنگام از رابطهٔ کلی زیر بدست می‌آید.

$$\frac{1}{T}\left(z-2+z^{-1}\right)Z\left\{\frac{G(s)}{s^2}\right\}=\frac{1}{T}z(1-z^{-1})^2\ Z\left\{\frac{G(s)}{s^2}\right\}=\frac{1}{T}z^{-1}(z-1)^2 Z\left\{\frac{G(s)}{s^2}\right\} \qquad (۱۶)$$

تمرین ۱۶- نشان دهید مسیر ب با تصور شیب‌دار زود هنگام به یکی از تبدیل‌های بدست آمده در تصور ضربه‌ای منجر خواهد شد.

تمرین ۱۷- نشان دهید تقریب یک فیلتر مرتبهٔ اول $\frac{a}{s+a}$ با تصور شیب‌دار زود هنگام خواهد بود:

$$\frac{1}{Ta}\cdot\frac{(aT-1+e^{-aT})+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}} \qquad (۱۷)$$

تمرینهای کلی و نگرشهای جدیدتر برای بخش ۲-۱-۲

تمرین ۱۸- فرض کنید فیلتر پیوسته‌ای که می‌خواهد برای آن تقریب گسسته‌ای ارائه کنید بتواند با تحقق $(A,\underline{b,c,d})$ ارائه گردد. تحقق گسستهٔ تقریب شیبدار دیر هنگام را بر حسب این تحقق پیوسته بدست آورده و از این راه تابع تبدیل گسسته را بدست دهید.

تمرین ۱۹- عیناً مانند تمرین بالا تحقق گسستهٔ تقریب شیب‌دار زود هنگام را بر حسب این تحقق پیوسته بدست آورده و از این راه تابع تبدیل گسسته را به دست دهید.

تمرین ۲۰- عیناً مانند تمرین بالا تحقق گسستهٔ تقریب شیب‌دار بهنگام را بر حسب این تحقق پیوسته بدست آورید. و از این راه تابع تبدیل تقریب گسسته را بدست دهید.

تمرین۲۱- عیناً مانند تمرین بالا تحقق گسستهٔ تقریب پلکانی دیر هنگام را بر حسب این تحقق پیوسته بدست آورید. و از این راه تابع تبدیل تقریب گسسته را بدست دهید.

تمرین ۲۲- عیناً مانند تمرین بالا تحقق گسستهٔ تقریب پلکانی زود هنگام را بر حسب این تحقق پیوسته بدست آورید. و از این راه تابع تبدیل تقریب گسسته را بدست دهید.

تمرین ۲۳- عیناً مانند تمرین بالا تحقق گسستهٔ تقریب پلکانی بهنگام را بر حسب این تحقق پیوسته بدست آورید. و از این راه تابع تبدیل تقریب گسسته را بدست دهید.

تمرین۲۴- در مورد تک تک تقریبهای فوق که از مسیر الف بدست می‌آیند، استدلال کنید که آیا یک فیلتر پیوستهٔ پایدار حتماً به یک فیلتر گسستهٔ پایدار منجر می‌گردد؟

تمرین ۲۵- در قسمتهای گوناگون ۲-۱-۲، با دیدگاههای مختلف به سه نوع تبدیل زیر برای $1/s$ رسیدیم. پاسخ فرکانسی این سه انتگرالگیر گسستهٔ تقریبی را با انتگرالگیر اصلی مقایسه کنید. و با رسم شکلهای مناسب که وضعیت نسبی آنها نیز نمایان باشد، اظهار نظر کنید که هر یک تا چه فرکانسهایی (نسبت به فرکانسِ $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$) می‌توانند تقریبِ مناسبی برای انتگرالگیر باشند.

تبدیل تفاضل مستقیم:

$$\frac{1}{s} \rightarrow \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} \qquad (۱۸)$$

تبدیل تفاضل معکوس:

$$\frac{1}{s} \rightarrow \frac{T}{1-z^{-1}} \qquad (۱۹)$$

تبدیل دو خطی:

$$\frac{1}{s} \rightarrow \frac{T}{2}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \qquad (۲۰)$$

نکتهٔ مهم: توجه کنید که فیلترهای گسسته‌ای که طراحی می‌کنید در فرکانسهای دیگری بجز آنهایی که شما می‌خواهید نیز بهره‌هایی دارند در حالیکه فیلترهای پیوسته قطعاً این بیماری را ندارند. در عمل بدلایل فراوانی ممکن است در ورودیِ فیلتر، سیگنالهای ناخواستهٔ با فرکانسهای دور از انتظاری بیایند و فعالیت کنند که چنانچه گفته شد ممکن است شدیداً نیز تقویت شوند و بکلی خروجی فیلتر را منقلب سازند. این موضوع از مسائل مهمی است که باید به جد مد نظر قرار گیرد.

تمرین ۲۶- نشان دهید پاسخ فرکانسی در فرکانس دلخواه ω_A برای فیلتر پیوستهٔ تحت تبدیل دو خطی معادل پاسخ فرکانسی فیلتر تقریبی گسسته در فرکانس ω_D است که از رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$\omega_A = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_D T}{2} = \frac{\omega_s}{\pi}\tan\left(\pi\frac{\omega_D}{\omega_s}\right) \qquad (۲۱)$$

توجه کنید که به این ترتیب دربازهٔ فرکانسی $[0,\omega_s/2]$ فرکانسِ 0، تنها فرکانسی است که هر دو فیلتر دارای یک پاسخ می‌باشند. البته ضمناً توجه داریم که برای ω_Dهای باندازهٔ کافی کوچکتر از $\frac{\omega_s}{2}$ فرکانسهایی که در آنها دو پاسخ با هم مساویند به یکدیگر نزدیکتر می‌شوند یعنی: پاسخ فرکانسی دو فیلتر پیوسته و گسستهٔ تقریبی به یکدیگر بسیار نزدیکند.

تمرین ۲۷- پیرو تمرین بالا فرض کنید که بخواهیم، فرکانس ω_T، فرکانسی باشد که در آن پاسخ فرکانسی فیلتر پیوسته و گسسته دقیقاً یکی باشند و نشان دهید که چنانچه تبدیل دو خطی را به شکل زیر تغییر دهیم این اتفاق خواهد افتاد.

$$\frac{1}{s} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\tan \frac{\omega_T T}{2}}{\omega_T} \right) . \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \qquad (۲۲)$$

این را، *تبدیل دو خطی با پیش‌تاب فرکانسی*، در فرکانس ω_T، می‌گوییم.

تمرین ۲۸- با استفاده از تبدیل دو خطی با پیش تاب فرکانسی، گسستهٔ تقریبی $\frac{10}{s}$ را طوری تعیین کنید که فرکانس گذر بهرهٔ آن تغییر نکند.

تمرین ۲۹- هم اکنون می‌توانید تقریبهای دیجیتالی مختلفی برای کنترل کنندهٔ طراحی شده در مثال۱ ارائه کنید. در محیط *Simulink* سیستم کنترلی آن مثال را یکبار با کنترل‌کنندهٔ پیوسته و یکبار با کنترل کنندهٔ دیجیتال ساخته و برای کنترل کننده‌های دیجیتالی مختلفی که ساخته‌اید، اجرا نموده و پاسخهای پله را مقایسه و اظهار نظر کنید.

تمرین ۳۰- این بار معادل گسستهٔ کل سیستم طراحی شده در مثال ۱ را بدست آورده و پاسخ پله را در محیط *Matlab* بدست آورید. این کار را برای مواردی که در تمرین بالا اجرا کرده‌اید، انجام داده و نتایج را مقایسه کنید.

تمرین ۳۱- با مشاهدهٔ صفر و قطبهای مربوط به معادل گسستهٔ بدست آمده در تمرین بالا رفتاری را که مشاهده کرده‌اید توجیه کنید.

۲-۲) طراحی بکمک فن مکان هندسی ریشه ها

همانطور که می‌دانید مکان هندسی ریشه‌ها فنی است که به کمک آن می‌توان مکان ریشه‌های یک چندجمله‌ای را بازای تغییر یکی از ضرایب آن، حدس زده و رسم نمود. باز همانطور که می‌دانید، ما، در طراحی جبرانسازهای در فیدبک، از این فن ترسیمی استفاده می‌کنیم تا ترکیب قطب‌ها و صفرهای غالب سیستم حلقه بسته را بگونهٔ مناسب و موافق خواسته‌های طراحی درآوریم.

