بسمه تعالی

کواترنین‌ها

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

بحث کواترنین‌ها در درسِ ناوبری ارائه شده و تا حدودی به آن پرداخته شده است. از جمله منابعِ دیگری که در آنها از کواترنین‌ها بحث شده است و در حالِ حاضر در دسترسِ نگارنده است، کتاب‌های «حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی» جرج توماس و «مدلسازی و کنترلِ ربات» اسپانگ هستند. در اوّلی تاریخچه‌ای کوتاه ولی مفید دربارهٔ کواترنین‌ها و در دومی اعمالِ ریاضی بر روی کواترنین‌ها آمده است. یادداشت به این صورت تنظیم شده که ابتدا یک مقدمه که در آن، تاریخچهٔ مذکور از کتابِ توماس عیناً نقل شده، آمده است. البته در این مقدمه، علاوه بر تاریخچهٔ کواترنین‌ها، به مجادله‌ای در باب بردارها و کواترنین‌ها نیز پرداخته شده است. سپس مطالبی که در کتابِ اسپانگ (ذیلِ تمرین‌های فصلِ دوم) آمده، عنوان شده و در صورتِ لزوم بسط داده شده و اثبات‌ها ارائه شده‌اند. در ادامه، نکاتی که به نظر نگارنده با استفاده از مطالبِ قبلی می‌توان استنباط کرد (مانند ترکیبِ دوران‌ها با استفاده از کواترنین‌ها) اضافه شده‌اند.

به طورِ دقیق‌تر استفاده از منابع برای تنظیمِ این یادداشت به صورتِ زیر بوده است:

بخشِ ۱ از کتابِ توماس نقل شده است. جانمایهٔ مطالبِ بخش‌های ۲ تا ۴، ۶، ۷، ۹ تا ۱۱ و ۱۴ از کتاب اسپانگ برداشت شده که در اینجا ضمنِ بیان به شیوهٔ مناسب، روابط اثبات شده‌اند. مطالبِ بخش‌های ۵، ۸ و ۱۵ تا ۲۰ از جایی برداشت نشده است (هر چند که ممکن است خواننده منابعی بیابد که مطالبِ این بخش‌ها در آن موجود باشد). روابطِ بخش‌های ۱۲ و ۱۳ نیز در جزوهٔ ناوبری آمده‌اند (به جز یک رابطه در بخشِ ۱۳). اثباتِ روابطِ این دو بخش، در یادداشت‌های جزوهٔ ناوبری ذکر شده است. در ضمیمهٔ ۱ هم رابطه‌ای قدیمی به صورتِ سرراست‌تر بیان شده و البته رابطهٔ مربوط به بخشِ ۱۲ هم اثبات شده است.

۱. مقدمه

بردارهای نوینِ امروزی ریشه در کواترنین‌ها دارند. کواترنین‌ها تعمیمی هستند از جفتِ $a+b\mathbf{i}$ به چهارتاییِ مرتّبِ $a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$. جبرِ کواترنین‌ها را ویلیام همیلتن ریاضیدانِ ایرلندی (۱۸۶۵-۱۸۰۵) ابداع کرد. روزی همیلتن در حالی که با همسرش در کنارِ آبراهِ رویال دوبلین قدم می‌زد، جرقه‌ای در ذهنش در موردِ فرمول‌بندیِ اندیشه‌های پانزده‌ساله‌اش زده شد. او بلافاصله با چاقویی ویژگی‌های اصلیِ کواترنین‌ها را بر سنگی حک کرد:

$$\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=\mathbf{ijk}=-1 \qquad (۱)$$

او جبرِ نوینی آفریده بود که در آن قانونِ تعویض‌پذیری در موردِ عملِ ضرب را کنار گذاشته بود.

در همین زمان، ریاضیدانِ آلمانی هرمان گوتنر گراسمان (۱۸۷۷-۱۸۰۹) اَبَر عددی با n مؤلفه عرضه کرد. در این مورد نیز مانند کواترنین‌ها عملِ ضرب تعویض‌پذیر نبود. حاصلِ کار، ایجادِ یک حسابِ عامّ بردارها با هر تعداد بُعد بود. این حساب را گراسمان در سالِ ۱۸۴۴ یعنی یکسال پس از انتشارِ اثرِ همیلتن در موردِ کواترنین‌ها منتشر کرد.

یک ریاضی‌ـفیزیکدانِ آمریکایی به نامِ جوسیا ویلارد گیبس (۱۹۰۳-۱۸۳۹) در دانشگاهِ ییل که بیشتر متأثر از کارِ گراسمان بود تا کارِ همیلتن، استفاده از بردارها را ترویج کرد. دوستانِ آمریکاییِ همیلتن به خصوص پیتر گو تری‌تیت فیزیکدانان را به پذیرشِ کواترنین‌ها ترغیب کردند؛ امّا مهندسان به خصوص اولیور هویساید، آنالیزِ برداری را رواج دادند. برخی از فیزیکدانان - از جمله شاخص‌ترینِ آنان: جیمز کلارک ماکسول- از هر دو مضمونِ کواترنین‌ها و بردارها (با تفکیکِ قسمت‌های اسکالر و برداری) بهره بردند. سرانجام مقارن با تحویلِ قرن، آنالیزِ برداریِ گیبس و هویساید غلبه کرد. مهندسان از نخستین معتقدان، فیزیکدانان از نخستین گروندگان و ریاضیدانان آخرین پذیرندگانِ این باب از ریاضیات (آنالیزِ برداری) بودند.

۲. تعریفِ کواترنین‌ها

اعدادِ مختلط را می‌توان با تعریفِ سه ریشهٔ دومِ مستقل برای (۱-) تعمیم داد به طوری که قوانینِ ضربِ زیر بر آنها حاکم باشند:

$$\boxed{\begin{aligned} -1 &= \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 \\ \mathbf{i} &= \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} \\ \mathbf{j} &= \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} \\ \mathbf{k} &= \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} \end{aligned}} \tag{۲}$$

با استفاده از این تعمیم، یک کواترنین به صورتِ زیر تعریف می‌شود:

$$Q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \tag{۳}$$

و معمولا به صورت چهارتاییِ زیر نمایش داده می‌شود:

$$Q = \left(q_0, q_1, q_2, q_3\right) \tag{۴}$$

۳. نمایشِ یک کواترنین با دو مؤلفه: یک اسکالر و یک بردار

یک کواترنین را می‌توان دارای دو مؤلفه دانست: یک عددِ اسکالر و یک بردار.

$$\boxed{\begin{aligned} &Q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \quad \leftrightarrow \quad Q = \left(q_0, q_1, q_2, q_3\right) \quad \leftrightarrow \quad Q = \left(q_0, \mathbf{q}\right) \\ &, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T \end{aligned}} \tag{۵}$$

از این نمایش برای به دست آوردنِ عبارتِ سرراستی برای حاصلضربِ دو کواترنین استفاده خواهیم کرد.

۴. ضربِ دو کواترنین

اگر Q و P دو کواترنین و حاصلضربِ آنها $R = QP$ باشد، این حاصلضرب به صورتِ زیر قابلِ بیان است:

$$\begin{cases} Q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} = \left(q_0, \mathbf{q}\right) \quad , \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T \\ P = p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k} = \left(p_0, \mathbf{p}\right) \quad , \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}^T \\ R = QP = r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k} = \left(r_0, \mathbf{r}\right) \quad , \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}^T \end{cases} \tag{۶}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} r_0 = q_0 p_0 - \mathbf{q}\cdot\mathbf{p} \\ \mathbf{r} = q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} + \mathbf{q}\times\mathbf{p} \end{cases}}$$

توجه کنید که ضربِ کواترنین‌ها خاصیتِ جابجایی ندارد.

