

با نام او

درس سامانه‌های ناخطی و کنترل

مقدمه

اینکه متداول شده است برای گفتگو دربارهٔ سامانه‌های نه لزوماً خطی (یعنی اعم از خطی و ناخطی) با نگاه لطیف آغاز شود، شاید ریشه در این داشته باشد که ریاضیات بیشتری در دسترس بوده است. و این نیز ریشه در این دارد که در بسیاری از سامانه‌هایی که برای ریاضی‌سازی مورد توجه قرار گرفته، سعی شده که از جزئیات آغاز نموده و با کنار هم قرار دادن آنها به ریاضی‌سازی سامانه برسند.

شاید به نظر رسد چنانچه بدون در نظر گرفتن لطافت‌ها و جزئیات بلکه با نگاهی خبیر، فقط به کلیت رفتار علاقمند باشیم، چه بسا دیگر لزومی نداشته باشد که از نگاه لطیف آغاز شود. اما جالب این است که یکی از راه‌های ریاضی در خبیرشناسی، دوباره منجر به روشی می‌گردد که در ریاضیات لطیف‌شناسی توسعه داده شده است (به ابتدای بخش خبیرشناسی مراجعه گردد!). لذاست که ریاضیات توسعه داده شده در لطیف‌شناسی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار شده است.

ضمناً آنچه در بالا سخن از آن رفت صرفاً مربوط به نگاه تغییری به علامت‌ها و سامانه‌ها می‌گردد و دربارهٔ نگاه رنگی بحثی جداگانه لازم است که در اینجا فعلاً به آن کاری نداریم و شاید در آغاز خبیرشناسی دربارهٔ آن گفتگو کنیم.

رفتارشناسی لطیف با نگاه تغییری

پیشتر آموخته‌اید که در نگاه تغییری همه علامت‌ها، در یک تناظر یک به یک با علامت ویژه‌ای، که عموماً زمان نامیده می‌شود، قرار داده می‌شوند. تغییر نیز بر اساس همین تناظر است که معنی می‌یابد که مثلاً گفته می‌شود علامت x از زمان t_1 تا t_2 ، از x_1 به x_2 تغییر کرده است. به این ترتیب هرگاه سامانه‌ای را از دیدگاه تغییری بخواهیم بیان کنیم لازم است چگونگی تغییرات همهٔ علامت‌های مربوط به آن سامانه را به نحوی شرح دهیم. هرگاه به این شرح می‌پردازیم در واقع اصطلاحاً می‌گوییم به رفتار این سامانه پرداخته‌ایم. لذا منظور ما از رفتارشناسی روشن است که یعنی همین دریافتن چگونگی این تغییرات!

وقتی به این تغییرات نگاه می‌کنیم در حال آزمایش و تجربهٔ آنها و شاید ثبت آنها هستیم. هنگامیکه سعی داریم آنچه از این تغییرات دریافته‌ایم را بصورت ریاضی بیان کنیم اصطلاحاً در حال ریاضی‌سازی تجربه‌مان هستیم. هرگاه سعی داریم سنتی را برای این تغییرات به دست آوریم در حال شناخت این چگونگی هستیم. هرگاه سعی داریم این شناخت را به صورت یک الگوی ریاضی پیشتر ساخته شده، درآورده و بیان کنیم، اصطلاحاً در حال الگوسازی (مدلسازی) ریاضی هستیم.

اما بسیار متداول شده که از چگونگی ریاضی‌سازی انجام شده، صرف نظر نموده و شما ناگهان با سامانهٔ ریاضی شده مواجهه می‌شوید و از شما انتظار می‌رود تا رفتارشناسی کنید. اما از نظر دور نکنید که هنگام شناسایی یک سامانه چنین شرایطی در کار نیست و لذا بسیار مهم است که به مفاهیم آنچه در روند رفتارشناسی به آنها توجه می‌کنیم به خوبی تسلط یابید و فقط به بیان‌های ریاضی نهایی که به دست می‌آیند بسنده نکنید.

حال و تحول آن و گمان کامل بودن سامانه

حال یک سامانه، همه آن چیزهایی است که اگر معلوم باشند، گویی آن سامانه همه چیزش معلوم است. به این ترتیب اگر از 10 چیزی که سامانه را تشکیل داده‌اند، در هر لحظه فقط با دانستن 2 تای آنها، بقیه 8 تا در آن زمان قابل به دست آوردن باشند، آن 2 تا، حال سامانه را مشخص می‌کنند. از همین رو برای شناخت چگونگی تحول سامانه لازم نیست به تحول همه متغیرها پرداخت بلکه شناخت تحول متغیرهای حال کفایت می‌کند و در نمونه بالا شناخت از تحول همان 2 تا کفایت می‌کند. چنانچه بر این گمان باشیم که سامانه را آنچنان کامل در نظر گرفته‌ایم که تحول حال از کنون به حال بعدی، هیچ اطلاعاتی بجز حال کنونی را لازم ندارد و سنت یا سنت‌هایی را که چگونگی تحول از حالی به حال بعدی را صد در صد و بی‌هیچ تردیدی در دست داریم، در این صورت می‌گوییم سامانه را کامل گمان کرده‌ایم.

بخوبی می‌دانیم که اگر گمان کامل بودن سامانه در نظر گرفته شده توسط ما، بر علمی از طرف خداوند استوار نباشد، گمانی بیش نبوده و باندازه همان گمان قابل اعتنا بوده و در همان محدوده می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

در بسیاری از موارد ما بدون اینکه چنین علمی داشته باشیم، گمان کامل بودن را پایه کار قرار می‌دهیم و پیش می‌رویم و حتی کوشش می‌کنیم سنت تحول را نیز از روی مشاهدات به دست آوریم. گاهی هم چیزی به دست می‌آوریم ولی بعدها می‌بینیم آن سنتی که خیال می‌کردیم که درست و کامل است، گاه پاسخ نمی‌دهد. لذا سر در گم می‌شویم که آیا این از نادیده گرفتن چیزهایی است که باید در سامانه دخیل می‌انگاشته‌ایم یا از نادرست بودن سنت یافته‌مان ناشی می‌شود. اینها چیزهایی است که هرگاه فقط به تجربه تکیه داشته باشیم، رخ می‌دهد! و شاید در چنین بستری (فقط تجربه) گریزناپذیر است.