از طرف دیگر، دیده‌ایم که می‌توان برای سیستم کنترلی مشابه شکل ۱، سیستم معادل گسسته‌ای ترتیب داد و با آن سیستم معادل کار نمود. البته حالا، عناصر آن سیستم با مفهوم صفحهٔ s بیان نشده، بلکه با مفهوم صفحهٔ z بیان می‌شوند.

همین جا معلوم می‌شود، مهمترین چیز، دانستنِ ارتباط ترکیب قطب و صفر در صفحهٔ z ، با رفتار زمانی سیستم (معمولاً پاسخ پلهٔ سیستم)، است. به همین دلیل ابتدا به رفتار زمانی سیستمهای مرتبهٔ اول و دوم دیجیتال خواهیم پرداخت. پس ار آن طی چند مثال، مشاهده خواهیم نمود که بکمک

همان فنون مشابهی که در کنترل کلاسیک آموخته‌اید، می‌توان محل قطبها را در مکان نسبتاً مناسبی قرار داد. به این ترتیب سیستم گسستهٔ معادل همان رفتاری را که شما قصد کرده‌اید، ار خود نشان خواهد داد و البته این همان رفتار زمانی نمونه‌های سیستم پیوستهٔ اصلی خواهد بود.

چناچه لازم بدانید، برای حصول اطمینان از رفتار سیستم پیوسته در زمانهای بینی، باید اقداماتی انجام دهید. برای این منظور مثلاً، می‌توانید برای ملاحظهٔ رفتار سیستم در زمان بینی از تبدیل زد تعمیم یافته ویا معادل گسستهٔ mتایی که در درس یک آموخته‌اید استفاده کنید. یا از شبیه‌سازِ نرم‌افزاری مانند *Simulink* استفاده کنید.

۲-۲-۱- توصیف رفتار زمانی سیستمهای خطی نا متغیر با زمان گسسته(رفتارشناسیِ تابع تبدیل‌ها)

همانطور که بالاتر نیز اشاره شد، این توصیف عموماً بکمک پاسخ پلهٔ سیستمها صورت می‌پذیرد. البته برای توصیف حالت ماندگار، از پاسخ شیب و سهمی و از این قبیل نیز، حسب مورد، استفاده می‌شود. در ادامه با فرض این که اکثر این مفاهیم در حوزهٔ پیوسته دیده شده‌اند فقط به ذکر معادل آنها در حوزهٔ گسسته، و احیاناً اندک نکات متفاوت، اکتفا می‌کنیم.

- چنانچه به یاد دارید **ثابت زمانی** هر قطب پایدار حوزهٔ پیوسته معادل عکس مقدار مطلق حقیقی آن بود، بطوریکه قطبهای غالب به آنهایی گفتیم که به مبدا نزدیکتر بودند وهر چه می‌خواستیم ثابت زمانی را کاهش داده و سرعت سیستم را افزایش دهیم، باید این قطب‌های غالب را از محور موهومی دورتر می‌کردیم. معادلاً در حوزهٔ گسسته نیز هر چه قطب از دایرهٔ واحد دورتر شده (بیاد بیاورید که تبدیل زد، محور موهومی را به دایرهٔ واحد تصویر کرده) و به مبدا نزدیک گردد، ثابت زمانی‌اش کاهش می‌یابد و لذا قطب‌هایی، ثابت زمانی غالب سیستم را تعیین می‌کنندکه به دایرهٔ واحد نزدیکترند. البته خوشبختانه مقدار ثابت زمانی نیز دقیقاً از روی شعاع قطب بدست می‌آید:

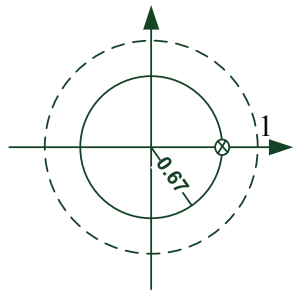
$$z = re^{j\Omega} = r\angle\Omega = e^{-\alpha T} e^{j2\pi\frac{\beta}{\omega_s}} \quad \mapsto \quad \tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{T}{\ln r^{-1}} = \frac{-T}{\ln r} \quad \mapsto \quad r = e^{-\frac{T}{\tau}} \qquad (۲۳)$$

مثال ۶- می‌خواهیم زمان نشست حدود $1s$ باشد. شعاع قطب یا قطب‌های غالب باید کمتر از چه مقداری باشد؟ فاصلهٔ نمونه ها را $0.1s$ بگیرید.

حل: باید ثابت زمانی حدود $\frac{1}{4}s$ باشد و لذا بدست می‌آید:

$$r \le e^{-\frac{0.1}{0.25}} = 0.6703$$

تعبیر هندسی شکل ۸ را نیز بخاطر بسپارید.



شکل (۸)

- **فراجهش** نیز یکی از مهمترین معیارهای تعیین محل قطب‌های غالب می‌باشد. می‌توان نشان داد که برای پاسخ پلهٔ یک جفت قطب مختلط پایدار در ربع اول و چهارم، هنوز رابطهٔ بدست آمده در حوزهٔ پیوسته با تقریب خوبی قابل قبول است. ترجمهٔ این رابطه به مشخصه های صفحهٔ زد، خواهد بود:

$$e^{-\pi\frac{\alpha}{\beta}} \quad \Rightarrow \quad e^{-\pi\frac{\alpha T}{\beta T}} = (e^{-\alpha T})^{\frac{\pi}{\beta T}} = r^{\frac{\pi}{\Omega}} \qquad (۲۴)$$

ولی برای ربع دوم و سوم این رابطه کارایی خود را از دست می‌دهد و می‌توان نشان داد که رابطهٔ مناسب بصورت زیر خواهد بود:

$$r^2 - 2r\cos\Omega \qquad (۲۵)$$

تمرین ۳۲- نشان دهید پاسخ پلهٔ یک جفت قطب مختلط پایدار خواهد بود:

$$k\left[1 - e^{-\alpha T(n-1)}\left(\cos\left(\beta T(n-1)\right) + \frac{\cos\beta T - e^{-\alpha T}}{\sin\beta T}\sin(\beta T(n-1))\right)\right] =$$
$$k\left[1 - r^{-n-1}\left(\cos\left((n-1)\Omega\right) + \frac{\cos\Omega - r}{\sin\Omega}\sin((n-1)\Omega)\right)\right] \quad n \geq 1 \quad , \quad k = dc\_gain \qquad (۲۶)$$

تمرین ۳۳- نشان دهید فراجهش در حالت کلی از رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$r^{n_0}\left(\cos\left(n_0\Omega\right) + \frac{\cos\Omega - r}{\sin\Omega}\sin(n_0\Omega)\right) \quad n_0 \triangleq Fix\left(\frac{\pi}{\Omega}\right) \qquad (۲۷)$$

مثال ۷- برای مثال۶ با شرط فراجهش‌های مجاز *4%* ، *16%* و *50%*، Ωهای مجاز را بدست آورید.

حل: از *24* و *25* داریم:

$$0..04 \geq r^{\frac{\pi}{\Omega}} = 0.67^{\frac{\pi}{\Omega}} \quad \mapsto \quad \frac{\pi}{\Omega} \geq 8 \quad \mapsto \quad \Omega \leq \frac{\pi}{8} = 22.5^o$$

$$.16 \geq r^{\frac{\pi}{\Omega}} = 0.67^{\frac{\pi}{\Omega}} \quad \mapsto \quad \frac{\pi}{\Omega} \geq 4.6 \quad \mapsto \quad \Omega \leq \frac{\pi}{4.6} = 39^o$$

$$0.50 \geq r^{\frac{\pi}{\Omega}} = 0.67^{\frac{\pi}{\Omega}} \quad \mapsto \quad \frac{\pi}{\Omega} \geq 1.7 \quad \mapsto \quad \Omega \leq \frac{\pi}{1.7} = 104^o \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2r\cos\Omega = 0.5 \mapsto$$

$$\cos\Omega = \frac{0.67^2 - 0.5}{2(0.67)} \quad \mapsto \quad \Omega = 92.2^o \quad \rightarrow \quad \Omega \leq 92.2^o$$

چنانچه ملاحظه کردید، برای مورد *50%* ، دیگر رابطهٔ *24* نمی‌تواند راهنمای خوبی باشد و لذا از رابطهٔ مربوط به ربع دوم و سوم *25* ، استفاده شده است.