اثباتِ رابطهٔ بالا به صورتِ زیر است:

$$
\begin{aligned}
QP &= \left(q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}\right)\left(p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}\right) \\
&= q_0p_0 + q_0\left(p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}\right) + p_0\left(q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}\right) \\
&\qquad + \left(q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}\right)\left(p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}\right) \\
&= q_0p_0 + q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} + \left(q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}\right)\left(p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}\right) \\
&= q_0p_0 + q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} + q_1\mathbf{i}\left(p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}\right) \\
&\qquad + q_2\mathbf{j}\left(p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}\right) + q_3\mathbf{k}\left(p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}\right) \\
&= q_0p_0 + q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} + \left(q_1p_1\mathbf{i}^2 + q_1p_2\mathbf{ij} + q_1p_3\mathbf{ik}\right) \\
&\qquad + \left(q_2p_1\mathbf{ji} + q_2p_2\mathbf{j}^2 + q_2p_3\mathbf{jk}\right) + \left(q_3p_1\mathbf{ki} + q_3p_2\mathbf{kj} + q_3p_3\mathbf{k}^2\right) \\
&= q_0p_0 + q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} + \left(-q_1p_1 + q_1p_2\mathbf{k} - q_1p_3\mathbf{j}\right) \\
&\qquad + \left(-q_2p_1\mathbf{k} - q_2p_2 + q_2p_3\mathbf{i}\right) + \left(q_3p_1\mathbf{j} - q_3p_2\mathbf{i} - q_3p_3\right) \\
&= q_0p_0 + q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} + \mathbf{i}\left(q_2p_3 - q_3p_2\right) + \mathbf{j}\left(q_3p_1 - q_1p_3\right) + \mathbf{k}\left(q_1p_2 - q_2p_1\right) \\
&\qquad - \left(q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3\right) \\
&= q_0p_0 + q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} + \mathbf{q}\times\mathbf{p} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{p} \\
&= \left(q_0p_0 - \mathbf{q}\cdot\mathbf{p}\right) + \left(q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} + \mathbf{q}\times\mathbf{p}\right) \\
&= r_0 + \mathbf{r}
\end{aligned}
$$

۵. خاصیتِ شرکت‌پذیریِ ضرب برای کواترنین‌ها

ضربِ کواترنین‌ها خاصیتِ شرکت‌پذیری دارد. یعنی:

$$\boxed{Q_1\left(Q_2Q_3\right) = \left(Q_1Q_2\right)Q_3} \qquad (۷)$$

اثبات:

ابتدا هر یک از طرفینِ رابطهٔ (۷) را محاسبه می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
Q_1\left(Q_2Q_3\right) &= \left(q_{01},\mathbf{q}_1\right)\left(\left(q_{02},\mathbf{q}_2\right)\left(q_{03},\mathbf{q}_3\right)\right)\\
&= \left(q_{01},\mathbf{q}_1\right)\left(\left(q_{02}q_{03}-\mathbf{q}_2\cdot\mathbf{q}_3\right),\left(q_{02}\mathbf{q}_3+q_{03}\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_2\times\mathbf{q}_3\right)\right)\\
&= \begin{pmatrix} \left(q_{01}\left(q_{02}q_{03}-\mathbf{q}_2\cdot\mathbf{q}_3\right)-\mathbf{q}_1\cdot\left(q_{02}\mathbf{q}_3+q_{03}\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_2\times\mathbf{q}_3\right)\right),\\
\begin{pmatrix} q_{01}\left(q_{02}\mathbf{q}_3+q_{03}\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_2\times\mathbf{q}_3\right)+\left(q_{02}q_{03}-\mathbf{q}_2\cdot\mathbf{q}_3\right)\mathbf{q}_1\\
+\mathbf{q}_1\times\left(q_{02}\mathbf{q}_3+q_{03}\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_2\times\mathbf{q}_3\right)\end{pmatrix}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \left(q_{01}q_{02}q_{03}-q_{01}\mathbf{q}_2\cdot\mathbf{q}_3-q_{02}\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_3-q_{03}\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_1\cdot\left(\mathbf{q}_2\times\mathbf{q}_3\right)\right),\\
\begin{pmatrix} q_{02}q_{03}\mathbf{q}_1+q_{01}q_{03}\mathbf{q}_2+q_{01}q_{02}\mathbf{q}_3+q_{01}\mathbf{q}_2\times\mathbf{q}_3\\
+q_{02}\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_3+q_{03}\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2-\left(\mathbf{q}_2\cdot\mathbf{q}_3\right)\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_1\times\left(\mathbf{q}_2\times\mathbf{q}_3\right)\end{pmatrix}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(Q_1Q_2\right)Q_3 &= \left(\left(q_{01},\mathbf{q}_1\right)\left(q_{02},\mathbf{q}_2\right)\right)\left(q_{03},\mathbf{q}_3\right)\\
&= \left(\left(q_{01}q_{02}-\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2\right),\left(q_{01}\mathbf{q}_2+q_{02}\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2\right)\right)\left(q_{03},\mathbf{q}_3\right)\\
&= \begin{pmatrix} \left(\left(q_{01}q_{02}-\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2\right)q_{03}-\left(q_{01}\mathbf{q}_2+q_{02}\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2\right)\cdot\mathbf{q}_3\right),\\
\begin{pmatrix} \left(q_{01}q_{02}-\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2\right)\mathbf{q}_3+q_{03}\left(q_{01}\mathbf{q}_2+q_{02}\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2\right)\\
+\left(q_{01}\mathbf{q}_2+q_{02}\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2\right)\times\mathbf{q}_3\end{pmatrix}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \left(q_{01}q_{02}q_{03}-q_{01}\mathbf{q}_2\cdot\mathbf{q}_3-q_{02}\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_3-q_{03}\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2-\left(\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2\right)\cdot\mathbf{q}_3\right),\\
\begin{pmatrix} q_{02}q_{03}\mathbf{q}_1+q_{01}q_{03}\mathbf{q}_2+q_{01}q_{02}\mathbf{q}_3+q_{01}\mathbf{q}_2\times\mathbf{q}_3\\
+q_{02}\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_3+q_{03}\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2-\left(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2\right)\mathbf{q}_3+\left(\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2\right)\times\mathbf{q}_3\end{pmatrix}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

حال تفاضلِ دو عبارتِ بالا را به دست می‌آوریم. اگر این تفاضل برابرِ صفر باشد، رابطهٔ (۷)، برقرار خواهد بود.

$$
\begin{aligned}
Q_1\left(Q_2Q_3\right)-\left(Q_1Q_2\right)Q_3 &= \left(\left(-\mathbf{q}_1\cdot\left(\mathbf{q}_2\times\mathbf{q}_3\right)\right),\left(-\left(\mathbf{q}_2\cdot\mathbf{q}_3\right)\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_1\times\left(\mathbf{q}_2\times\mathbf{q}_3\right)\right)\right)\\
&\quad-\left(\left(-\left(\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2\right)\cdot\mathbf{q}_3\right),\left(-\left(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2\right)\mathbf{q}_3+\left(\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2\right)\times\mathbf{q}_3\right)\right)\\
&= \begin{pmatrix} \left(\overbrace{-\mathbf{q}_1\cdot\left(\mathbf{q}_2\times\mathbf{q}_3\right)+\left(\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2\right)\cdot\mathbf{q}_3}^{0}\right),\\
\left(-\left(\mathbf{q}_2\cdot\mathbf{q}_3\right)\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_1\times\left(\mathbf{q}_2\times\mathbf{q}_3\right)+\left(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2\right)\mathbf{q}_3-\left(\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2\right)\times\mathbf{q}_3\right)\end{pmatrix}\\
&= \left(0,\begin{pmatrix}-\left(\mathbf{q}_2\cdot\mathbf{q}_3\right)\mathbf{q}_1+\left(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_3\right)\mathbf{q}_2-\left(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2\right)\mathbf{q}_3\\
+\left(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2\right)\mathbf{q}_3+\left(\mathbf{q}_2\cdot\mathbf{q}_3\right)\mathbf{q}_1-\left(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_3\right)\mathbf{q}_2\end{pmatrix}\right)\\
&= \left(0,\mathbf{0}\right)
\end{aligned}
$$

و اثبات کامل است.