همین‌جا لازم است به خود هشدار دهیم، که در برداشت‌های صرفاً مبتنی بر تجربه‌مان همواره نقص‌هایی را از هر دو نوع در نظر گرفته و لحاظ کنیم. از همه مهمتر اینکه آنها را در همان جایی که مجاز هستیم با آزمون و خطا پیش رویم، به کار بندیم.

روشن است که تنها خداوند علیم و حکیم است که به کامل بودن سامانه در نظر گرفته شده و سنت‌های در نظر گرفته شده، می‌تواند حکم کند. به همین دلیل هم هست که تنها کسانی می‌توانند آینده را بی‌هیچ کم و کاست پیش‌بینی کنند که خداوند به آنها چنین تسلطی را هرچند مقطعی داده باشد.

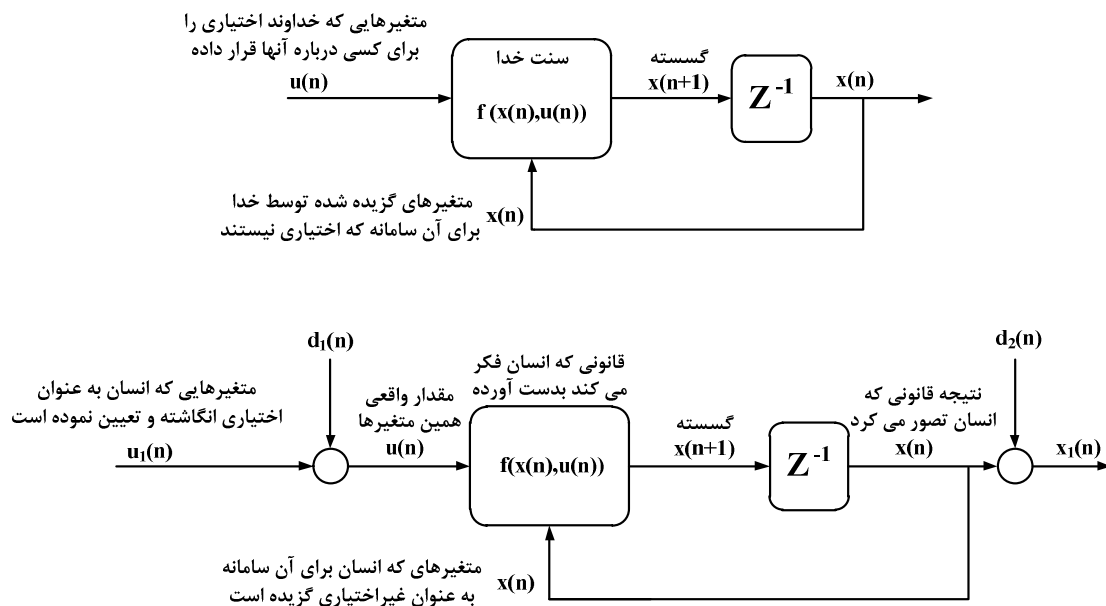
هنگامی که بر اساس تجربیاتی، معادلاتی را برای رفتار سامانه‌ای که در نظر گرفته‌ایم، به دست آوردیم، همواره وقتی بر اساس آن درباره آینده داورای داریم باید با تواضع و فروتنی کامل بیان کنیم که اگر خداوند همانگونه که پیشتر به ما چنان نشان داده بود، پیش رود، آنگاه می‌توان روی این معادلات حساب نمود.

به این ترتیب است که خداوند این امکان را به ما داده تا در این راه در حال کشف و شناخت هرچند ناقص از احکام و سنت‌هایی باشیم که خداوند متعال بگونه‌ای بسیار لطیف بین اجزای گوناگون جهان و جهان‌ها مقرر نموده است. برای درک بهتر این مهم قسمت کوچکی از گفتار امام صادق که بر ایشان درود، را با ترجمه‌ای تحت‌اللفظی می‌آوریم:

... فَظَلَّتِ الْعَيْنُ إِلَى خَلْقٍ مُتَّصِلٍ بَعْضُهُ بِبَعْضٍ فَذَلَّتِ الْقَلْبَ عَلَى مَا عَايَنَتْ وَتَفَكَّرَ الْقَلْبُ حِينَ دَلَّتْهُ الْعَيْنُ عَلَى مَا عَايَنَتْ مِنْ مَلَكُوتِ السَّمَاءِ وَازْتِمَاعِهَا فِي الْهَوَاءِ بِغَيْرِ عَمَدٍ يَرَى وَلَا دَعَائِمٍ تُمَسِّكُهَا لَا تُؤَخَّرُ مَرَّةً فَتَنْكَشِطُ وَلَا تُقَدِّمُ أُخْرَى فَتَزُولُ وَلَا تَحْبِطُ مَرَّةً فَتَدْنُو وَلَا تَرْتَفِعُ أُخْرَى فَتَنَائِي لَا تَتَغَيَّرُ لِطُولِ الْأَمَدِ وَلَا تَخْلُقُ لِاخْتِلَافِ اللَّيَالِي وَالْأَيَّامِ وَلَا تَتَدَاغِي مِنْهَا نَاحِيَةٌ وَلَا يَنْهَارُ مِنْهَا طَرَفٌ مَعَ مَا عَايَنَتْ مِنَ النُّجُومِ الْجَارِيَةِ السَّبْعَةِ الْمُخْتَلِفَةِ بِمَسِيرِهَا لِتَوَرَّانِ الْفَلَكَ وَتَنْقَلِبِهَا فِي الْبُرُوجِ يَوْمًا بَعْدَ يَوْمٍ وَشَهْرًا بَعْدَ شَهْرٍ وَسَنَةً بَعْدَ سَنَةٍ مِنْهَا السَّرِيعُ وَ مِنْهَا الْبَطِيءُ وَ مِنْهَا الْمُعْتَدِلُ السَّرِيرُ ثُمَّ رُجُوعُهَا وَاسْتِقَامَتُهَا وَأَخْذُهَا عَرَضًا وَطَوْلًا وَخُوسُهَا عِنْدَ الشَّمْسِ وَ هِيَ مُشْرِقَةٌ وَ ظُهُورُهَا إِذَا غَرَبَتْ وَ جَرَى الشَّمْسُ وَالْقَمَرُ فِي الْبُرُوجِ دَائِسِينَ لَا يَتَغَيَّرَانِ فِي أَرْمَنِيهِمَا وَأَوْقَاتِهِمَا يَعْرِفُ ذَلِكَ مَنْ يَعْرِفُ بِحِسَابِ مَوْضُوعٍ وَ أَمْرِ مَعْلُومٍ بِحِكْمَةٍ يَعْرِفُ ذَوُو الْأَلْبَابِ...