-پاسخ بازای هر **صفر در مبدأ** فقط یک پریود جلو می‌افتد. با توجه به این حقیقت و همینطور قضیهٔ مقدار اولیه، می‌توان نتیجهٔ مهمی را گرفت: به تعداد قطب‌هایی که از صفرها بیشترند (درجهٔ مخرج منهای درجهٔ صورت)، پاسخ قطعاً صفر خواهد ماند بطوریکه اگر به این تعداد صفر در مبدأ اضافه شود، آنگاه پاسخ پله از مقداری مخالف *0* شروع خواهد شد.

تعبیری دیگری که در نظر گرفتن آن خالی از لطف نیست این است که گویا مشتقات (گسسته) تا یک مرتبه کمتر از همین تعداد، *0* می‌باشند. مثلاً سیستمی که دو قطب دارد ولی صفری ندارد، نه تنها با مقدار اولیهٔ *0* بلکه با شیب *0* نیز شروع خواهد شد و به همین ترتیب .....

-**صفرهای غیر از مبدأ** اثری مشابه صفرها در صفحهٔ لاپلاس دارند.

بعنوان نمونه دیده‌ایم که صفر در سیستمهای مرتبهٔ اول پیوسته باعث شروع پاسخ پله از مقداری غیر صفر می‌شود واین مقدار با، نسبت فاصلهٔ قطب از مبدأ به فاصلهٔ صفر از مبدأ، بستگی دارد. در سیستمهای مرتبه اول گسسته نیز چنین است با این تفاوت که حالا بجای فاصلهٔ آنها از مبدأ، فاصلهٔ آنها از *1* ، که تبدیل یافتهٔ مبدأ صفحهٔ s به صفحهٔ z است، موثر است و هر چه این صفر از *1* دور شود اثر آن نیز کاهش می‌یابد.

تمرین ۳۴- برای سیستمهای مرتبهٔ اول زیر بدون بدست آوردن پاسخ پله، آنرا بطور تقریبی رسم کنید. برای این منظور از قضیهٔ مقدار نهایی، ابتدا مقدار نهایی(همان بهرهٔ ثابت) را بدست آورید. سپس از قضیهٔ مقدار اولیه، مقدار اولیه را بدست آورید و نهایتاً با توجه به ثابت زمانی، پاسخ را رسم کنید. با مقایسه و دقتی که می‌کنید، رابطهٔ بین نسبتی که در بالا اشاره شد با مقدار اولیهٔ پاسخ را بدست آورید.

$$\frac{1-0.9}{1}\cdot\frac{z-0.2}{z-0.2}=0.100\cdot\frac{1}{z-0.9}$$

$$\frac{1-0.9}{1-0.95}\cdot\frac{z-0.95}{z-0.9}=2.00\cdot\frac{z-0.95}{z-0.9} \qquad \frac{1-0.9}{1-0.2}\cdot\frac{z-0.2}{z-0.9}=0.125\cdot\frac{z-0.2}{z-0.9}$$

$$\frac{1-0.9}{1+9}\cdot\frac{z+9}{z-0.9}=0.01\cdot\frac{z+9}{z-0.9} \qquad \frac{1-0.9}{1-1.2}\cdot\frac{z-1.2}{z-0.9}=-0.50\cdot\frac{z-1.2}{z-0.9}$$

و اما برای جفت قطب مختلط نیز در سیستمهای پیوسته دیده‌ایم که هر چه صفر از سمت چپ به این قطبها نزدیکتر شود اثر بیشتری داشته و باعث زیاد شدن فراجهش خواهد شد و از مشخصه‌های مورد انتظار، دور می‌شویم و چنانچه به مبدأ نزدیکتر گردد این اثر بیشتر خواهد شد.
در سیستمهای گسسته نیز صفر بین مبدأ تا *1* ، دقیقاً همین اثر را گذارده و باعث افزایش فراجهش می‌شود ولی بین مبدأ تا *1-* داستان کمی متفاوت خواهد شد: برای قطب‌های مختلفی که در ناحیهٔ اول و چهارم هستند اینگونه صفر تقریباً اثری ندارد اما برای قطب‌های ناحیهٔ دوم و سوم، اینگونه صفر با هر چه نزدیکتر شدن به قطب حتی باعث کاهش قابل ملاحظهٔ فراجهش نیز خواهد شد.

تمرین ۳۵- برای مشاهده چگونگی اثر صفر روی جفت قطب‌ها، برای هر یک از جفت قطب‌های بدست آمده در مثال ۷، صفر ساده ای هر بار در *0.9*، *0.7*، *0.4*، *0.1*، *0.2-*،*0.4-*، *0.7-*، و*0.9-* اضافه نموده ودر محیط *Matlab* پاسخ پله‌ها را رسم کنید و شکل مناسب همزمانی را، برای مقایسه، همراه با نتیجه گیری ارائه کنید. در تمام موارد بهرهٔ *dc* را، واحد نگه دارید.

شکل (۹)

- **بهرهٔ ثابت** را نیز مشابه آنچه در سیستمهای پیوسته، انجام شد، تعریف می‌کنیم. در آنجا همهٔ انتگرالگیرهای خالص (قطب‌های در مبدأ) را حذف نموده و s را *0* قرار داده حاصل را بهرهٔ ثابت

نامیدیم. در اینجا نیز کافیست پس از حذف همهٔ عاملهای *z-1* از صورت و مخرج، *z* را *1* قرار داده و حاصل را بهرهٔ ثابت بنامیم.

به این ترتیب چنانچه سیستمی دارای هیچ انتگرالگیر خالص (عامل *z-1* در مخرج) نباشد آنگاه بهرهٔ سیستم آن، همان بهرهٔ *dc* نیز خواهد بود.

- **نوع سیستم** نیز همانند سیستمهای پیوسته به تعداد انتگرالگیرهای خالص بستگی دارد که در سیستمهای گسسته معادل تعداد عاملهای *z-1* در مخرج است.

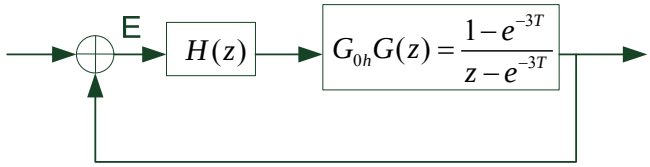
- خطای ماندگار بازای ورودی‌های پله، شیب، سهمی و کلاً ورودیهای نوع *n*ام برای یک سیستم حلقه بستهٔ پایدار نیز همچنان از همان قاعدهٔ موجود در حوزهٔ پیوسته پیروی می‌کند. بطوریکه اگر بهرهٔ ثابت حلقه باز k باشد، خطای ماندگار برای نوع صفر با ضریب $\frac{1}{1+k}$ و برای سیستمهای نوع بالاتر، پس از کاهش مرتبه (به تعداد نوع سیستم حلقه باز)، با ضریب $\frac{1}{k}$، نسبت به ورودی، تضعیف خواهد شد.

۲-۲-۲- مثالهای طراحی در صفحهٔ زد و ملاحظات

مثال ۸- مسئله طراحی مثال۱ را از طریق فن مکان ریشه‌ها حل کنید.