۶. کواترنینِ همانی

کواترنینِ همانی یا عضوِ خنثی برای عملِ ضربِ کواترنین‌ها چنین است:

$$Q_I = \left(1,0,0,0\right) \qquad \leftrightarrow \qquad QQ_I = Q_I Q = Q \tag{۸}$$

برای اثباتِ این مطلب داریم:

$$Q = \left(q_0, \mathbf{q}\right), Q_I = \left(1, \mathbf{0}\right)$$

$$\begin{aligned} QQ_I &= \left(\left(q_0 .1 - \mathbf{q}\cdot\mathbf{0}\right), \left(q_0\mathbf{0} + 1.\mathbf{q} + \mathbf{q}\times\mathbf{0}\right)\right) \\ &= \left(q_0, \mathbf{q}\right) \\ &= Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_I Q &= \left(\left(1.q_0 - \mathbf{0}\cdot\mathbf{q}\right), \left(1.\mathbf{q} + q_0\mathbf{0} + \mathbf{0}\times\mathbf{q}\right)\right) \\ &= \left(q_0, \mathbf{q}\right) \\ &= Q \end{aligned}$$

۷. مزدوجِ یک کواترنین

مزدوجِ کواترنینِ Q با علامتِ Q^* نمایش داده شده و به صورتِ زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} &Q = \left(q_0, q_1, q_2, q_3\right) \quad \Rightarrow \quad Q^* = \left(q_0, -q_1, -q_2, -q_3\right) \\ &or \\ &\boxed{Q = \left(q_0, \mathbf{q}\right) \quad \Rightarrow \quad Q^* = \left(q_0, -\mathbf{q}\right)} \end{aligned} \tag{۹}$$

۸. مزدوجِ حاصلضربِ کواترنین‌ها

مزدوجِ حاصلضربِ دو کواترنین از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\left(Q_2 Q_1\right)^* = Q_1^* Q_2^*} \tag{۱۰}$$

به همین صورت برای سه کواترنین داریم:

$$\left(Q_3 Q_2 Q_1\right)^* = Q_1^* Q_2^* Q_3^* \tag{۱۱}$$

اثباتِ رابطهٔ (۱۰):

$$\begin{aligned} Q_1^* Q_2^* &= \left(\left(q_{01}, -\mathbf{q}_1\right)\left(q_{02}, -\mathbf{q}_2\right)\right) \\ &= \left(\left(q_{01}q_{02} - \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2\right), \left(-q_{01}\mathbf{q}_2 - q_{02}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)\right) \\ &= \left(\left(q_{01}q_{02} - \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2\right), -\left(q_{01}\mathbf{q}_2 + q_{02}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_1\right)\right) \\ &= \left(\left(q_{01}q_{02} - \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2\right), \left(q_{01}\mathbf{q}_2 + q_{02}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_1\right)\right)^* \\ &= \left(\left(q_{02}, \mathbf{q}_2\right)\left(q_{01}, \mathbf{q}_1\right)\right)^* \\ &= \left(Q_2 Q_1\right)^* \end{aligned}$$

اثباتِ رابطهٔ (۱۱):

$$\begin{aligned} \left(Q_3 Q_2 Q_1\right)^* &= \left(Q_2 Q_1\right)^* Q_3^* \\ &= Q_1^* Q_2^* Q_3^* \end{aligned}$$

۹. معکوسِ یک کواترنینِ یکّه

معکوسِ هر کواترنینِ واحد (یکّه)، مزدوجِ آن است؛ یعنی:

$$\boxed{\left\|Q\right\| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad QQ^* = Q^*Q = Q_I} \tag{۱۲}$$

اثبات:

$$Q = \left(q_0, \mathbf{q}\right), Q^* = \left(q_0, -\mathbf{q}\right), Q_I = \left(1, \mathbf{0}\right), \left\|Q\right\| = 1$$

$$\begin{aligned} QQ^* &= \left(\left(q_0^{\,2} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}\right), \left(q_0\mathbf{q} - q_0 \cdot \mathbf{q} - \mathbf{q} \times \mathbf{q}\right)\right) \\ &= \left(\left(q_0^{\,2} + q_1^{\,2} + q_2^{\,2} + q_3^{\,2}\right), \mathbf{0}\right) \\ &= \left(\left\|Q\right\|, \mathbf{0}\right) = \left(1, \mathbf{0}\right) = Q_I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^*Q &= \left(\left(q_0^{\,2} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}\right), \left(-q_0\mathbf{q} + q_0 \cdot \mathbf{q} - \mathbf{q} \times \mathbf{q}\right)\right) \\ &= \left(\left(q_0^{\,2} + q_1^{\,2} + q_2^{\,2} + q_3^{\,2}\right), \mathbf{0}\right) \\ &= \left(\left\|Q\right\|, \mathbf{0}\right) = \left(1, \mathbf{0}\right) = Q_I \end{aligned}$$

۱۰. نمایشِ دوران با استفاده از یک کواترنین

دورانی به اندازهٔ α حولِ بردارِ $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$ را می‌توان با یک کواترنین به صورتِ زیر بیان کرد:

$$Q = \left(\cos\frac{\alpha}{2}, k_1 \sin\frac{\alpha}{2}, k_2 \sin\frac{\alpha}{2}, k_3 \sin\frac{\alpha}{2}\right) \quad \leftrightarrow \quad \boxed{Q = \left(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\mathbf{k}\right)} \qquad (۱۳)$$

۱۱. یکّه بودنِ کواترنینِ نمایندهٔ دوران

کواترنینی که دوران را نمایش می‌دهد دارای طولِ (نُرمِ) واحد است؛ یعنی:

$$\begin{aligned} &Q = \left(q_0, q_1, q_2, q_3\right) \quad \leftrightarrow \quad R_{(\mathbf{k},\alpha)} \\ &\Rightarrow q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad or \quad \left\|Q\right\| = 1 \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

چرا که:

$$\begin{aligned} q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 &= \cos^2\frac{\alpha}{2} + k_1^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + k_2^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + k_3^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} \\ &= \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\overbrace{\left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2\right)}^{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

۱۲. نمایشِ ماتریسِ دوران با استفاده از عناصرِ کواترنینِ نمایندهٔ دوران

با توجّه به نمایشِ ماتریسِ دوران با استفاده از بردار و زاویهٔ دوران یعنی:

$${}_s^tC = \begin{bmatrix} C\alpha + \left(1 - C\alpha\right)k_1^2 & -k_3 S\alpha + \left(1 - C\alpha\right)k_1 k_2 & k_2 S\alpha + \left(1 - C\alpha\right)k_1 k_3 \\ k_3 S\alpha + \left(1 - C\alpha\right)k_1 k_2 & C\alpha + \left(1 - C\alpha\right)k_2^2 & -k_1 S\alpha + \left(1 - C\alpha\right)k_2 k_3 \\ -k_2 S\alpha + \left(1 - C\alpha\right)k_1 k_3 & k_1 S\alpha + \left(1 - C\alpha\right)k_2 k_3 & C\alpha + \left(1 - C\alpha\right)k_3^2 \end{bmatrix} \qquad (۱۵)$$

با یک سری جایگذاری‌های مناسب می‌توان ماتریس دوران را با عناصر کواترنین بیان کرد (اثبات در یادداشت‌های درسِ ناوبری، بخشِ کواترنین‌ها):

$$\begin{aligned} {}_s^tC &= \begin{bmatrix} 2q_0^2 - 1 + 2q_1^2 & 2\left(q_1 q_2 - q_3 q_0\right) & 2\left(q_1 q_3 + q_2 q_0\right) \\ 2\left(q_1 q_2 + q_3 q_0\right) & 2q_0^2 - 1 + 2q_2^2 & 2\left(q_2 q_3 - q_1 q_0\right) \\ 2\left(q_1 q_3 - q_2 q_0\right) & 2\left(q_2 q_3 + q_1 q_0\right) & 2q_0^2 - 1 + 2q_3^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 2\left(q_2^2 + q_3^2\right) & 2\left(q_1 q_2 - q_3 q_0\right) & 2\left(q_1 q_3 + q_2 q_0\right) \\ 2\left(q_1 q_2 + q_3 q_0\right) & 1 - 2\left(q_1^2 + q_3^2\right) & 2\left(q_2 q_3 - q_1 q_0\right) \\ 2\left(q_1 q_3 - q_2 q_0\right) & 2\left(q_2 q_3 + q_1 q_0\right) & 1 - 2\left(q_1^2 + q_2^2\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

۱۳. بیانِ کواترنینِ نمایندهٔ دوران با استفاده از عناصرِ ماتریسِ دوران

اگر ماتریسِ دوران را به صورتِ زیر در نظر بگیریم:

$$
{}_s^tC = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \tag{۱۷}
$$

کواترنینِ $Q = \left(q_0, q_1, q_2, q_3\right)$ نمایندهٔ دورانِ فوق به صورت زیر خواهد بود (اثبات در یادداشت‌های درسِ ناوبری، بخشِ کواترنین‌ها):

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{c_{11} + c_{22} + c_{33} + 1} \\
q_1 &= \frac{1}{4q_0}\left(c_{32} - c_{23}\right) \\
q_2 &= \frac{1}{4q_0}\left(c_{13} - c_{31}\right) \\
q_3 &= \frac{1}{4q_0}\left(c_{21} - c_{12}\right)
\end{aligned} \tag{۱۸}
$$