... پس نگاه می کند چشم به آفرینشی که متصل است برخی از آن به برخی، پس راهنمایی می کند قلب را بر آنچه معاینه می کند و قلب تفکر می کند آنگاه که راهنمایی اش می کند چشم بر آنچه معاینه می کند از ملکوت آسمان و بالا برده شدنش در هوا، نه به وسیله ستونی که دیده شود و نه آوندهایی که نگه دارندش، با این حال پس نمی افتد باری، که در نتیجه از جا کنده شود و پیش نمی افتد دگربار، که در نتیجه از جا در رفته و از بین رود، و نیز، فرو نمی افتد باری، که در نتیجه نزدیک شود و بالاتر نمی رود دگربار، که در نتیجه روگردانده و دور شود. دگرگون نمی گردد بخاطر درازی گذر زمان و نمی آفریند بخاطر پشت سر هم آمدن شب ها و روزها و نمی خواند ناحیه ای از آن (دیگر اجرام را) و نمی راند طرفی از آن (اجرام خود را)، همراه هر آنچه معاینه می کند از سیاره و ستارگان جریان دار هفتگانه پشت سر هم، بوسیله مسیرهاشان (که) بواسطه دوران فلک و جابجایی شان در برج هاشان (است) روزی بعد روزی و ماهی بعد ماهی و سالی بعد سالی. برخی از آنها روندی سریع و برخی کُند و برخی میانه دارند. سپس بازگشت شان و پایداری شان و برخورداری شان پهنا و درازا و پنهان شدن شان نزد خورشید درحالی که او نمایان و پرتوافشان است و پدیداری شان هنگامیکه غروب می کند و روان اند خورشید و ماه در برج ها بصورت دو کوک (شده)، بی آنکه تغییر دهند در زمان هاشان و وقت هاشان ... !

از همین روست که دانشمندان واقعی همواره عقل نموده و در راه تجربه و مشاهده هیچگاه از هدایت ها و راهنمایی های او غفلت نمی ورزند تا خطای خود را هم در سامانه ای که در نظر می گیرند و هم در سنت ها و احکامی که برای آن به دست می آورند، کاهش دهند. به این ترتیب می توان مطالب بالا را در دو نمودار زیر خلاصه نمود. در یکی هم سامانه مورد مطالعه توسط خداوند داده شده و هم احکام و سنت های او بطور کامل فرمان دهی می کند. در دیگری این هر دو توسط یک انسانی که خداوند تا حدودی به او بینشی داده، شکل گرفته است.



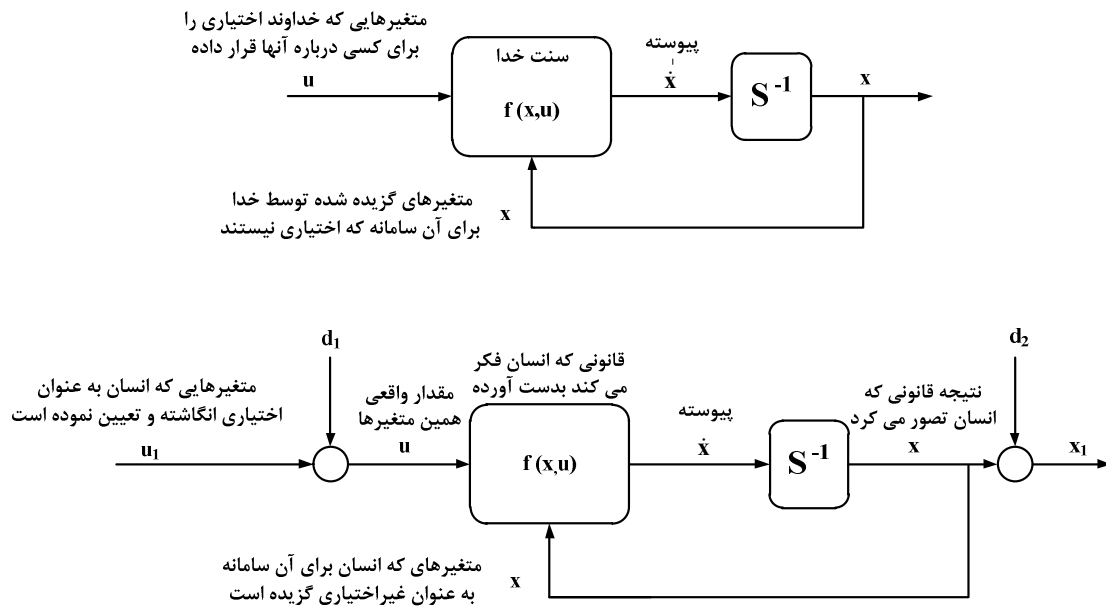
شکل ۱

دقت کنید، چون گمان داریم که برخی متغیرها به خواست کسی وابسته است و خواست او نیز مستقل از متغیرهای دیگر است، پس نامی دیگر یعنی نام ورودی داده‌ایم و کاملاً مستقل نشان داده شده است. حال درست است که رفتارشناسی کامل، منوط به در نظر گرفتن تأثیر تغییر ورودی‌ها در متغیرهای دیگر است ولی برای اینکه فقط بخواهیم لطافت بین متغیرهای غیرمستقل را بدانیم، لازم است ورودی‌ها را بی‌تغییر نگه داریم تا تأثیری در تغییرات نگذارند و در نتیجه لطافت‌های درون‌گروهی، بتوانند خود را نشان دهند.

گمان پیوسته بودن زمان و تبعات آن

توجه کنید که پیوسته گمان کردن چیزی یعنی نمی‌توان از بعدی آن سخن گفت چراکه فاصله بعدی آن هر قدر بخواهد می‌تواند کوچک باشد! . در واقع ما بر این گمانیم که گویی بین هر دو مشاهده‌مان (هرچند با فاصله کوچک) می‌توانسته مشاهده دیگری رخ دهد. با اینکه این گمانی بیش نیست ولی با چنین گمانی است که اساساً ریاضیات پیوسته شکل گرفته است.

لذا ناچاریم بجای اینکه در هر لحظه t_1 و $x(t_1)$ از تغییر آن به t_2 و $x(t_2)$ سخن بگوییم، از سرعت تغییر x در لحظه t_1 ، $\frac{dx}{dt}(t_1)$ ، سخن بگوییم و نه از t_2 خاصی و $x(t_2)$ نظیر آن. از همین جاست که معادلات حالت زمان‌گسسته بصورت گام به گام (تفاضلی) و معادلات حالت زمان‌پیوسته به صورت سرعتی بیان می‌شوند. در زمان‌گسسته f چگونگی حال در گام بعدی را می‌دهد درحالیکه در زمان‌پیوسته f سرعت تحول حال را می‌دهد.