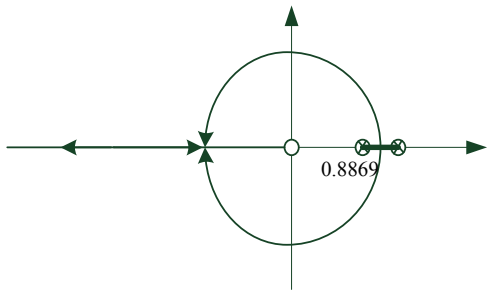
حل: توجه میکنیم که معادل گسستهٔ سیستم به شکل زیر خواهد بود:

برای خطای ماندگار *0*، بازای ورودی پله، لازم است سیستم حلقه باز، حداقل یک انتگرالگیرِ خالص



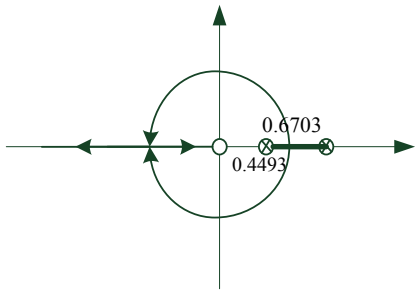
شکل (۱۰)

داشته باشد که چون ندارد، عامل $\frac{z}{z-1}$ را در $H(z)$ لحاظ می‌کنیم و به این ترتیب ترکیب صفر و قطب حلقه باز به شکل زیر در خواهد آمد. ابتدا توجه می‌کنیم که با بهرهٔ تنها نمی‌توان به ثابت زمانی خواسته شده برسیم چرا که باید $r=e^{-T/\tau}=e^{-0.04/0.1}=0.6703$ و اما ضریب میرایی که فراجهش حدود *0.04* را خواسته است نیز، $\Omega=\pi/8$ را تحمیل می‌کند.



شکل (۱۱)

لذا یک جبرانساز پیش فاز را به کمک گرفته و برای راحتی با صفر آن، قطب سیستم در *0.8869* را حذف می‌کنیم که مکان هندسی زیر را نتیجه خواهد داد. برای قرار گرفتن قطبهای حلقه بسته در مکان مطلوب اشاره شده، ابتدا همانطور که می‌دانید از قاعدهٔ زاویه محل قطب جبرانساز را نیز تعیین می‌کنیم که پس یک سری عملیات هندسی و جبری ساده، *0.4493* بدست می‌آید. در ادامه باید بهرهٔ مکان هندسی کل را نیز بدست آورد که *0.2107* بدست می‌آید که با توجه به بهرهٔ مکانِ سیستم که عبارتست از *0.1131* ، برای بهرهٔ مکان هندسی جبرانساز *1.8637* بدست می‌آید.



شکل (۱۲)

مثال ۹- در ادامهٔ مثال بالا فرض کنید که در عین حال درخواست شده باشد که خطای ماندگار به ورودی شیب نیز حدود *0.025* باشد.

حل: ابتدا ببینیم این خطا هم اکنون چقدر است؟ برای این لازم است بهرهٔ ثابت بدست آید:

$$H(z)G_{0h}G(z) = 1.8637 \cdot \frac{z-0.8869}{z-0.4493} \cdot \frac{z}{z-1} \cdot \frac{0.1131}{z-0.8869} \quad \mapsto$$

$$k = 1.8637 \cdot \frac{1-0.8869}{1-0.4493} \cdot \frac{0.1131}{1-0.8869} = 0.3828$$

$$R = nT\ u_{-1}[n] \quad \mapsto \quad E = \frac{T}{k} = \frac{0.04}{0.3828} = 0.1045$$

توجه می‌کنید که باید حدود $\frac{1}{4}$ کاهش ایجاد کنیم و این یعنی بهرهٔ ثابت باید *4* برابر گردد. برای این منظور کافیست از یک جبرانساز پس فاز مناسب استفاده کنیم. در اینجا مقدار بهره‌ای که جبرانساز پس فاز می‌دهد عبارتست از :

$$\frac{1-z_{lag}}{1-p_{lag}} \qquad (۲۸)$$

و بخاطر بیاورید که برای حفظ وضیعت مکان هندسی، لازم بود که محل این صفر و قطب نیز باندازهٔ کافی از قطبهای طراحی شدهٔ اصلی، دور باشند و در عین حال تا جاییکه ممکن است به *1* نیز نباید نردیک شوند. معمولاً صفر آن را تا حدود *5* برابر نزدیکتر به مبدأ نسبت به قطب‌های طراحی شدهٔ غالب، قرار می‌دادیم و قطب را نیز از شرط بهره‌ای که لازم داریم مشخص می‌کردیم. لذا در اینجا نیز خواهیم داشت:

$$z_{lag} = 1-\frac{(1-0.67)}{5} = 1-0.0660 = 0.9340 \;\Rightarrow\; 4=\frac{1-z_{lag}}{1-p_{lag}} \;\mapsto\; 1-p_{lag}=\frac{0.0660}{4}=0.0165$$

$$p_{lag}=0.9835 \;\Rightarrow\; H_{lag}(z)=\frac{z-0.9340}{z-0.9835}$$

تمرین ۳۶- الف) در محیط *Matlab*، ابتدا جبرانساز پیش‌فار را به تنهایی اعمال نموده و برای ورودی مرجع پله، خروجی و همینطور ورودی به سیستم اصلی اولیه را یکجا رسم کنید. ب) حال در ادامه جبرانساز پس فاز طراحی شده را نیز اعمال کنید و رسم بالا را تکرار کنید. ج) برای هر دو مورد بالا ولی این بار برای ورودی مرجع شیب، خروجی و مرجع و همینطور ورودی به سیستم اصلی اولیه u را یکجا رسم کنید و سعی کنید کاهش خطای ماندگار را تحقیق کنید.

تمرین ۳۷- همین طراحی را از ابتدا تا انتها عیناً تکرار کنید با این تفاوت که حالا فاصلهٔ نمونه‌ها را دو برابر مقدار قبلی یعنی *0.08s* ، بگیرید.

تمرین ۳۸- تمرین ۳۶ را برای حل تمرین ۳۷ نیز تکرار کنید.

مثال ۱۰- در این مثال می‌خواهیم همان سیستم قبلی را طراحی کنیم ولی این بار سعی خواهیم نمود که تمام قطب‌ها را به مبدأ ببریم. برای این منظور به جای اینکه صفر انتگرالگیر خالص را در مبدأ قرار دهیم، آنرا روی قطب سیستم اصلی می‌گذاریم تا حذف شود. حالا مثل این است که سیستم واقع فقط یک قطب در *1* داشته است. به این ترتیب با بهرهٔ مکان هندسی کل *1* نیز می‌توان این قطب را به مبدأ منتقل کرد و لذا داریم:

$$\Rightarrow H(z)=k'\frac{z-0.8869}{z-1} \quad \Rightarrow \quad H(z)G_{0h}G(z)=k'\frac{z-0.8869}{z-1}\cdot\frac{0.1131}{z-0.8869}=\frac{0.1131k'}{z-1}$$

$$\Rightarrow \quad 0.1131k'=1 \quad \mapsto \quad k'=8.8417$$

تمرین ۳۹- الف) نشان دهید که با این جبرانساز جدید، تابع تبدیل حلقه بسته و بدنبالِ آن تابع تبدیل از ورودی مرجع به ورودی سیستم اصلی اولیه(خروجی جبرانساز) نیز خواهند بود:

$$\frac{Y(z)}{R(z)}=z^{-1} \quad , \quad \frac{Y(z)}{R(z)}=8.8417\cdot\frac{z-0.8869}{z}$$

ب) پاسخ پلهٔ هر دو را رسم کنید و نتایج را با رسم‌های خود از طراحی قبلی مقایسه کنید. راهنمایی: به مقدار ورودی سیستم اصلی (خروجی جبرانساز) در دو طراحی توجه کنید .

ج) خطای ماندگار ورودی شیب را نیز بیابید. در صورتیکه خواستهٔ ما را بر آورده نمی‌کند دوباره یک جبرانساز پس فاز مناسب طراحی کنید.

تمرین ۴۰ - فاصلهٔ زمانی نمونه‌ها را دو برابر کنید ($T=0.08$) وطراحی بالا را دوباره تکرار کنید. و مراحل تمرین بالا را نیز دوباره اجرا کنید و نتایج را مقایسه کنید.

در جای خود روش کلی که سعی دارد تمام قطبها را به مبدأ ببرد، خواهیم پرداخت.