و یا:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&tr\left(C\right) = c_{11} + c_{22} + c_{33} \\
&q_0 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + tr\left(C\right)} \\
&q_1 = \operatorname{sign}\left(c_{32} - c_{23}\right)\frac{1}{2}\sqrt{1 + 2c_{11} - tr\left(C\right)} \\
&q_2 = \operatorname{sign}\left(c_{13} - c_{31}\right)\frac{1}{2}\sqrt{1 + 2c_{22} - tr\left(C\right)} \\
&q_3 = \operatorname{sign}\left(c_{21} - c_{12}\right)\frac{1}{2}\sqrt{1 + 2c_{33} - tr\left(C\right)}
\end{aligned}
} \tag{۱۹}
$$

۱۴. به دست آوردنِ بیانِ یک بردار در دستگاهِ دوران‌یافته، فقط با استفاده از کواترنینِ نمایندهٔ دورانِ

می‌دانیم که اگر دستگاهِ t حولِ بردارِ $\mathbf{k}$ به اندازهٔ α دوران کند تا به دستگاهِ s تبدیل شود، ماتریسِ دورانِ بینِ دو دستگاه برابرِ ${}_s^tC = C_{\mathbf{k}}\left(\alpha\right)$ خواهد بود. در این صورت اگر بیانِ یک بردار را در دستگاهِ s داشته باشیم، بیانِ آن در دستگاهِ t از رویِ ماتریسِ دوران به صورتِ زیر به دست می‌آید:

$$ {}^{t}\mathbf{v} = {}^{t}_{s}C\, {}^{s}\mathbf{v} = C_{\mathbf{k}}\left(\alpha\right) {}^{s}\mathbf{v} \tag{۲۰} $$

فرض کنید که کواترنینِ $Q = \left(q_0, q_1, q_2, q_3\right)$ نمایندهٔ این دوران باشد؛ یعنی:

$$ \begin{aligned} q_0 &= \cos\frac{\alpha}{2} & \qquad q_2 &= k_2 \sin\frac{\alpha}{2} \\ q_1 &= k_1 \sin\frac{\alpha}{2} & \qquad q_3 &= k_3 \sin\frac{\alpha}{2} \end{aligned} \tag{۲۱} $$

در این صورت، رابطهٔ بینِ بیانِ بردارِ $\mathbf{v}$ در دستگاهِ t و s به صورتِ زیر با استفاده از کواترنینِ نمایندهٔ دوران به دست می‌آید:

$$ \boxed{\left(0, {}^{t}\mathbf{v}\right) = Q\left(0, {}^{s}\mathbf{v}\right)Q^{*}} \tag{۲۲} $$

که در آن $\left(0, {}^{t}\mathbf{v}\right)$ کواترنینی با مؤلفهٔ اسکالرِ صفر و مؤلفهٔ برداریِ ${}^{t}\mathbf{v}$ است.

اثبات:

$$ \begin{aligned} Q &= \left(q_0, \mathbf{q}\right), Q^{*} = \left(q_0, -\mathbf{q}\right), \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^{T} \\ R &= Q\left(0, {}^{s}\mathbf{v}\right)Q^{*} \\ &= \left(\left(q_0 .0 - \mathbf{q}\cdot {}^{s}\mathbf{v}\right), \left(q_0\, {}^{s}\mathbf{v} + 0.\mathbf{q} + \mathbf{q}\times {}^{s}\mathbf{v}\right)\right)Q^{*} \\ &= \left(\left(-\mathbf{q}\cdot {}^{s}\mathbf{v}\right), \left(q_0\, {}^{s}\mathbf{v} + \mathbf{q}\times {}^{s}\mathbf{v}\right)\right)\left(q_0, -\mathbf{q}\right) \\ &= \left(\begin{array}{l} \left(-q_0\left(\mathbf{q}\cdot {}^{s}\mathbf{v}\right) + \left(q_0\, {}^{s}\mathbf{v} + \mathbf{q}\times {}^{s}\mathbf{v}\right)\cdot \mathbf{q}\right), \\ \left(\left(\mathbf{q}\cdot {}^{s}\mathbf{v}\right)\mathbf{q} + q_0\left(q_0\, {}^{s}\mathbf{v} + \mathbf{q}\times {}^{s}\mathbf{v}\right) - \left(q_0\, {}^{s}\mathbf{v} + \mathbf{q}\times {}^{s}\mathbf{v}\right)\times \mathbf{q}\right) \end{array}\right) \\ &= \left(r_0, \mathbf{r}\right) \end{aligned} $$

r_0 به صورتِ زیر به دست می‌آید:

$$ \begin{aligned} r_0 &= -q_0\left(\mathbf{q}\cdot {}^{s}\mathbf{v}\right) + \left(q_0\, {}^{s}\mathbf{v} + \mathbf{q}\times {}^{s}\mathbf{v}\right)\cdot \mathbf{q} \\ &= \overbrace{-q_0\mathbf{q}\cdot {}^{s}\mathbf{v} + q_0\, {}^{s}\mathbf{v}\cdot \mathbf{q}}^{0} + \overbrace{\left(\mathbf{q}\times {}^{s}\mathbf{v}\right)\cdot \mathbf{q}}^{\left(\mathbf{q}\times {}^{s}\mathbf{v}\right)\perp \mathbf{q} \Rightarrow \left(\mathbf{q}\times {}^{s}\mathbf{v}\right)\cdot \mathbf{q} = 0} \\ &= 0 \end{aligned} $$

و در موردِ $\mathbf{r}$ داریم:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \left(\mathbf{q}\cdot {}^s\mathbf{v}\right)\mathbf{q} + q_0\left(q_0\,{}^s\mathbf{v} + \mathbf{q}\times {}^s\mathbf{v}\right) - \left(q_0\,{}^s\mathbf{v} + \mathbf{q}\times {}^s\mathbf{v}\right)\times\mathbf{q} \\
&= \left(\mathbf{q}\cdot {}^s\mathbf{v}\right)\mathbf{q} + {q_0}^2\,{}^s\mathbf{v} + q_0\mathbf{q}\times {}^s\mathbf{v} - q_0\,{}^s\mathbf{v}\times\mathbf{q} - \mathbf{q}\times {}^s\mathbf{v}\times\mathbf{q} \\
&= \left(\mathbf{q}\cdot {}^s\mathbf{v}\right)\mathbf{q} + {q_0}^2\,{}^s\mathbf{v} + 2q_0\mathbf{q}\times {}^s\mathbf{v} + \left(\mathbf{q}\cdot {}^s\mathbf{v}\right)\mathbf{q} - \left(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}\right){}^s\mathbf{v} \\
&= 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T\,{}^s\mathbf{v} + {q_0}^2\,{}^s\mathbf{v} + 2q_0\mathbf{q}\times {}^s\mathbf{v} - \left(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}\right){}^s\mathbf{v} \\
&= \left(q_0^2 - \mathbf{q}\cdot\mathbf{q}\right){}^s\mathbf{v} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T\,{}^s\mathbf{v} + 2q_0\mathbf{q}\times {}^s\mathbf{v} \\
&= \left(\left(2q_0^2-1\right)I_{3\times3} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T + 2q_0\left[\mathbf{q}\times\right]\right){}^s\mathbf{v} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 2q_0^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2q_0^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2q_0^2-1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} + 2q_0\begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}\right){}^s\mathbf{v} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 2q_0^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2q_0^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2q_0^2-1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} q_1^2 & q_1q_2 & q_1q_3 \\ q_2q_1 & q_2^2 & q_2q_3 \\ q_3q_1 & q_3q_2 & q_3^2 \end{bmatrix} + 2q_0\begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}\right){}^s\mathbf{v} \\
&= \begin{bmatrix} 2q_0^2-1+2q_1^2 & 2q_1q_2-2q_0q_3 & 2q_1q_3+2q_0q_2 \\ 2q_2q_1+2q_0q_3 & 2q_0^2-1+2q_2^2 & 2q_2q_3-2q_0q_1 \\ 2q_3q_1-2q_0q_2 & 2q_3q_2+2q_0q_1 & 2q_0^2-1+2q_3^2 \end{bmatrix}{}^s\mathbf{v} \\
&= {}_s^tC\,{}^s\mathbf{v} \\
&= {}^t\mathbf{v}
\end{aligned}
$$

۱۵. عبارتِ سرراستی برای بیانِ ماتریسِ دوران بر حسبِ مؤلفه‌های کواترنینِ نمایندهٔ دوران

توجه کنید که ضمنِ اثباتِ رابطهٔ (۲۲)، عبارتِ سرراستی برای بیانِ ماتریسِ دوران بر حسبِ مؤلفه‌های کواترنینِ نمایندهٔ دوران به دست آمد که به صورتِ زیر است:

$$
\begin{aligned}
&R_{(\mathbf{k},\alpha)} = C_{\mathbf{k}}\left(\alpha\right) = {}_s^tC \qquad \leftrightarrow \qquad Q = \left(q_0,\mathbf{q}\right), \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T \\
&\Rightarrow \\
&\boxed{{}_s^tC = \left(2q_0^2-1\right)I_{3\times3} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T + 2q_0\left[\mathbf{q}\times\right]}
\end{aligned}
\tag{۲۳}
$$

۱۶. کواترنینِ نمایندهٔ دورانِ معکوس

می‌دانیم که اگر ${}_s^tC$ ماتریسِ دورانِ دستگاهِ t به دستگاهِ s باشد، ترانهادهٔ این ماتریس، ماتریسِ دورانِ معکوس خواهد بود:

$$ {}^{s}_{t}C = \left({}^{t}_{s}C \right)^{-1} = \left({}^{t}_{s}C \right)^{T} \qquad (۲۴) $$

ماتریسِ ${}^{s}_{t}C$ در واقع ماتریسِ دورانِ دستگاهِ s به دستگاهِ t می‌باشد.