شکل ۲

رفتارشناسی سامانه‌های مرتبه اول

مرتبه اول یعنی فقط یک متغیر حالت داریم. پس سخن فقط درباره چگونگی تغییر و تحول آن است. این تغییر فقط به خود آن و نیز البته به متغیر ورودی مربوط است. ولی چون متغیر ورودی را در این رفتارشناسی، ثابت می‌گیریم، پس این مقدار ثابت یک تأثیر اولیه در چگونگی آغاز تحلیل دارد. در زمان پیوسته چگونگی سرعت این متغیر بر حسب خودش باید مد نظر قرار گیرد. اگر پیشتر این چگونگی سرعت، شناسایی شده باشد و به صورت ریاضی نیز بیان شده باشد، پس شما سرعت متغیر را بر حسب خودش به صورت یک تابعی مثلاً به نام f خواهید داشت و می‌نویسید:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

که اگر u را ثابتی مانند u_0 بگیریم، می‌توان نوشت:

$$\dot{x} = f(x, u_0) = f_{u_0}(x)$$

یا در زمان گسسته می‌نویسید:

$$x(n+1) = f(x(n), u(n))$$

و یا برای ورودی‌های ثابت می‌توان نوشت:

$$x(n+1) = f(x(n), u_0) = f_{u_0}(x(n))$$

روشن است که اگر سرعت متغیر هم‌علامت با خودش باشد، متغیر افزایش خواهد یافت و اگر ناهم‌علامت باشد، متغیر کاهش خواهد یافت. باز روشن است که سرعت این افزایش یا کاهش نیز درست از روی این تابع به دست می‌آید. در حالت ویژه اگر این سرعت صفر باشد معلوم می‌شود که در آن مقادیر ما هیچ تغییری

نخواهیم داشت و چنانچه به آنجا برسیم یا از آنجا آغاز کنیم، تکان نخورده و در همانجا خواهیم ماند. به چنین حال یا حال‌هایی چنانچه وجود داشته باشند، حال سکون یا تعادل گویند.

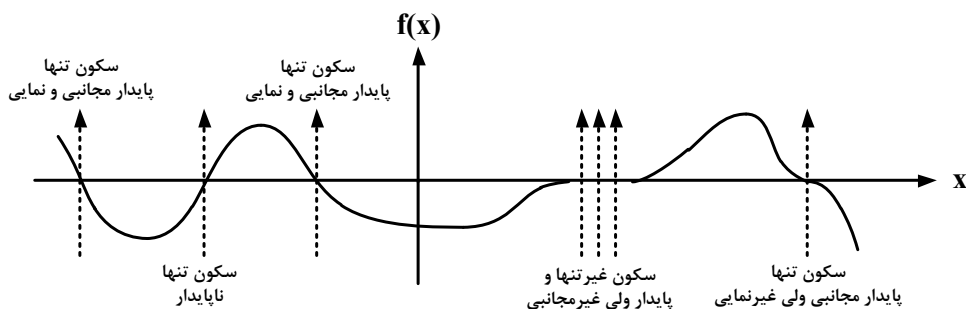
بررسی رفتار در همسایگی چنین حال‌های سکونی از ارزش ویژه‌ای برخوردار است. این ویژگی به این سبب است که در بسیاری از موارد تنظیم، ما علاقمندیم تا مقدار حالت، ثابت بماند یا در همسایگی هر قدر نزدیک به ثابتی، بمانیم. لذا اگر چنین رفتاری در هر همسایگی هرچند کوچکی از سکون برقرار باشد آن را صفت پایدار داده و سکون پایدار می‌نامندش و در غیر این صورت ناپایدار نامیده می‌شود.

اگر در این همسایگی رفتار بگونه‌ای باشد که با گذر زمان مطمئن باشیم که به سکون نزدیک و نزدیک‌تر نیز می‌شویم، پس به آن صفت مجانبی نیز اضافه می‌کنند و می‌گویند پایدار مجانبی است.

اگر این نزدیک‌شوندگی بگونه‌ای باشد که سرعت نزدیک‌شوندگی با خود نزدیکی متغیر به سکون متناسب باشد یا از یک تناسبی بزرگتر باشد، آن را پایدار نمایی گویند چراکه اساساً تعریف نمایی بودن یک رفتار همین است که سرعتش با خودش متناسب باشد. البته چنانچه این تناسب با علامت منفی باشد می‌گویند میرایی نمایی داریم و در صورت مثبت بودن تناسب، آن را نمایی فزاینده می‌نامیم. هرچه قدر مطلق این ضریب تناسب بزرگ‌تر باشد میرایی (یا فزاینده‌گی) سریع‌تر رخ می‌دهد به طوری که در میرایی، عکس آن را ثابت زمانی میرایی می‌نامند.

اگر چسبیده به سکون هیچ سکونی نباشد آن سکون را «تنها» گویند. در این صورت تابع $f(x)$ در یک همسایگی هر چند کوچکی از سکون فقط یک ریشه، آن هم در سکون دارد.

در شکل‌های زیر هر یک از موارد بالا بصورت نموداری از $f(x)$ ‌های گوناگون آورده شده است. به زبان نموداری روشن است که برای پایداری، لازم و کافی است که حداقل یک همسایگی از سکون یافت شود که اگر مبدأ را به سکون منتقل کنیم، $f(x)$ درون یا در مرز ناحیه دوم و چهارم باشد. برای پایداری مجانبی لازم و کافی است که مطلقاً درون این نواحی باشد و نه در مرز! . برای پایداری نمایی نیز لازم و کافی است خطی راست گذرنده از این دو ناحیه با شیبی منفی بتوان رسم نمود که $f(x)$ در ناحیه دوم بالای این خط و در ناحیه چهارم زیر این خط یا مماس بر آنها قرار گیرد.



شکل ۳

در بالا فرض بر این بود که تابع چگونگی تغییر، یعنی f ، با زمان تغییر نمی‌کند. یعنی سنت و قانون تغییر، خودش، با گذشت زمان تغییر نمی‌کند که در این صورت خودگردان می‌نامند. اگر چنین فرضی را برداریم، اصطلاحاً به سامانه مربوطه متغیر با زمان یا ناخودگردان گویند. قرآن فرموده در سنت‌های خداوند نه تحویلی (تغییر آرام و پیوسته) و نه تبدیلی (بطور کلی بدل شدن به دیگری) رخ می‌دهد.