شکل ۱۳

۲-۳) طراحی در حوزهٔ فرکانسی

برای آنکه بتوان از همان روشهای طراحی حوزهٔ فرکانس که برای سیستمهای پیوسته، آموخته‌ایم، استفاده کرد، ابتدا لازم است بگونه‌ای بازهٔ $\omega \in \left[0, \frac{\omega_s}{2}\right]$ (یا همان $\Omega \in [0, \pi]$) را که محل اصلی کار طراحی ما را تشکیل می‌دهد، مانند حوزهٔ پیوسته به یک بازهٔ $[0, \infty]$ تبدیل کنیم. به این کار، ایجاد اعوجاج در محور فرکانس گویند. برای این منظور عموماً از تبدیل دوخطی زیر استفاده می‌گردد:

$$w = a \cdot \frac{z-1}{z+1} \qquad \equiv \qquad z = \frac{1 + w/a}{1 - w/a} \tag{۲۹}$$

$$z = e^{j\Omega} = e^{j\omega T},\ w = jv \Rightarrow jv = a \cdot \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = a \cdot \frac{e^{j\omega T/2}(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{e^{j\omega T/2}(e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2})} = a \cdot \frac{(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{(e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2})}$$

$$jv = \left(a \tan \frac{\omega T}{2}\right) = v = a \ \tan \frac{\omega T}{2} \tag{۳۰}$$

$$\bar{H}(w) = H(z)\Big|_{z = \frac{1+w/a}{1-w/a}} \quad \mapsto \quad \bar{H}(jv) = H(e^{j\Omega} = e^{j\omega T}) \tag{۳۱}$$

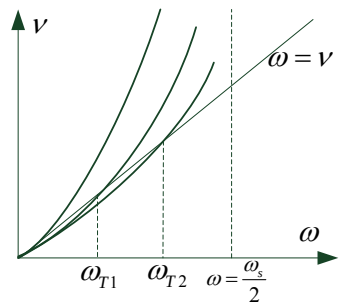
توجه کنید که این تبدیل بخوبی وظایف خود را انجام می‌دهد:

۱) دایرهٔ واحد یعنی $e^{j\Omega} = e^{j\omega T}$ را در صفحهٔ z به محور موهومی jv در صفحهٔ w تبدیل کرده است و هیچ مقدار حقیقی نیز از خود بجا نگذاشته است.

۲) اعوجاج لازم از نیز ایجاد نموده است و بازهٔ فرکانسی بازهٔ $\omega \in \left[0, \frac{\omega_s}{2}\right]$ (یا همان $\Omega \in [0, \pi]$) را در صفحهٔ z به بازهٔ فرکانسی $v=[0,\infty]$ در صفحهٔ w تبدیل کرده است. شکل ۱۴ این اعوجاج فرکانسی را نمایش داده است.

۳) همهٔ اینها نیز بگونه‌ای انجام گرفته که براحتی از یک تابع‌تبدیل خطی کسری از z ، به یک تابع‌تبدیل خطی کسری از w می‌رویم که کار نمودن با پاسخ فرکانسی آنها را بخوبی می‌شناسیم.

در شکل زیر اثر انتخابهای متفاوت a نیز نشان داده شده است. وقتی هیچ پیش‌تابِ فرکانسی استفاده نشود ($a = \frac{2}{T}$) آنگاه تنها نقطهٔ تقاطع فرکانس 0 خواهد بود ولی اگر پیش‌تابِ فرکانسی در مثلاً فرکانس ω_T صورت پذیرد $a = \frac{\omega_T}{\tan\left(\frac{\omega_T T}{2}\right)}$ آنگاه نقطهٔ تقاطع در فرکانس دیگری به غیر از 0، یعنی ω_T نیز صورت می‌پذیرد.



شکل (۱۴)

بعنوان یک قاعدهٔ سرانگشتی (بدون پیش تاب)، توجه کنید که برای $\frac{\omega T_s}{2} < \frac{\pi}{6}$ یا $\omega < \frac{\omega_s}{6}$ تقریباً داریم: $v \cong \omega$. یعنی تا این حدود فرکانسی می‌توان بدون تطابق، کار را ادامه داد.
بهر حال توجه کنید که سه خاصیت مهم بالا، همواره برقرار است و اگر محدودهٔ فرکانس طراحی را می‌دانید، شاید بهتر باشد که از پیش تاب حول همان فرکانس در طراحی استفاده کنید تا کمتر احتیاج به تطابق فرکانسی داشته باشید.

مثال ۱۱- همان مثال طراحی قسمتهای قبلی را در نظر گرفته و حالا سعی کنید در حوزهٔ فرکانس طراحی را به اجرا گذارید.
حل: اولاً توجه کنید که ثابت زمانی $0.1\ s$ یعنی تقریباً پهنای باند حدود *10 Rad/s* و با همان فاصلهٔ نمونه‌های *0.04 s* داریم:

$$v = \frac{2}{0.04}\tan\left(\frac{10\times 0.04}{2}\right) = 10.13$$

پس پهنای باند در صفحهٔ w نیز همین حدود *10* باید گردد. این موضوع را با توجه به تقریب اشاره شده در بالا بدون تطابق فرکانسی نیز می‌توانستیم استنتاج کنیم. چرا که فرکانس نمونه‌ها حدود *160R/s* است و فرکانس *10* از $\frac{1}{6}$ آن نیز کوچکتر است و طبیعی است که در این حوالی v و ω بسیار نزدیک هم باشند.
ثانیاً توجه می‌کنیم که ضریب میرایی 0.7 نیز، به تقلید از مفاهیم فرکانسی حوزهٔ پیوسته، مقارن حد فازی حدود $70°$ است.

ثالثاً توجه می‌کنیم که خطای ماندگار *0* برای ورودی مرجع پله، تحمیل می‌کند که یک انتگرالگیر خالص نیز (یا در صفحهٔ z همانطور که در بخش پیشین دیده شد، و یا در صفحهٔ *w* با یک عنصر *1/w*) اضافه شود. در اینجا در صفحهٔ *w* این کار را انجام خواهیم داد.

$$\overline{G_{0h}G(w)} = G_{0h}G(z)\Big|_{z=\frac{1+wT/2}{1-wT/2}} = \frac{0.1131}{\frac{1+wT/2}{1-wT/2}-0.8869} = \frac{0.1131(1-0.02w)}{(0.02(1.8869))w+0.1131} = \frac{(-0.02)w+1}{(0.3337)w+1}$$

با توجه به پهنای باند سعی می‌کنیم فرکانس گذر بهره را در *10* قرار دهیم. به این ترتیب ببینیم که در این فرکانس، فاز چقدر است؟

$$\frac{1}{w}\cdot\frac{(-0.02)w+1}{(0.3337)w+1} \xrightarrow{v=10} -90-\tan^{-1}(0.333)(10)-\tan^{-1}(0.02)(10) = -175^o$$

پس باید فازی حدود *65* درجه اضافه نماییم لذا برای جبرانساز پیش‌فاز داریم:

$$\sin 65^o = \frac{a-1}{a+1} = 0.91 \mapsto a = \frac{P_{lead}}{z_{lead}} = 21\ ,\ \omega_{\max} = 10\sqrt{pz} = \sqrt{21\,z^2} = \sqrt{21}z \mapsto z_{lead} = 2.2$$

$$p_{lead} = 21\,(2.2) \cong 46 \quad\Rightarrow\quad \bar{H}_{lead}(w) = \frac{(1/2.2)w+1}{(1/46)w+1}$$

حالا باید بهرهٔ کل را نیز طوری طراحی کنیم که فرکانس *10*، فرکانس گذرِ بهره گردد یعنی باید در این فرکانس بهره *1* گردد. لذا بهرهٔ فعلی را در این فرکانس محاسبه نموده و عکس آنرا به بهرهٔ کل ضرب می‌کنیم.

$$\bar{H}_{lead}(w)\cdot\frac{1}{w}\cdot\overline{G_{0h}G}(w) = \cdot\frac{1}{w}\cdot\frac{(-0.02)w+1}{(0.3337)w+1}\cdot\frac{(1/2.2)w+1}{(1/46)w+1}$$

$$w = j10 \Rightarrow \left|\bar{H}_{lead}(j10)\cdot\frac{1}{j10}\cdot\overline{G_{0h}G}(j10)\right| = 0.1333 \cong \frac{1}{7.5} \Rightarrow \bar{H}(w) = \frac{7.5}{w}\cdot\frac{(1.2.2)w+1}{(1/46)w+1}$$

حال کافیست این جبرانساز طراحی شده در صفحهٔ *w* را به صفحهٔ z باز گردانیم.

$$H(z) = \bar{H}(w)\Big|_{w=\frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1}} = \frac{7.5}{w}\cdot\frac{(1/2.2)w+1}{(1/46)w+1}\Bigg|_{w=50\cdot\frac{z-1}{z+1}} = \frac{1.7054\ z^2+0.1437\ z-1.5616}{z^2-1.0417\ z+0.0417}$$

تمرین ۴۱- طراحی را با اضافه نمودن یک پس‌فاز برای رسیدن به شرط خطای ماندگار برای ورودی شیب که در مثالهای قبل آمده، ادامه دهید.