در موردِ کواترنین‌ها نیز بیانِ مشابهی داریم. در واقع اگر کواترنینِ $Q = \left(q_0, \mathbf{q}\right)$ نمایندهٔ یک دوران باشد، معکوسِ این کواترنین (یا همان مزدوج آن)، نمایندهٔ دورانِ معکوس خواهد بود:

$$ \boxed{\begin{array}{l} Q = \left(q_0, \mathbf{q}\right) \quad \leftrightarrow \quad {}^{t}_{s}C \\ \Rightarrow \\ Q^{*} = \left(q_0, -\mathbf{q}\right) \leftrightarrow \quad {}^{s}_{t}C \end{array}} \qquad (۲۵) $$

اثبات:

$$ {}^{t}_{s}C = \left(2q_0^2 - 1\right) I_{3\times3} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{T} + 2q_0\left[\mathbf{q}\times\right] \leftrightarrow Q = \left(q_0, \mathbf{q}\right) $$

$$ \begin{aligned} {}^{s}_{t}C &= \left({}^{t}_{s}C \right)^{T} \\ &= \left(2q_0^2 - 1\right)\left(I_{3\times3}\right)^{T} + 2\left(\mathbf{q}\mathbf{q}^{T}\right)^{T} + 2q_0\left[\mathbf{q}\times\right]^{T} \\ &= \left(2q_0^2 - 1\right) I_{3\times3} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{T} + 2q_0\left(-\left[\mathbf{q}\times\right]\right) \\ &= \left(2q_0^2 - 1\right) I_{3\times3} + 2\left(-\mathbf{q}\right)\left(-\mathbf{q}\right)^{T} + 2q_0\left(\left[-\mathbf{q}\times\right]\right) \end{aligned} $$

$$ \Rightarrow $$

$$ {}^{s}_{t}C = \left(2q_0^2 - 1\right) I_{3\times3} + 2\left(-\mathbf{q}\right)\left(-\mathbf{q}\right)^{T} + 2q_0\left[-\mathbf{q}\times\right] \leftrightarrow Q^{*} = \left(q_0, -\mathbf{q}\right) $$

۱۷. کواترنین‌های قرینه، نمایندهٔ یک دوران

اگر کواترنینی، نمایندهٔ یک دوران باشد، قرینهٔ آن کواترنین نیز نمایندهٔ همان دوران خواهد بود.

$$ \boxed{\begin{array}{lcr} Q_1 = \left(q_0, \mathbf{q}\right) & \leftrightarrow & {}^{t}_{s}C \\ \Rightarrow & & \\ Q_2 = -Q_1 = \left(-q_0, -\mathbf{q}\right) & \leftrightarrow & {}^{t}_{s}C \end{array}} \qquad (۲۶) $$

اثبات:

برای اثباتِ رابطهٔ (۲۶) کافی است ماتریسِ دوران را برای Q_2 از روی رابطهٔ (۲۳) به دست آوریم. مشاهده می‌شود که عبارتِ حاصل، همان ماتریسِ دورانِ متناظر با Q_1 است.

۱۸. ترکیبِ دوران‌ها با استفاده از کواترنین‌ها

۱۸-۱. بیانِ دوران‌ها با استفاده از ماتریس‌های دورانِ بین دستگاه‌های متوالی

دوران‌های متوالیِ زیر را در نظر بگیرید:

دستگاهِ t را دوران می‌دهیم تا به دستگاهِ m تبدیل شود. سپس دستگاهِ m دوران می‌یابد و دستگاهِ l حاصل می‌شود. در نهایت از دورانِ دستگاهِ l، دستگاهِ s به دست می‌آید:

$$t \xrightarrow{R_{(\mathrm{k}_1,\alpha_1)}} m \xrightarrow{R_{(\mathrm{k}_2,\alpha_2)}} l \xrightarrow{R_{(\mathrm{k}_3,\alpha_3)}} s \tag{۲۷}$$

اگر در هر دوران، بردارِ دورانِ مربوطه را در دستگاهِ مبدأ (مربوط به همان دوران) بیان کنیم، این دوران‌ها را با استفاده از ماتریس‌های دورانِ بین دستگاه‌های متوالی به صورتِ زیر می‌توان بیان کرد:

$$t \xrightarrow{{}_m^tC} m \xrightarrow{{}_l^mC} l \xrightarrow{{}_s^lC} s \tag{۲۸}$$

می‌دانیم که ماتریسِ دوران از دستگاهِ t به دستگاهِ l برابرِ ${}_m^tC\,{}_l^mC$ و ماتریسِ دوران از دستگاهِ t به دستگاهِ s برابرِ ${}_m^tC\,{}_l^mC\,{}_s^lC$ است.

$$\begin{aligned} {}_l^tC &= {}_m^tC\,{}_l^mC \\ {}_s^tC &= {}_m^tC\,{}_l^mC\,{}_s^lC \end{aligned} \tag{۲۹}$$

حال اجازه دهید نحوهٔ نمایشِ کواترنینِ نمایندهٔ دوران را طوری تغییر دهیم که بیان‌کنندهٔ دستگاه‌های مبدأ و مقصدِ دوران هم باشد. این تغییر را برای معنادار بودنِ علامت‌گذاری انجام می‌دهیم. در این صورت، سلسله دوران‌های فوق را می‌توانیم چنین نشان دهیم:

$$\begin{array}{l} t \xrightarrow{{}_m^tQ} m \xrightarrow{{}_l^mQ} l \xrightarrow{{}_s^lQ} s \\ {}_m^tQ \quad \leftrightarrow \quad {}_m^tC \\ {}_l^mQ \quad \leftrightarrow \quad {}_l^mC \\ {}_s^lQ \quad \leftrightarrow \quad {}_s^lC \end{array} \tag{۳۰}$$

رابطهٔ بین کواترنین‌های نمایندهٔ این دوران‌ها چنین خواهد بود:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} {}^{t}_{l}C = {}^{t}_{m}C\,{}^{m}_{l}C & \leftrightarrow & {}^{t}_{l}Q = {}^{t}_{m}Q\,{}^{m}_{l}Q \\ {}^{t}_{s}C = {}^{t}_{m}C\,{}^{m}_{l}C\,{}^{l}_{s}C & \leftrightarrow & {}^{t}_{l}Q = {}^{t}_{m}Q\,{}^{m}_{l}Q\,{}^{l}_{s}Q \end{array}} \tag{۳۱}$$

اثبات:

$$\begin{array}{lcl} {}^{t}_{m}C \leftrightarrow {}^{t}_{m}Q & \Rightarrow & \left(0, {}^{t}\mathbf{v}\right) = {}^{t}_{m}Q\left(0, {}^{m}\mathbf{v}\right){}^{t}_{m}Q^{*} \\ {}^{m}_{l}C \leftrightarrow {}^{m}_{l}Q & \Rightarrow & \left(0, {}^{m}\mathbf{v}\right) = {}^{m}_{l}Q\left(0, {}^{l}\mathbf{v}\right){}^{m}_{l}Q^{*} \end{array}$$

$$\left(0, {}^{t}\mathbf{v}\right) = {}^{t}_{m}Q\,{}^{m}_{l}Q\left(0, {}^{l}\mathbf{v}\right){}^{m}_{l}Q^{*}\,{}^{t}_{m}Q^{*} = \left({}^{t}_{m}Q\,{}^{m}_{l}Q\right)\left(0, {}^{l}\mathbf{v}\right)\left({}^{t}_{m}Q\,{}^{m}_{l}Q\right)^{*}$$

$$\Rightarrow \qquad {}^{t}_{l}Q = {}^{t}_{m}Q\,{}^{m}_{l}Q \qquad \leftrightarrow \qquad {}^{t}_{l}C = {}^{t}_{m}C\,{}^{m}_{l}C$$

در موردِ دورانِ سوم نیز اثبات به همین ترتیب خواهد بود.