لذا احتمالاً دلیل نقص در فرضیات گوناگون ما که برای الگوسازی در نظر می‌گیریم، گاهی بهتر است و یا ناچاریم که قانون را متغیر با زمان بگیریم. به عنوان نمونه، مقاومت الکتریکی را در نظر بگیرید که مقاومت آن را ثابت با زمان در نظر می‌گیریم ولی در ادامه می‌بینیم این با درجه حرارت محیط و همینطور حرارتی که خودش در کار ایجاد می‌کند، مقاومتش تغییراتی دارد! حال دو راه داریم. یکی اینکه بخواهیم متغیر درجه حرارت را نیز در الگوسازی ریاضی خود وارد نموده و الگوسازی را دقیق‌تر نموده و لذا تعداد متغیرهای حالت را افزایش دهیم. ولی راه دیگر این است که بجای افزایش متغیرهای حالت، مقاومت را متغیر با زمان بگیریم. در این صورت است که سادگی تک متغیره بودن را گرفته ولی از طرف دیگر غیر ثابت بودن سامانه با زمان را پذیرفته‌ایم. این موضوع در بسیاری از موارد کاربرد دارد. به هر حال در چنین صورتی لازم است بنویسیم:

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

یا در زمان گسسته :

$$x(n+1) = f_n(x(n), u(n))$$

زیرنویس n برای این است که نشان دهیم در هر گام n ، ممکن است f چیزی باشد غیر از آنکه در گام قبلی یا بعدی هست! و لذا f دیگر لزوماً ثابت نبوده و در هر گام، f_n می‌داریم. حال در ادامه سعی می‌کنیم همان مفاهیم بالاتر آمده را که به دو زبان ساده همگانی و نموداری آوردیم به زبان ریاضی عددی نیز بیان کنیم.

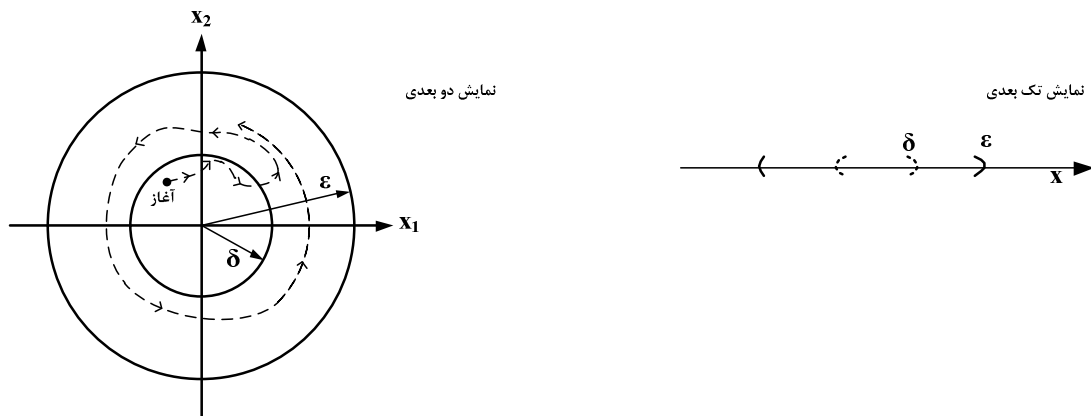
تعریف پایداری یک سکون

برای هر $\varepsilon > 0$ و t_0 (به عنوان زمان آغاز برای سامانه‌های متغیر با زمان) داده شده، یک $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ یافت

$$\text{شود که: } \|x(t) - x_e\| < \varepsilon \rightarrow \|x(t_0) - x_e\| < \delta(\varepsilon, t_0)$$

چنانچه δ هیچ بستگی به زمان آغاز، یعنی t_0 ، نداشته باشد، اصطلاحاً پایداری را یکنواخت می‌نامند. عبارت بالا به این معنی است که همسایگی‌ای که می‌خواهیم از آن خارج نشویم، دلخواه است و مثلاً هر قدر بخواهیم می‌تواند کوچک باشد. حال عبارت بالا می‌گوید که باید بتوان در درون این همسایگی دلخواه همسایگی‌ای، هر چند بسیار کوچک‌تر، معرفی نمود که با آغاز دلخواه از درون آن، مطمئن باشیم که حالت در ادامه از همسایگی دلخواه ابتدایی، خارج نشود (شکل ۴).

توجه کنید که از دیدگاه تنظیم این بدین معنی است که اگر می‌خواهید پس از واگذاری سامانه به حال خود، از همسایگی ε خارج نشود، لازم است آن را در همسایگی δ رها کرده باشید.



شکل ۴

تعریف جاذب بودن یک سکون

یک $\delta(t_0) > 0$ باشد که : $\|x(t) - x_e\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \implies \|x(t_0) - x_e\| < \delta(t_0)$ چنانچه δ هیچ بستگی به زمان آغاز، یعنی t_0 ، نداشته باشد، اصطلاحاً جاذب یکنواخت نامیده می‌شود. روشن است که یکنواختی و یا عدم آن فقط برای سامانه‌های متغیر با زمان مطرح است و گرنه برای سامانه‌های نامتغیر با زمان همواره یکنواختی وجود دارد. توجه اکید داشته باشید که میل کردن به صفر به این معنی نیست که لزوماً از همان ابتدا، کم شدن فاصله رخ می‌دهد و یا لزوماً همواره در حال کوچک شدن باشد. بلکه کافی است برای هر فاصله‌ی کوچک داده شده، زمانی بتوان داد که از آن پس، فاصله، از آن داده شده‌ی کوچک، کوچکتر بماند.

تمرین - شکل‌های دو بعدی در صفحه رسم کنید که چگونگی تغییر، بگونه‌هایی باشد که در عبارت بالا آمده است ولی همگی جاذب باشند. یعنی فاصله: ۱- همواره در حال کوچک شدن باشد. ۲- گاه در حال کم شدن و گاه در حال افزایش ولی در مجموع کاهش یابد. ۳- در آغاز حرکت، افزایش ولی سپس همواره در حال کاهش.