تمرین ۴۲- تمرین ۳۶ را برای این طراحی نیز تکرار کنید و نتایج را در زیر بیاورید.

شکل (۱۵)

۲-۴) طراحی به روش حداقل نمودن زمان نشست

در این روش بدنبال این هستیم که در کمترین زمان ممکن خروجی سیستم حلقه بستهٔ شکل ۱ به ورودی مرجع رسیده و از آن به بعد نیز بدون خطا آنرا دنبال کند. به عبارت دیگر مسئله ما عبارتست از طراحی H بگونه‌ای که منجر به یک دنبال کنندگی بدون خطا در کمترین مدت برای ورودی مشخص R ، شود واضع است که این خود یعنی سیگنال خطا (E) در کمترین زمان ممکن به صفر برسد و خواهیم دید که همین موضوع، اساس راه حل برای رسیدن به جواب این طراحی خواهد بود.

فقط، باید یک موضوع مهم دیگر را نیز فراموش نکنید که بهر حال جواب شما برای H نیز باید بگونه‌ای باشد که قابل تحقق باشد یعنی درجهٔ صورت از مخرج بزرگتر نباشد.

حال تابع تبدیل حلقه بسته را به شکل زیر نامگذاری کرده و به حقایق سادهٔ زیر که از جبر معمولی ناشی میشود توجه می‌کنیم که همگی در جای خود بدرد خواهند خورد.

$$M \triangleq \frac{Y}{R} = \frac{HG}{1+HG} \qquad (۳۲)$$

$$H = \frac{M}{1-M} \cdot \frac{1}{G} \qquad (۳۳)$$

$$E = R\,(1-M) \qquad (۳۴)$$

$$U = H(1-M)R = MR\,\frac{1}{G} \qquad (۳۵)$$

G نیز برای سادگی بجای کل $G_{0h}(z)$ در شکل ۱ بکار رفته است. در ادامه صورت کسرها را با زیر نویس N و مخرج آنها را با زیر نویس D نمایش خواهیم داد و همهٔ آنها نیز بر حسب z^{-1} در نظر گرفته‌ایم.

۱-۴-۱) اساس طراحی کمینه سازی زمان نشست: طراحی بهینهٔ زمان مینیمم

آنچه از همه مهمتر است این است که چند جمله‌ای $E(z^{-1})$ باید اولاً متناهی باشد، ثانیاً هر چه ممکن است، متناهی‌تر باشد. حال همین را به زبان جبر چند جمله‌ای‌ها دنبال می‌کنیم. توجه کنید که:

$$E = \frac{R_N}{R_D}(1-M) \qquad (۳۶)$$

برای متناهی شدن E، باید عبارت $1\text{-}M$ شمارندهٔ R_D باشد و این یعنی چند جمله‌ای متناهی Fی باشد که:

$$(1-M) = R_D F \qquad (۳۷)$$

و حال اگر با جاگذاری، E را دوباره بنویسید، بدست می‌آید:

$$E = \frac{R_N}{R_D}(1-M) = \frac{R_N}{R_D} R_D F \quad \Rightarrow E = R_N F \qquad (۳۸)$$

و این خود با مراجعه به ۳۷ نتیجه می‌دهد که M نیز باید متناهی باشد. پس برای این دو که باید متناهی باشند مجازیم، چنین بنویسیم:

$$F = f_0 + f_1\, z^{-1} + f_2\, z^{-2} + f_3\, z^{-3} + \cdots + f_K\, z^{-K} \qquad (۳۹)$$

$$M = m_0 + m_1\, z^{-1} + m_2\, z^{-2} + m_3\, z^{-3} + \cdots + m_N\, z^{-N} \qquad (۴۰)$$

حال کل طراحی خلاصه می‌شود در تعیین متناهی ترین F که بطور خودکار منجر خواهد شد به متناهی ترین M و کار تمام خواهد شد. اما آیا محدودیت دیگری وجود ندارد که این متناهی‌ترین را تعیین کند؟ پاسخ این است که: وجود دارد چرا که چنانچه بالاتر نیز اشاره شد، باید مراقب باشیم که H، تحقق پذیر باشد. یعنی درجهٔ صورتش از مخرجش بزرگتر نباشد. یک نگاهی به وضعیت H ما را راهنمایی می‌کند:

$$H = \frac{M}{1-M} \cdot \frac{1}{G} = \frac{M}{1-M} \cdot \frac{G_D}{G_N} \qquad (۴۱)$$

$$H=\frac{m_0+m_1z^{-1}+m_2z^{-2}+m_3z^{-3}+\cdots+m_Nz^{-N}}{1-m_0-m_1z^{-1}-m_2z^{-2}-m_3z^{-3}-\cdots-m_Nz^{-N}}\cdot\frac{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}+\cdots+a_nz^{-n}}{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}+\cdots+b_nz^{-n}}$$

توجه دارید که a_n غیر صفر است چرا که n درجهٔ سیستم را تعیین میکند.

حال توجه کنید که $1\text{-}M$ با مخرج تابع یعنی G_D هم درجه است. پس براحتی نتیجه می‌گیریم که برای تحقق پذیر بودن H، لازم است، درجهٔ M حتماً از درجهٔ صورت تابع تبدیل G_N بیشتر نباشد. و این یعنی به تعدادی که از b_j ها صفر باشند، باید به همان تعداد از m_jها نیز صفر قرار داده شوند. مثلا اگر صورت تابع تبدیل دو درجه کمتر از مخرج است $(b_0=b_1=0)$ آنگاه باید قرار دهیم: $m_0=m_1=0$. معمولاً از همین حقیقت، حداقل تعداد f_jها نیز تعیین می‌گردد.

۲-۴-۲) چند مثال کلی و نکات اساسی

مثال ۱۲- در اینجا یک مسئله کلی را حل خواهیم نمود و به نکتهٔ مهمی خواهیم رسید. فرض کنید که ورودی مرجعی که باید بدون خطا دنبال شود، پله باشد و ضمناً می‌دانیم که درجهٔ صورت تابع تبدیل G، از مخرج آن k تا کمتر است. کنترل کنندهٔ بهینه را معرفی کنید.

حل: چون ورودی مرجع، پله است پس داریم:

$$R=\frac{R_N}{R_D}=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

پس با توجه به روابط بالا داریم:

$$E=R_NF=(1)(f_0+f_1z^{-1}+f_2z^{-2}+f_3z^{-3}+\cdots)$$
$$M=1-(1-z^{-1})(f_0+f_1z^{-1}+f_2z^{-2}+f_3z^{-3}+\cdots)$$
$$M=(1-f_0)+(f_0-f_1)z^{-1}+(f_1-f_2)z^{-2}+\cdots+(f_{k-1}-f_k)z^{-k}+\cdots$$
$$M=m_0+m_1\ z^{-1}+m_2\ z^{-2}+\cdots+m_k\ \ z^{-k}+\cdots \qquad (۴۲)$$

می‌بینید که حداقل کردن تعداد fها معادل حداقل کردن تعداد mها است. در ضمن از همان شرایط بالا، مربوط به تحقق پذیر بودن H ، داریم که حتماً باید:

$$m_0=m_1=\cdots=m_{k-1}=0 \qquad (۴۳)$$

و این یعنی

$$f_0=f_1=\cdots=f_{k-1}=1 \qquad (۴۴)$$

پس مجبوریم تا این شماره f را داشته باشیم. پس می‌توان بقیه را صفر گرفت و نتیجتاً:

$$F=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots+z^{-k-1} \qquad (۴۵)$$
$$M=z^{-k} \qquad (46)$$

و در نتیجه کنترل کنندهٔ بهینه خواهد بود:

$$H=\frac{M}{1-M}\cdot\frac{1}{G}=\frac{z^{-k}}{1-z^{-k}}\cdot\frac{1}{G}=\frac{z^{-k}}{1-z^{-k}}\cdot\frac{G_D}{G_N} \qquad (۴۷)$$

نکتهٔ بسیار مهم: می‌بینید که کنترل کنندهٔ بهینهٔ تمام صفر و قطبهای سیستم اصلی را حذف می‌کند. از طرف دیگر شاید سیستم اصلی دارای صفرها و قطبهای ناپایدار باشد و همانطور که می‌دانید مجاز به حذف آنها نیستم که پس از ملاحظهٔ مثالهای زیر به همین موضوع بسیار مهم خواهیم پرداخت.