۱۸-۲. بیانِ دوران‌ها با استفاده از ماتریس‌های دورانِ بین دستگاهِ اوّل و دستگاه‌های دیگر

باز هم سلسله دوران‌های متوالیِ زیر را در نظر بگیرید:

$$t \xrightarrow{R_{(\mathbf{k}_1,\alpha_1)}} m \xrightarrow{R_{(\mathbf{k}_2,\alpha_2)}} l \xrightarrow{R_{(\mathbf{k}_3,\alpha_3)}} s \tag{۳۲}$$

اگر در هر دوران، بردارِ دورانِ مربوطه را در دستگاهِ مبدأ (مربوط به دورانِ کل) بیان کنیم (یعنی همهٔ بردارهای دوران در دستگاهِ t بیان شوند)، این دوران‌ها را با استفاده از ماتریس‌های دورانِ بین دستگاهِ اوّل (t) و یک سری دستگاهِ دیگر به صورتِ زیر می‌توان بیان کرد:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} t \xrightarrow{{}^{t}_{m'}C} m' \\ t \xrightarrow{{}^{t}_{l'}C} l' \end{array}\right\} \to t \xrightarrow{{}^{t}_{l}C} l \\ t \xrightarrow{{}^{t}_{s'}C} s' \end{array}\right\} \to t \xrightarrow{{}^{t}_{s}C} s \tag{۳۳}$$

واضح است که در روابط (۳۲) و (۳۳)، $m = m'$؛ ولی در حالتِ کلی، $l \neq l', s \neq s'$.

می‌دانیم که ماتریس‌های دورانِ در رابطهٔ (۳۳) را می‌توان به صورتِ زیر در هم ضرب کرد و به ماتریسِ دورانِ کل رسید:

$$
\begin{aligned}
{}^{t}_{l}C &= {}^{t}_{l'}C\,{}^{t}_{m'}C \\
{}^{t}_{s}C &= {}^{t}_{s'}C\,{}^{t}_{l'}C\,{}^{t}_{m'}C
\end{aligned}
\tag{۳۴}
$$

حال با همان نحوهٔ نمایشِ کواترنین‌های نمایندهٔ دوران، رابطهٔ بین کواترنین‌ها چنین خواهد بود:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
{}^{t}_{l}C &= {}^{t}_{l'}C\,{}^{t}_{m'}C && \leftrightarrow && {}^{t}_{l}Q = {}^{t}_{l'}Q\,{}^{t}_{m'}Q \\
{}^{t}_{s}C &= {}^{t}_{s'}C\,{}^{t}_{l'}C\,{}^{t}_{m'}C && \leftrightarrow && {}^{t}_{l}Q = {}^{t}_{s'}Q\,{}^{t}_{l'}Q\,{}^{t}_{m'}Q
\end{aligned}
}
\tag{۳۵}
$$

اثبات:

دوران‌یافتهٔ بردارِ $\mathbf{v}$ تحتِ دورانِ اوّل را $\mathbf{v}_1$ و دوران‌یافتهٔ $\mathbf{v}_1$ تحتِ دورانِ دوم را $\mathbf{v}_2$ می‌نامیم و داریم:

$$
\begin{aligned}
{}^{t}_{m'}C \leftrightarrow {}^{t}_{m'}Q \quad &\Rightarrow \quad {}^{t}\mathbf{v}_1 = {}^{t}_{m'}C\,{}^{t}\mathbf{v} \leftrightarrow \left(0, {}^{t}\mathbf{v}_1\right) = {}^{t}_{m'}Q\left(0, {}^{t}\mathbf{v}\right){}^{t}_{m'}Q^{*} \\
{}^{t}_{l'}C \leftrightarrow {}^{t}_{l'}Q \quad &\Rightarrow \quad {}^{t}\mathbf{v}_2 = {}^{t}_{l'}C\,{}^{t}\mathbf{v}_1 \leftrightarrow \left(0, {}^{t}\mathbf{v}_2\right) = {}^{t}_{l'}Q\left(0, {}^{t}\mathbf{v}_1\right){}^{t}_{l'}Q^{*}
\end{aligned}
$$

$$
\left(0, {}^{t}\mathbf{v}_2\right) = {}^{t}_{l'}Q\,{}^{t}_{m'}Q\left(0, {}^{t}\mathbf{v}\right){}^{t}_{m'}Q^{*}\,{}^{t}_{l'}Q^{*} = \left({}^{t}_{l'}Q\,{}^{t}_{m'}Q\right)\left(0, {}^{t}\mathbf{v}\right)\left({}^{t}_{l'}Q\,{}^{t}_{m'}Q\right)^{*}
$$

$$
\Rightarrow \qquad {}^{t}_{l}Q = {}^{t}_{l'}Q\,{}^{t}_{m'}Q \qquad \leftrightarrow \qquad {}^{t}_{l}C = {}^{t}_{l'}C\,{}^{t}_{m'}C
$$

در موردِ دورانِ سوم نیز اثبات به همین ترتیب خواهد بود.

۱۸-۳. نتیجهٔ کلّی برای ترکیبِ دوران‌ها با استفاده از کواترنین‌ها

قبلا در موردِ ترکیبِ دوران‌های متوالی مطالبِ زیادی دیده‌ایم و می‌دانیم که برای ترکیبِ دوران‌ها، کافی است ماتریس‌های دوران را طبقِ ترتیبِ خاصّی در هم ضرب کنیم. مطالبِ دو بخشِ قبل نشان داد که در موردِ کواترنین‌ها نیز کافی است با همان ترتیبی که ماتریس‌های دوران را ضرب می‌کنیم، کواترنین‌ها را در هم ضرب کنیم.

بنابراین اگر دوران حولِ محورهای گذار باشد، از رابطهٔ (۳۱) و اگر حولِ محورهای ثابت باشد، از رابطهٔ (۳۵) استفاده می‌کنیم.

۱۹. بیانِ کواترنینِ نمایندهٔ دوران با استفاده از زوایای اویلر

زوایای اویلرِ مدّ نظر، زوایای دوران حولِ محورهای گذار به صورتِ زیر هستند:

$$
t \xrightarrow{{}^{t}_{m}C = C_3(\psi)} m \xrightarrow{{}^{m}_{l}C = C_2(\theta)} l \xrightarrow{{}^{l}_{s}C = C_1(\phi)} s
\tag{۳۶}
$$

بنابراین کواترنینی که دورانِ کل را بیان می‌کنید به صورتِ زیر خواهد بود:

$$t \xrightarrow{{}_m^tQ=Q_{3,\psi}} m \xrightarrow{{}_l^mQ=Q_{2,\theta}} l \xrightarrow{{}_s^lQ=Q_{1,\phi}} s$$

$$\begin{aligned}
{}_m^tQ &= Q_{3,\psi} && \leftrightarrow && {}_m^tC = C_3(\psi)\\
{}_l^mQ &= Q_{2,\theta} && \leftrightarrow && {}_l^mC = C_2(\theta)\\
{}_s^lQ &= Q_{1,\phi} && \leftrightarrow && {}_s^lC = C_1(\phi)\\
{}_s^tQ &= Q_{3,\psi}Q_{2,\theta}Q_{1,\phi} && \leftrightarrow && {}_s^tC = C_3(\psi)C_2(\theta)C_1(\phi)
\end{aligned} \tag{۳۷}$$

با استفاده از رابطهٔ (۳۷)، می‌توانیم کواترنینِ نمایندهٔ دورانِ کل را بر حسبِ زوایای اویلر به صورتِ زیر بنویسیم:

$$ {}_s^tQ = Q_{3,\psi}Q_{2,\theta}Q_{1,\phi} = \left(q_0, q_1, q_2, q_3\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}
q_0 &= \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}\\
q_1 &= \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} - \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}\\
q_2 &= \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}\\
q_3 &= \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} - \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}
\end{aligned}} \tag{۳۸}$$

توجه شود که با توجه به اینکه در اثباتِ رابطهٔ (۳۸) (که در ادامه می‌آید)، تنها از تعریفِ کواترنینِ نمایندهٔ دوران و خواصِّ کواترنین‌ها استفاده کرده‌ایم، برای تبدیلِ بیانِ زوایای اویلریِ دوران به بیانِ برداری، بهترین گزینه، استفاده از واسطِ کواترنین با رابطهٔ (۳۸) است. این در قیاس با حالتی است که بخواهیم زوایای اویلر را به ماتریسِ دوران تبدیل کنیم و سپس بردارِ دوران را بیابیم؛ که می‌دانیم در تبدیل به ماتریسِ دوران، اطلاعاتی را از دست می‌دهیم (رجوع شود به یادداشت‌های درسِ ناوبری، بخشِ زوایای اویلر، ذیلِ عنوانِ «تبدیل بیان ماتریسی دوران به بیان زوایای اویلری»).