تعریف پایداری مجانبی

چنانچه سکونی پایدار و جاذب باشد، پایداری آن، مجانبی خوانده می‌شود. در اینجا این پرسش بوجود می‌آید که آیا می‌شود سکونی جاذب باشد ولی پایدار نباشد؟! پاسخ این است که گاه ممکن است! برای درک این رخداد، ابتدا سعی کنید خودتان فکر کنید چگونه ممکن است؟! . ولی راهنمایی می‌گردد که این برای سامانه‌های مرتبه اول ممکن نیست بلکه برای مراتب بالاتر چنین چیزی ممکن است!

تعریف پایداری نمایی

یک $\delta > 0$ باشد که : $\|x(t) - x_e\| < b\|x(t_0) - x_e\|e^{-at} \implies \|x(t_0) - x_e\| < \delta$ که البته $a, b > 0$.

این به معنی است که فاصله حالت از حالت سکون زیر یک نمایی باقی می ماند و لذا چگونگی نزدیک شوندگی سریع تر از آن الگویی خواهد بود که آن نمایی و ثابت زمانی مربوطه ارائه می کند.

تمرین - با استفاده از تعریف های بالا آمده و نه استدلال های نموداری که بالاتر دیدید، الف- نشان دهید $\dot{x} = -x^3 + u$ در سکون $(x_e, u_e) = (0, 0)$ پایدار است. (یعنی باید برای هر ε داده شده یک δ معرفی کنید) ب- نشان دهید پایدار مجانبی نیز هست. (یعنی جاذب بودنش را نیز نشان دهید) ج- ثابت کنید پایداری نمایی ندارد. د- هر یک از موارد گذشته را با توجه به نمودار نیز بحث کنید.

تمرین - هم با استفاده از نمودار و هم با توجه به تعاریف عددی بالا، درباره پایداری، پایداری مجانبی و پایداری نمایی سامانه $\dot{x} = -x^3 + u$ ولی این بار در سکون های دیگر که $u_e \neq 0$ است بررسی و بحث کنید. در مواردی که مدعی هستید پایداری نمایی دارد، سه عدد a, b, δ_{max} را اعلام کنید.

تمرین - با استفاده از تعاریف عددی داده شده ی بالا، ثابت کنید شرط های لازم و کافی نموداری داده شده ی بالاتر برای پایداری، پایداری مجانبی و پایداری نمایی در مرتبه اول کاملاً درست می باشند. راهنمایی: دقت کنید که ترجمه شرط های نموداری داده شده به عددی، به ترتیب، عبارتند از:

$$\begin{aligned}(x - x_e)(f(x, u_e) - f(x_e, u_e)) &\leq 0 \\(x - x_e)(f(x, u_e) - f(x_e, u_e)) &< 0 \\(x - x_e)(f(x, u_e) - f(x_e, u_e) - a(x - x_e)) &\leq 0\end{aligned}$$

تمرین - اگر با تغییر متغیر، سکون را از $(x, u) = (x_e, u_e)$ به $(y, v) = (x - x_e, u - u_e) = (0, 0)$ ببرید، شرط های بالا به صورت ساده تر زیر نوشته می شوند: $\dot{y} = f(y + x_e, v + u_e) = f_y(y, v)$

$$\begin{aligned}y f_y(y, 0) &\leq 0 \\y f_y(y, 0) &< 0 \\y (f_y(y, 0) - ay) &\leq 0\end{aligned}$$

جلوتر، وقتی درباره سامانه های مراتب بالاتر گفتگو می کنیم، خواهیم دید که این شرط ها برای سامانه های مراتب بالاتر همچنان شرط های کافی هستند ولی لزوم آنها منتفی است. همینطور هنگامیکه از روش تابع لیاپانوف برای پایداری، می خواهیم سخن بگوییم، خواهیم دید که آن روش نیز ریشه در همین شروط ساده دارد.

تمرین - برای یک سامانه، الگوی تغییراتی مرتبه اول $\dot{x} = -x(x^2 - 1) + u$ ارائه گردیده است. الف) نمایش بلوکی سامانه را به همراه این الگو و نایقینی‌های ممکن در ورودی و حالت واقعی ارائه کنید. ب) تعادل‌های الگو را برای $u = 0$ بدست آورده و در مورد نوع رفتار دور و بر هر یک داوری کنید. ج) بازای $u = u_0 \neq 0$ ، بازای مقادیر گوناگون آن، در مورد تعادل‌های ممکن و نوع رفتار دور و بر آنها به دقت بحث کنید.

تمرین - تمامی انواع سکون را در نظر گرفته و برای سامانه‌های مرتبه اول مشابه زمان پیوسته، شرط‌های لازم و کافی برای پایداری، پایداری مجانبی و پایداری نمایی را بر اساس نمودار $f(x)$ بر حسب x مشخص کنید. دقت کنید که لازم است نمایی بودن را به زبان زمان گسسته بازتعریف کنید.

تمرین - تعاریف عددی را در زمان گسسته دوباره بنویسید. (کافی است تعاریف زمان پیوسته را در نظر گرفته و هر جا لازم است تغییری در ادبیات بدهید، اعمال کنید تا به زبان گسسته در آید)

تمرین - پیش‌تر با روش برگشتی زیر برای یافتن ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ ، آشنایی دارید.

$$x[n+1] = x[n] - \frac{f(x[n])}{f'(x[n])}$$

الف) نشان دهید ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ ، نقاط تعادل سامانه‌ی بالا می‌باشند. بشرط اینکه در این نقاط f' (مشتق f نسبت به x) مخالف صفر باشد.

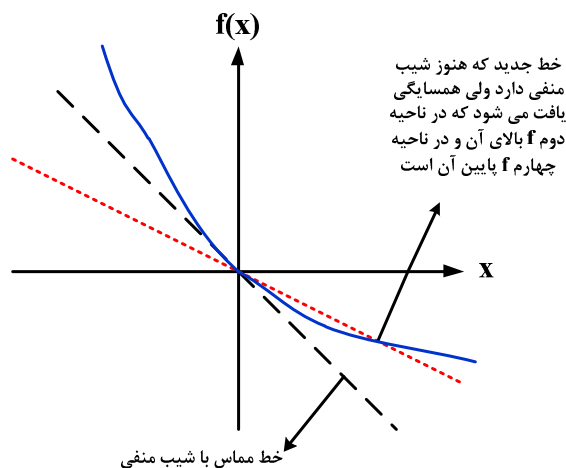
ب) با توجه به شرط‌هایی که در تمرین‌های بالاتر به دست آوردید، نشان دهید که تمامی تعادل‌های این سامانه، پایدار مجانبی‌اند. البته با همان شرط مذکور در الف.