تمرین ۴۳- تعبیر کنترل کنندهٔ ۴۷ را به روش مکان هندسی ریشه‌ها بدست آورده و توضیح دهید.

مثال ۱۳- برای همان مثال طراحی بخشهای پیشین، این بار جواب بهینهٔ کمترین زمان نشست را بدست آورید.

حل: با توجه به تابع تبدیل سیستم اصلی (شکل ۱۰) ملاحظه میکنید که درجهٔ صورت از مخرج یکی کمتر است، پس با توجه به جواب نهایی مثال ۱۲ در بالا، از روی ۴۷ و شکل ۱۰، بدست می‌آید:

$$M=z^{-1} \quad\Rightarrow\quad H=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\cdot\frac{1}{G}=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\cdot\frac{z-e^{-3T}}{1-e^{-3T}}=8.8417\cdot\frac{z-0.8869}{z-1}$$

و البته این همان کنترل‌کننده‌ای است که در حل مثال ۱۰ نیز، به آن برخوردیم. به دقت ببینید که کنترل کننده، تنها قطب سیستم اصلی را حذف نموده است.

تمرین ۴۴- در مثال بالا فرض کنید فاصلهٔ نمونه‌ها (T) نامعلوم است و جواب بهینه را برحسب آن بیان کنید و ضمناً پاسخ پلهٔ کلی را برای خروجی کنترل کننده (ورودی به سیستم اصلی) نیز بر حسب T بدست آورید و رسم کنید. چه نتیجهٔ مهمی می‌گیرید؟

مثال ۱۴- مسئله کلی مثال ۱۲ را این بار برای ورودی شیب، حل کنید.

حل: توجه کنید که برای ورودی شیب داریم:

$$R=\frac{R_N}{R_D}=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \quad\mapsto\quad E=R_N\,F=Tz^{-1}(f_0+f_1z^{-1}+\cdots)$$

$$\begin{aligned}M&=1-(1-2z^{-1}+z^{-2})(f_0+f_1z^{-1}+f_2z^{-2}+f_3z^{-3}+f_4z^{-4}+\cdots)\\&=(1-f_0)+(2f_0-f_1)z^{-1}+(2f_1-f_0-f_2)z^{-2}\\&\quad+(2f_2-f_1-f_3)z^{-3}+\cdots+(2f_{k-1}-f_{k-2}-f_k)z^{-k}\end{aligned}$$

$$+(2f_k - f_{k-1} - f_{k+1})z^{-k-1} + (2f_{k+1} - f_k - f_{k+2})z^{-k-2}$$
$$+(2f_{k+2} - f_{k+1} - f_{k+3})z^{-k-3} + (2f_{k+3} - f_{k+2} - f_{k+4})z^{-k-4}$$

و چون شرط ۴۳ همچنان باید بر قرار باشد لذا بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&m_0 = (1 - f_0) = 0 \quad \mapsto \quad f_0 = 1\\
&m_1 = (2f_0 - f_1) = 0 \quad \mapsto \quad f_1 = 2\\
&m_2 = (2f_1 - f_0 - f_2) = 0 \quad \mapsto \quad f_2 = 3\\
&m_3 = (2f_2 - f_1 - f_3) = 0 \quad \mapsto \quad f_3 = 4\\
&\vdots\\
&m_{k-1} = (2f_{k-2} - f_{k-3} - f_{k-1}) = 0 \quad \mapsto \quad f_{k-1} = k
\end{aligned}$$

از m_k به بعد، دیگر شرطی وجود ندارد، پس فوراً f هایی را که می‌توانیم، 0 قرار می‌دهیم و این نتیجه می‌دهد:

$$f_k = f_{k+1} = f_{k+2} = \cdots = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\left.\begin{aligned}
&m_k = (2f_{k-1} - f_{k-2} - f_k) = 2k - (k-) - 0 = k+1\\
&m_{k+1} = (2f_k - f_{k-1} - f_{k+1}) = 2(0) - k - 0 = -k\\
&m_{k+2} = (2f_{k+1} - f_k - f_{k+2}) = 2(0) - 0 - 0 = 0\\
&\vdots\\
&m_{\cdots} = 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow M = (k+1)z^{-k} - kz^{-k-1}$$

و در نتیجه کنترل کنندهٔ بهینه خواهد بود:

$$H = \frac{M}{1-M}\cdot\frac{1}{G} = \frac{(k+1)z^{-k} - kz^{-k-1}}{1-(k+1)z^{-k} + kz^{-k-1}}\cdot\frac{1}{G} = \frac{(k+1)z - k}{z^{k+1} - (k+1)z + k}\cdot\frac{1}{G} \qquad (۴۸)$$

تمرین ۴۵- در شکل ۱ فرض کنید $T_s = 1^s$ و ورودی مرجع، پلهٔ واحد باشد و:

$$G_1(s) = \frac{e^{-T_D s}}{s(s+1)}$$

الف) با فرض $T_D=0$ ، کنترل کنندهٔ بهینه‌ای که در این بخش معرفی شد را بدست آورید.

ب) با توجه به حل الف، سیگنال خطا را با توجه به E ، در زمانهای نمونه‌ها بدست آورده و مشاهده کنید که نمونه‌های خطا دقیقاً به صفر می‌رسند.

ج) با توجه به الف، سیگنال خروجی نگهدار (یعنی همان ورودی به سیستم اصلی) را بدست آورده و تا ثانیهٔ چهارم رسم کنید.

د) با توجه به ج و ب، خروجی سیستم (y) را تا ثانیهٔ چهارم بطور تقریبی رسم کنید. راهنمایی: توجه کنید که ورودی به سیستم اصلی بصورت پلکانی است و می‌توان ابتدا $1/s$ آن و سپس $1/(s+1)$ آنرا با تقریب خوبی حدس زد.

ه) در (د) دیدید: با اینکه خروجی در زمانهای نمونه‌ها دقیقاً با خطای صفر ورودی را دنبال می‌کند ولی در زمانهای بینی واقعاً این موضوع صادق نبوده و خطای قابل ملاحظه‌ای وجود دارد. برای اینکه این موضوع را به شکل دیگری نیز نشان دهید، از معادل گسستهٔ تعمیم یافته در زمانهای وسط نمونه ها، مقادیر خطا را بدست آورید و با نتایج (د) مقایسه کنید.

این پدیده را موجکهای بین نمونه‌ها گویند و بخصوص موقعی بیشتر باید مراقب آن بود که فرکانس نمونه‌ها باندازهٔ کافی بزرگ انتخاب نشده باشند.

مثال ۱۵- در این مثال می‌خواهیم نشان دهیم که وقتی صفری را نمی‌خواهیم یا نمی‌توانیم حذف کنیم، چگونه باید کار طراحی بهینه را انجام داد.

در صورت مسئله تمرین ۴۵ این بار فرض کنید: $T_D = 2/7$. طراحی بهینه را ارائه کنید.