در واقع زوایای اویلر چیزی جز زوایای دوران نیستند و منطقی هم هست که وقتی کواترنینِ نمایندهٔ دوران را بر حسبِ بردار و زاویهٔ دوران تعریف کرده‌ایم، رابطهٔ سرراستی مانند (۳۸) را انتظار داشته باشیم و نیز برای رسیدن به بردار و زاویهٔ دورانِ کل، از واسطِ کواترنین استفاده کنیم.

اثبات:

محاسباتِ ابتداییِ زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
Q_{3,\psi} &= \left(q_{03}, \mathbf{q}_3\right), \qquad q_{03} = \cos\frac{\psi}{2},\ \ \mathbf{q}_3 = \sin\frac{\psi}{2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T \\
Q_{2,\psi} &= \left(q_{02}, \mathbf{q}_2\right), \qquad q_{02} = \cos\frac{\theta}{2},\ \ \mathbf{q}_2 = \sin\frac{\theta}{2}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T \\
Q_{1,\psi} &= \left(q_{01}, \mathbf{q}_1\right), \qquad q_{01} = \cos\frac{\phi}{2},\ \ \mathbf{q}_1 = \sin\frac{\phi}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_2 = 0 \qquad \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_1 = 0 \qquad \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1 = 0
$$

$$
\mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_2 = -\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_1 = \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\phi}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_1 = -\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.
$$

برای کواترنینِ نمایندهٔ دورانِ کل می‌توانیم بنویسیم:

$$
\begin{aligned}
{}^t_l Q &= \left(q_0, \mathbf{q}\right) \\
{}^t_l Q &= Q_{3,\psi} Q_{2,\theta} Q_{1,\phi} \\
&= \left(q_{03}, \mathbf{q}_3\right)\left(q_{02}, \mathbf{q}_2\right)\left(q_{01}, \mathbf{q}_1\right) \\
&= \left(\left(q_{03}q_{02} - \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_2\right), \left(q_{03}\mathbf{q}_2 + q_{02}\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_2\right)\right)\left(q_{01}, \mathbf{q}_1\right) \\
&= \begin{pmatrix}
\left(\left(q_{03}q_{02} - \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_2\right)q_{01} - \left(q_{03}\mathbf{q}_2 + q_{02}\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_2\right) \cdot \mathbf{q}_1\right), \\
\begin{pmatrix}
\left(q_{03}q_{02} - \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_2\right)\mathbf{q}_1 + q_{01}\left(q_{03}\mathbf{q}_2 + q_{02}\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_2\right) \\
+\left(q_{03}\mathbf{q}_2 + q_{02}\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_2\right) \times \mathbf{q}_1
\end{pmatrix}
\end{pmatrix} \\
&= \left(q_0, \mathbf{q}\right)
\end{aligned}
$$

که در آن q_0 چنین به دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \left(q_{03}q_{02} - \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_2\right)q_{01} - \left(q_{03}\mathbf{q}_2 + q_{02}\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_2\right) \cdot \mathbf{q}_1 \\
&= q_{03}q_{02}q_{01} - \overbrace{\mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_2}^{0}\, q_{01} - q_{03}\, \overbrace{\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1}^{0} - q_{02}\, \overbrace{\mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_1}^{0} - \mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1 \\
&= \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}
\end{aligned}
$$

و برای $\mathbf{q}$ داریم:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q} &= \left(q_{03}q_{02} - \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_2\right)\mathbf{q}_1 + q_{01}\left(q_{03}\mathbf{q}_2 + q_{02}\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_2\right) + \left(q_{03}\mathbf{q}_2 + q_{02}\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_2\right) \times \mathbf{q}_1 \\
&= q_{03}q_{02}\mathbf{q}_1 - \overbrace{\left(\mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_2\right)}^{0}\mathbf{q}_1 + q_{01}q_{03}\mathbf{q}_2 + q_{01}q_{02}\mathbf{q}_3 + q_{01}\mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_2 \\
&\qquad + q_{03}\mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_1 + q_{02}\mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_1 + \overbrace{\mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_1}^{0} \\
&= q_{03}q_{02}\mathbf{q}_1 + q_{01}q_{03}\mathbf{q}_2 + q_{01}q_{02}\mathbf{q}_3 + q_{01}\mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_2 + q_{03}\mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_1 + q_{02}\mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_1 \\
&= \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \\
&\qquad - \cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\phi}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} - \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} \\
\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} \\
\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} - \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

۲۰. بردارِ دوران خاصیتِ جمعِ برداری ندارد؛ امّا ...

می‌دانیم که بردارِ دوران خاصیتِ جمعِ برداری ندارد؛ امّا در صورتِ لزوم، برای یافتنِ بردارِ دورانِ حاصل از دو دورانِ متوالی می‌توان از کواترنین‌ها کمک گرفت. به طوری که اگر $R_{\left({}^{t}\mathbf{k}_1,\alpha_1\right)}$ دورانِ اوّل و $R_{\left({}^{t}\mathbf{k}_2,\alpha_2\right)}$ دورانِ دوم، و $R_{\left({}^{t}\mathbf{k},\alpha\right)}$ باشند، داریم:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 2\cos^{-1}\left(\cos\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2} - \sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\,{}^{t}\mathbf{k}_1 \cdot {}^{t}\mathbf{k}_2\right) \\
{}^{t}\mathbf{k} &= \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2}\,{}^{t}\mathbf{k}_1 + \cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\,{}^{t}\mathbf{k}_2 + \sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\,{}^{t}\mathbf{k}_2 \times {}^{t}\mathbf{k}_1\right)
\end{aligned}
\tag{۳۹}
$$

و اگر $R_{\left({}^{t}\mathbf{k}_1,\alpha_1\right)}$ دورانِ اوّل و $R_{\left({}^{m}\mathbf{k}_2,\alpha_2\right)}$ دورانِ دوم (بردارِ دوران در m یعنی دستگاهِ دوم بیان شده است)، و $R_{\left({}^{t}\mathbf{k},\alpha\right)}$ باشند، داریم:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 2\cos^{-1}\left(\cos\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2} - \sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\,{}^t\mathbf{k}_1 \cdot {}^m\mathbf{k}_2\right)\\
{}^t\mathrm{k} &= \frac{1}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2}\,{}^t\mathbf{k}_1 + \cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\,{}^m\mathbf{k}_2 + \sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\,{}^t\mathbf{k}_1 \times {}^m\mathbf{k}_2\right)
\end{aligned}
\tag{۴۰}
$$

اثبات رابطهٔ (۳۹):

$$
\left.\begin{array}{l}
t \xrightarrow{R\left({}^t\mathbf{k}_1,\alpha_1\right)} m' \\[2ex]
t \xrightarrow{R\left({}^t\mathbf{k}_2,\alpha_2\right)} s'
\end{array}\right\}
t \xrightarrow{R\left({}^t\mathbf{k},\alpha\right)} s
\qquad\qquad
\left.\begin{array}{l}
t \xrightarrow{{}^t_{m'}Q} m' \\[2ex]
t \xrightarrow{{}^t_{s'}Q} s'
\end{array}\right\}
t \xrightarrow{{}^t_{s}Q} s
$$

$$
\begin{aligned}
{}^t_{m'}Q &= \left(q_{01}, \mathbf{q}_1\right), & q_{01} &= \cos\frac{\alpha_1}{2} \quad \mathbf{q}_1 = \sin\frac{\alpha_1}{2}\,{}^t\mathbf{k}_1\\
{}^t_{s'}Q &= \left(q_{02}, \mathbf{q}_2\right), & q_{02} &= \cos\frac{\alpha_2}{2} \quad \mathbf{q}_2 = \sin\frac{\alpha_2}{2}\,{}^t\mathbf{k}_2\\
{}^t_{s}Q &= {}^t_{s'}Q\,{}^t_{m'}Q = \left(q_0, \mathbf{q}\right), & q_0 &= \cos\frac{\alpha}{2} \quad\; \mathbf{q} = \sin\frac{\alpha}{2}\,{}^t\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_0 &= q_{01}q_{02} - \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2\\
&= \cos\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2} - \sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\,{}^t\mathbf{k}_1 \cdot {}^t\mathbf{k}_2\\
\mathbf{q} &= q_{02}\mathbf{q}_1 + q_{01}\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_1\\
&= \sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2}\,{}^t\mathbf{k}_1 + \cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\,{}^t\mathbf{k}_2 + \sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\,{}^t\mathbf{k}_2 \times {}^t\mathbf{k}_1
\end{aligned}
$$