روش خطی‌سازی در سکون

قاعده‌ای که برای پایداری نمایی یافته‌ایم، ما را به این راهنمایی می‌کند که هنگام پایداری نمایی، اگر شیب $f(x)$ را در سکون به دست آوریم، باید عددی منفی به دست آید یعنی مماس بر منحنی در سکون باید خطی با شیب منفی باشد. حال اگر f بالا یا پایین خط مماس باشد، همواره می‌توان خط دیگری با شیب منفی یافت که f برعکس شده و پایین یا بالای آن خط جدید قرار گیرد. در واقع تعریف مماس این را تحمیل می‌کند. شکل زیر این موضوع نشان داده شده است.

بر اساس بیان بالا، نتیجه می‌گیریم: هرگاه خطی‌سازی در سکون منجر به عددی منفی گردد، می‌توان با قاطعیت گفت که پایداری نمایی داریم. و حتی برعکس آن نیز درست است، یعنی، اگر خطی‌سازی منجر به عددی منفی نگردد، مثلاً صفر یا مثبت گردد، حتماً پایداری نمایی نداریم. حتی بیش از این نیز می‌توان نتیجه گرفت که اگر مثبت شد، حتماً ناپایداری داریم.

تنها هنگامیکه نتیجه صفر می‌شود، نمی‌توان هیچ داوری‌ای دربارهٔ پایداری یا ناپایداری نمود ولی با این حال البته می‌توان نتیجه گرفت که پایداری نمایی قطعاً نداریم!



شکل ۵

تمرین - با کمک خطی‌سازی در سکون دربارهٔ نوع آن برای سامانه‌های زیر هر داوری‌ای که می‌توان، انجام دهید. $\dot{x} = x^2 + u$ و $\dot{x} = -x^2 + u$ برای $u = 0, 1, -1$

این خطی‌سازی از دیدگاه دیگری نیز قابل بیان است. با توجه به رفتار $f(x)$ دور و بر سکون، می‌توان گفت که گویی رفتار سامانه در همسایگی باندازهٔ کافی نزدیک سکون، نزدیک به رفتار همان خط مماس است. یعنی رفتار سامانه‌ی اصلی، نزدیک به رفتار سامانه‌ای خطی است با همان شیبی که به دست آورده‌ایم. در سامانه‌های مراتب بالاتر نیز به روش خطی‌سازی در سکون به همین داوری‌های مشابه می‌توان رسید. در حقیقت با خطی‌سازی به سامانه‌ای خطی می‌رسیم که رفتار سامانه‌ی اصلی در نزدیکی سکون، نزدیک به رفتار این سامانه‌ی خطی است و از روی این رفتار، به داوری دربارهٔ رفتار آن سامانه‌ی اصلی می‌پردازیم. تنها هنگامی نمی‌توان به داوری قاطعی درباره‌ی پایداری نمایی رسید که یک یا چند تا از شیب‌ها صفر گردد، مانند آنچه در بالا دیدید. این در چند متغیره به این معنی است که یک یا چند تا از مقادیر ویژه‌ی سامانه، صفر گردد. البته اگر حتی یکی از مقادیر ویژه مثبت گردد به آسانی داوری می‌کنیم که ناپایدار است و اگر همهٔ آنها منفی گردد داوری می‌کنیم که پایدار نمایی است.

تمرین - خطی‌سازی در سامانه‌های زمان‌گسسته، منجر به یک سامانه‌ی خطی زمان‌گسسته می‌شود که به تعداد مرتبهٔ سامانه، دارای مقادیر ویژه است. شرط‌های بالا که برای زمان‌پیوسته بیان گردید، برای هر یک از موارد: پایداری نمایی، ناپایداری و ناتوانی در اظهار نظر، چگونه خواهند بود؟

تمرین - سامانه‌ی گسسته‌ای که در بالاتر برای یافتن ریشه‌های $f(x) = 0$ ، بررسی کردید، در نظر گرفته و به روش خطی‌سازی در سکون، نشان دهید پایدار نمایی است.

سامانه‌های ناخودگردان (متغیر با زمان)

در تمام تمرین‌های بالا، سامانه‌هایی بررسی شد که نامتغیر با زمان بودند. بررسی سامانه‌های متغیر با زمان خطی و ناخطی از لطف بسیاری برخوردار است. در ادامه ابتدا چند نمونه خطی متغیر با زمان مرتبه‌ی اول را مورد توجه قرار می‌دهیم. شکل کلی به صورت $\dot{x} = a(t)x + u$ قابل بیان است. اگر ورودی را غیرصفر بگیریم، کار کمی پیچیده می‌شود. در واقع گویی سکون نیز با زمان در حال تغییر خواهد بود ولی اگر ورودی را صفر بگیریم، تنها یک سکون در صفر خواهد بود.

بد نیست یک اصطلاح مهم را همین‌جا بیاموزیم. اگر هر سامانه‌ی متغیر با زمان در یک زمان خاص، مثلاً (t_1) نگه‌داشته شود، سامانه‌ای می‌تواند در نظر گرفته شود که نامتغیر با زمان است. به این سامانه‌ی جدید نامتغیر با زمان، سامانه‌ی «نگه‌داشته» (frozen) گفته می‌شود.

یکی از موضوعاتی که بسیار مورد مطالعه قرار گرفته ارتباط دادن رفتار این سامانه‌های نگه‌داشته شده در زمان‌های گوناگون با رفتار سامانه‌ی اصلی است. مثلاً این پرسش ساده مطرح شده است که اگر همه‌ی سامانه‌های نگه‌داشته شده‌ی درآمده از یک سامانه‌ی متغیر با زمان، پایدار باشند آیا می‌توان نتیجه گرفت که سامانه‌ی اصلی متغیر با زمان نیز پایدار است؟! در راستای پاسخ به این پرسش پژوهش‌های فراوانی شکل گرفته است.

پاسخ این پرسش برای سامانه‌های مرتبه‌ی اول این است که اگر همه‌ی نگه‌داشته‌ها پایدار باشند، حتماً سامانه‌ی اصلی نیز پایدار است. حال جالب توجه این است که این موضوع برای سامانه‌های مراتب بالاتر قطعی نبوده و اگر حتی همه‌ی نگه‌داشته‌شده‌ها پایدار باشند لزومی ندارد که سامانه‌ی اصلی پایدار باشد که این موضوع را جلوتر، هنگام رفتارشناسی سامانه‌های مراتب بالاتر بیشتر مورد بررسی قرار خواهیم داد. اما جالب‌توجه‌تر این است که در سامانه‌های مرتبه‌ی اول می‌توان مواردی را داشت که با اینکه سامانه‌های نگه‌داشته برخی یا حتی همگی ناپایدارند ولی سامانه‌ی اصلی پایدار است. در ادامه نمونه‌هایی را در تمرین‌ها توجه می‌کنیم که این موضوعات را تا حدودی مطرح می‌کند.