حل: می‌توان نشان داد که چنین تاخیری برای $G(z)$ بدست می‌آید:

$$G(z) = \frac{0.204(1+0.042z^{-1})(1+1.947z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

چنانچه ملاحظه می‌کنیم. یکی از صفرها بیرون دایرهٔ واحد است و لذا نمی‌توان اقدام به حذف آن نمود و در نتیجه نمی‌توان مستقیماً از ۴۷ استفاده کرد. برای اینکه کنترل کننده، این صفر را حذف نکند، لازم است M خود شامل این صفر باشد (به ۴۱ یا ۳۳ توجه کنید). پس کافیست با این ملاحظه، همان روندی که آموخته‌ایم، ادامه دهیم. لذا حالا M را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$M = (1+1.947z^{-1})(m'_0 + m'_1 z^{-1} + m'_2 z^{-2}...) \qquad (۴۹)$$

و چون صورت تابع تبدیل یک درجه کمتر از مخرج است، لازم است که همچنان m'_0 در عبارت بالا را نیز صفر بگیریم تا M، یک درجه کاهش یابد و این یعنی:

$$M = z^{-1}(1+1.947z^{-1})(m'_1 + m'_2 z^{-1}...) \qquad (۵۰)$$

از طرف دیگر داریم:

$$M = 1-(1-z^{-1})(f_0 + f_1 z^1 + \cdots)$$

و برای اینکه شرط درجهٔ M ، محقق شود باز هم لازم است که : $f_0=1$. حال چناچه بخواهیم f_1 و به بعد آنرا صفر بگیریم (تا خطا هر چه سریعتر صفر شود) ، آنگاه M فقط عبارت z^{-1} خواهد داشت که این با توجه به 50 ، غیر ممکن است و حداقل z^{-2} را باید شامل باشد و لذا مجبوریم f_1 را نیز غیر صفر بگیریم. البته می‌توان از f_1 به بعد را صفر اختیار کرد و لذا به دست می آید:

$$M = 1-(1-z^{-1})(1+f_1 z^{-1}) = (1-f_1)z^{-1} + f_1 z^{-2} \equiv m'_1 z^{-1} + 1.947 m'_1 z^{-2} \Rightarrow$$
$$m'_1 = 0.34 \quad , \quad f_1 = 0.66$$

و در نتیجه کنترل کنندهٔ بهینه خواهد بود:

$$G(z) = \frac{0.204(1+0.042z^{-1})(1+1.947z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

$$H = \frac{M}{1-M}\cdot\frac{1}{G} = \frac{0.34z^{-1}(1+1.947z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.667z^{-1})}\cdot\frac{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}{0.204(1+0.042z^{-1})(1+1.947z^{-1})z^{-1}} =$$

$$H = \frac{1.666(1-0.368z^{-1})}{(1+0.667z^{-1})(1+0.042z^{-1})}$$

این راهی که برای حل مشکل حذف صفر ناپایدار پیش گرفتیم کلیت دارد. به عبارت دیگر هر صفری را که نمی‌خواهید حذف کنید باید ببرید جزو M ، مانند آنچه در بالا انجام شد.
دقیقاً مشابهِ بالا، هرگاه نمی‌خواهید قطبی را حذف کنید لازم است آنرا جزو $1-M$ قرار دهید. در ادامه فقط باید همهٔ کارهای مربوط به چند جمله ای M و F را به دقت به اجرا گذارد و آنها را تعیین نمود.
تمرین ۴۶- از قسمت ب به بعد تمرین ۴۵ را برای حل مثال ۱۵ تکرار کنید.

۲-۴-۲) حل مشکل موجک‌ها

برای این موضوع توجه می‌کنیم که لازم است نه تنها $E(z)$ ، بلکه $E(z,m)$ نیز متناهی باشد. در ادامه نشان خواهیم داد که چناچه بجای M ، عبارت M^1 زیر را قرار دهیم، می‌توانیم مطمئن باشیم که $E(z,m)$ نیز متناهی است.

$$H = \frac{M^1}{1-M^1}\cdot\frac{1}{G} \qquad M^1 = m_0 M\, G_N \quad \Rightarrow \qquad (۵۱)$$

$$H=\frac{m_0 M\, G_N}{1-m_0 M\, G_N}\cdot\frac{G_D}{G_N}=\frac{m_0 M\, G_D}{1-m_0 M\, G_N} \qquad (۵۲)$$

که در آن M همان تابع تبدیلی است که به روش قبلی بدست آمده است و m_0 یک ثابت است که باید تعیین گردد. دقت کنید که در این طرح جدید جبرانساز همچنان قطب‌ها را حذف می‌کند ولی صفرها را حذف نمی‌کند.

در ادامه $y(z,m)$ را بدست می‌آوریم.

$$Y(z,m)=H(z)U(z)G(z,m)=\left(\frac{m_0 MG_D}{1-m_0 MG_N}\right)\left(R(z)(1-m_0 MG_N)\right)\left[\frac{G_N(z,m)}{zG_D(z)}\right]=$$

$$Y(z,m)=m_0 G_N(z,m)MRz^{-1}=M^1(z,m)R \qquad (۵۳)$$

$$M^1(z,m)\triangleq\frac{Y(z,m)}{R}=m_0 G_N(z,m)Mz^{-1} \qquad (۵۴)$$

توجه کنید که تابع تبدیل $M^1(z,m)$ که در بالا تعریف شده با توجه به عبارتی که برای آن بدست آوردیم، قطعاً متناهی است (حاصلضرب چند جمله‌ای‌های متناهی است) و این یعنی:

$$M^1(z,m)=g_{0m}+g_{1m}z^{-1}+g_{2m}z^{-2}+\cdots++g_{Nm}z^{-N} \qquad (۵۵)$$

فراموش نکنید که باید ثابت کنیم که $E(z,m)$ متناهی است. در ادامه این موضوع را فقط برای ورودی پله ثابت می‌کنیم. که این یعنی باید ثابت کنیم $Y(z,m)$ به واحد می‌رسد. پس برای ورودی پله داریم:

$$R=\frac{1}{1-z^{-1}}=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots \quad\Rightarrow\quad Y(z,m)=RM^1(z,m)=$$

$$Y(z,m)=g_{0m}+(g_{0m}+g_{1m})z^{-1}+(g_{0m}+g_{1m}+g_{2m})z^{-2}+\cdots+\left(\sum_{i=0}^{N} g_{im}\right)\left(z^{-N}+z^{-N-1}+\cdots\right) \qquad (۵۶)$$

و این یعنی قطعاً بعد از زمان N ام، خروجی، ثابت و برابر

$$\sum_{i=0}^{N} g_{im} \qquad (۵۷)$$

باقی خواهد ماند. حال چون خطا صفر می‌گردد پس این مقدار ثابت نیز مستقل از تأخیر نمونه‌بینیِ m بوده و برابر واحد است. به این ترتیب برای تنها مجهول طراحی (به *52,51* توجه کنید) یعنی m_0 ، بدست می‌آید :

$$M^1\big|_{z=1} = 1 \quad \Rightarrow \quad m_0\, MG_N\big|_{z=1} = 1 \;\Rightarrow\; m_0 = \frac{1}{MG_N\big|_{z=1}} \qquad (۵۸)$$

که اگر M نیز مطابق *46* بدست آمده باشد، نهایتاً داریم:

$$m_0 = \frac{1}{G_N\big|_{z=1}} \qquad (۵۹)$$

مثال ۱۶- برای تمرین ۴۵ کنترل کنندهٔ بهینه را طوری معرفی کنید که موجک‌ها، یا بوجود نیایند و یا در صورت وجود در حداقل زمان، از بین بروند.

حل: از حل تمرین ۴۵ بدست آمده است که:

$$G(z) = \frac{0.3679z^{-1}(1+0.7183z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.3679z^{-1})}$$

از *58* و یا *59* نیز بدست می آید:

$$0.3679\, m_0 = \frac{1}{z^{-1}(1+0.7183z^{-1})\big|_{z=1}} = 0.5820$$

کنترل کنندهٔ بهینه از *51* و *52* بدست می آید:

$$M^1 = 0.5820z^{-1}(1+0.7183z^{-1})$$
$$1-M^1 = 1-0.5820z^{-1}(1+0.7183z^{-1}) = (1-z^{-1})(1+0.4180z^{-1})$$
$$H = \frac{0.5820z^{-1}(1+0.7183z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.4180z^{-1})}\cdot\frac{(1-z^{-1})(1-0.3679z^{-1})}{0.3679z^{-1}(1+0.7183z^{-1})} \mapsto$$
$$H = \frac{1.5820z^{-1}(1-0.3679z^{-1})}{1+0.4180z^{-1}}$$

تمرین ۴۷ – از قسمت ب به بعد تمرین ۴۵ را برای حل مثال ۱۶ تکرار کنید.

تمرین ۴۸- برای مسئله طراحی مثال ۱۵، حل بهینه ای ارائه کنید که موجکها، یا بوجود نیایند و یا در صورت وجود در حداقل زمان، از بین بروند.