اثبات رابطهٔ (۴۰):

$$t \xrightarrow{R\left({}^t\mathbf{k}_1,\alpha_1\right)} m \xrightarrow{R\left({}^m\mathbf{k}_2,\alpha_2\right)} s, \qquad t \xrightarrow{R\left({}^t\mathbf{k},\alpha\right)} s$$

$$t \xrightarrow{{}^t_mQ} m \xrightarrow{{}^m_sQ} s, \qquad t \xrightarrow{{}^t_sQ} s$$

$${}^t_mQ = \left(q_{01}, \mathbf{q}_1\right), \qquad q_{01} = \cos\frac{\alpha_1}{2} \quad \mathbf{q}_1 = \sin\frac{\alpha_1}{2}\,{}^t\mathbf{k}_1$$

$${}^m_sQ = \left(q_{02}, \mathbf{q}_2\right), \qquad q_{02} = \cos\frac{\alpha_2}{2} \quad \mathbf{q}_2 = \sin\frac{\alpha_2}{2}\,{}^m\mathbf{k}_2$$

$${}^t_sQ = {}^t_mQ\,{}^m_sQ = \left(q_0, \mathbf{q}\right), \qquad q_0 = \cos\frac{\alpha}{2} \quad \mathbf{q} = \sin\frac{\alpha}{2}\,{}^t\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} q_0 &= q_{01}q_{02} - \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 \\ &= \cos\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2} - \sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\,{}^t\mathbf{k}_1 \cdot {}^m\mathbf{k}_2 \\ \mathbf{q} &= q_{01}\mathbf{q}_2 + q_{02}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 \\ &= \sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2}\,{}^t\mathbf{k}_1 + \cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\,{}^m\mathbf{k}_2 + \sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\,{}^t\mathbf{k}_1 \times {}^m\mathbf{k}_2 \end{aligned}$$

ضمیمه ۱: عبارتِ سرراستی برای بیانِ ماتریسِ دوران با استفاده از عناصرِ بردارِ دوران و زاویه دوران

قبلا دیده‌ایم که برای بیانِ ماتریسِ دوران با استفاده از بردار و زاویهٔ دوران، رابطهٔ زیر را داریم:

$$ {}_s^tC = \begin{bmatrix} C\alpha + (1-C\alpha)k_1^2 & -k_3S\alpha + (1-C\alpha)k_1k_2 & k_2S\alpha + (1-C\alpha)k_1k_3 \\ k_3S\alpha + (1-C\alpha)k_1k_2 & C\alpha + (1-C\alpha)k_2^2 & -k_1S\alpha + (1-C\alpha)k_2k_3 \\ -k_2S\alpha + (1-C\alpha)k_1k_3 & k_1S\alpha + (1-C\alpha)k_2k_3 & C\alpha + (1-C\alpha)k_3^2 \end{bmatrix} \tag{۴۱} $$

رابطهٔ بالا را سرراست‌تر هم می‌توانیم بنویسیم. در واقع این رابطه، از دورانِ بردارهای پایهٔ دستگاهِ t حولِ بردارِ $\mathbf{k}$ به اندازهٔ α به دست آمده است. به طوری که در اثباتِ آن داشتیم:

$$ \begin{aligned} \mathrm{s}_1 &= \mathbf{t}_1\cos\alpha + (\mathbf{k}\times\mathbf{t}_1)\sin\alpha + (1-\cos\alpha)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{t}_1)\mathbf{k} \\ {}^t\mathrm{s}_1 &= {}^t\mathbf{t}_1\cos\alpha + {}^t(\mathbf{k}\times\mathbf{t}_1)\sin\alpha + (1-\cos\alpha)\,{}^t(\mathbf{k}\cdot\mathbf{t}_1)\,{}^{t,s}\mathbf{k} \end{aligned} \tag{۴۲} $$

این رابطه را می‌توان چنین نوشت:

$$ \begin{aligned} {}^t\mathrm{s}_1 &= \cos\alpha\,{}^t\mathbf{t}_1 + \sin\alpha\left[{}^{t,s}\mathbf{k}\times\right]{}^t\mathbf{t}_1 + (1-\cos\alpha)\,{}^{t,s}\mathbf{k}\,{}^{t,s}\mathbf{k}^T\,{}^t\mathbf{t}_1 \\ &= \left(\cos\alpha I_{3\times3} + \sin\alpha\left[{}^{t,s}\mathbf{k}\times\right] + (1-\cos\alpha)\,{}^{t,s}\mathbf{k}\,{}^{t,s}\mathbf{k}^T\right){}^t\mathbf{t}_1 \end{aligned} $$

برای ماتریسِ دورانِ کل خواهیم داشت:

$$ \begin{aligned} {}_s^tC &= \begin{bmatrix} {}^t\mathrm{s}_1 & {}^t\mathrm{s}_2 & {}^t\mathrm{s}_3 \end{bmatrix} \\ &= \left(\cos\alpha I_{3\times3} + \sin\alpha\left[{}^{t,s}\mathbf{k}\times\right] + (1-\cos\alpha)\,{}^{t,s}\mathbf{k}\,{}^{t,s}\mathbf{k}^T\right)\begin{bmatrix} {}^t\mathbf{t}_1 & {}^t\mathbf{t}_2 & {}^t\mathbf{t}_3 \end{bmatrix} \\ &= \left(\cos\alpha I_{3\times3} + \sin\alpha\left[{}^{t,s}\mathbf{k}\times\right] + (1-\cos\alpha)\,{}^{t,s}\mathbf{k}\,{}^{t,s}\mathbf{k}^T\right)I_{3\times3} \end{aligned} $$

$$ \Rightarrow \boxed{{}_s^tC = \cos\alpha I_{3\times3} + (1-\cos\alpha)\,{}^{t,s}\mathbf{k}\,{}^{t,s}\mathbf{k}^T + \sin\alpha\left[{}^{t,s}\mathbf{k}\times\right]} \tag{۴۳} $$

رابطهٔ (۴۳)، همان رابطهٔ (۴۱) است و مطلبِ جدیدی نیست، فقط ظاهرِ آن منظم‌تر و سرراست‌تر است.

توجه کنید که اینک رابطهٔ (۲۳) را که ضمنِ اثباتِ رابطهٔ (۲۲) به دست آمد، می‌توان مستقیماً با استفاده از رابطهٔ (۴۳) به دست می‌آورد:

$$Q=\left(q_0,\mathbf{q}\right),\quad q_0=\cos\frac{\alpha}{2},\quad \mathbf{q}=\sin\frac{\alpha}{2}\,{}^{t,s}\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}
{}_s^tC &= \cos\alpha I_{3\times3}+\left(1-\cos\alpha\right){}^{t,s}\mathbf{k}\,{}^{t,s}\mathbf{k}^T+\sin\alpha\left[{}^{t,s}\mathbf{k}\times\right]\\
&=\cos\alpha I_{3\times3}+\frac{\left(1-\cos\alpha\right)}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\mathbf{q}\mathbf{q}^T+\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\mathbf{q}\times\right]\\
&=\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right)I_{3\times3}+\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\mathbf{q}\mathbf{q}^T+\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\mathbf{q}\times\right]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{{}_s^tC=\left(2{q_0}^2-1\right)I_{3\times3}+2\mathbf{q}\mathbf{q}^T+2q_0\left[\mathbf{q}\times\right]} \tag{۴۴}$$

و این همان عبارتِ سرراست برای بیانِ ماتریسِ دوران بر حسبِ عناصرِ کواترنینِ نمایندهٔ دوران است.