تمرین - الف - مستقیم بر اساس تعریف، پایداری مجانبی سامانه‌ی $\dot{x} = -t^2 x + u$ را برای سکونی که با $u = 0$ بوجود می‌آید، ثابت کنید. این پایداری یکنواخت است؟ ب- بر اساس تعریف، ناپایداری را برای $\dot{x} = t^2 x + u$ ثابت کنید. ج- حال با حل تحلیلی دوباره پایداری مجانبی را برای سامانه‌ی الف و ناپایداری را برای سامانه‌ی ب اثبات کنید. د- درباره‌ی پایداری نمایی سامانه‌ی الف داوری کنید.

تمرین - قضیه: ثابت کنید برای هر سامانه‌ی مرتبه‌ی اول چنانچه همه‌ی نگه‌داشته‌هایش پایدار باشد آنگاه خودش نیز پایدار است.

تمرین - با یک نمونه نشان دهید حتی اگر همه‌ی نگهداشته‌های یک سامانه‌ی مرتبه‌ی اول ناپایدار باشند، ممکن است خودش پایدار باشد. راهنمایی: نمونه‌ی $\dot{x} = e^{-t} x + u$ را در نظر بگیرید.

تمرین - سامانه‌ی $\dot{x} = (6t \sin t - 2t)x + u$ برای $u = 0$ (از کتاب آقای Vidyasagar صفحه‌ی ۱۳۹) را در نظر بگیرید. نشان دهید پایدار است ولی نایک‌نواخت و بازای هر ε و t_0 ، δ را بر حسب آنها بدهید. توجه کنید که در این نمونه، نگهداشته‌هایش برخی پایدار و برخی ناپایدارند.

تمرین - سعی کنید شرط کلی برای پایداری سامانه‌ی کلی $\dot{x} = a(t)x$ ، به دست دهید.

رفتارشناسی سامانه‌های مرتبه‌ی دوم

همانگونه که پیشتر نیز اشاره گردید، رفتارشناسی و به ویژه تشخیص پایداری و انواع آن در مراتب بالاتر به سادگی آنچه در مرتبه‌ی اول داده شد، نمی‌باشد. شاید مهمترین چالش از آنجا آغاز می‌گردد که فاصله از سکون فقط به رفتار یک متغیر بستگی ندارد بلکه دو یا چند متغیرند که ایفای نقش می‌کنند. در تک متغیره نزدیک‌شوندگی و یا دور شوندگی از سکون همان چیزی است که از روی یک f معین می‌شود و این امکان ندارد که در یک همسایگی که سکون تنهاست، بدون گذر از سکون از بخشی که نزدیک‌شوندگی دارد به بخشی که دورشوندگی دارد، رفته شود و یا برعکس.

به این ترتیب با یک بار دیدن اینکه نزدیک‌شوندگی از هر دو طرف سکون برقرار است یا حداقل دورشوندگی ندارد، فوراً و بدون تردید می‌توان به داوری رسید که پایداری دارد. و این نیز فقط با دیدن علامت یک تابع تک متغیره‌ی ساده انجام می‌گیرد. این درحالی است که در دو متغیره چنین نیست که در یک همسایگی تنها از سکون نشود از بخشی که نزدیک‌شوندگی دارد به بخشی رفت که دورشوندگی دارد و یا برعکس! این باعث می‌شود که با دیدن علامت مربوط به فاصله نتوان به داوری رسید. باسانی رخ می‌دهد که علامت سرعت فاصله در یک همسایگی هم نزدیک‌شونده است و هم دورشونده است ولی نمی‌توان داوری کرد که بالاخره پایداری دارد یا ناپایداری! چراکه درست است که ممکن است از بخش دورشونده آغاز شود ولی ممکن است در ادامه به بخش نزدیک‌شونده رود و آنقدر در بین این بخش‌ها جابجا گردد و نهایتاً هم معلوم نیست که بیشتر نزدیک می‌شود یا بیشتر دور شده و یا هیچکدام! این چالش اصلی‌ای است که باعث می‌شود در چند متغیره نتوان از روی علامت تابع فاصله، به داوری در رفتار رسید. از همین جاست که سادگی کار از بین می‌رود. برای درک بهتر تمرین زیر را پیشنهاد می‌دهیم.

تمرین - سامانه‌ی دو متغیره‌ی

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

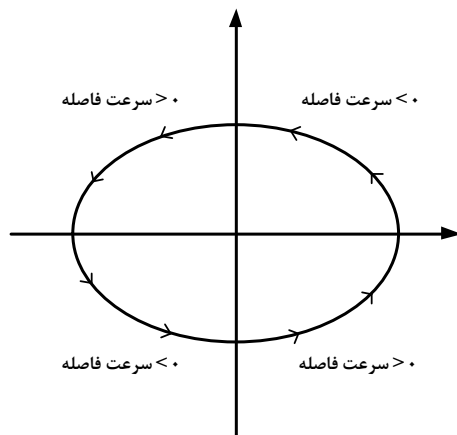
را در نظر گرفته و الف- ابتدا تابع فاصله از سکون $(0,0)$ را به دست آورده و نشان دهید سرعت آن را در یک همسایگی دلخواه، به صورت $\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) = 2(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2) = 2(-3x_1x_2 + x_2x_1) = -4x_1x_2$

می‌توان نوشت. ب- حال با تعیین علامت آن در یک همسایگی دلخواه از سکون، نشان دهید که در ناحیه‌ی اول و سوم نزدیک‌شونده و در دو ناحیه‌ی دوم و چهارم دورشونده است. ج- حال سعی کنید با حذف t از معادلات حالت، معادله‌ای بین دو متغیر حالت مستقل از زمان به دست آورید و نشان دهید که مسیر حالت در صفحه‌ی x_1, x_2 بازای آغاز از مثلاً x_{10}, x_{20} به صورت بیضی با معادله‌ی زیر خواهد شد.

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{-3x_2}{x_1} \implies x_1^2 + 3x_2^2 = c_0 = x_{10}^2 + 3x_{20}^2$$

در شکل زیر برخی از این مسیرها نشان داده شده‌اند.

د- به این ترتیب نتیجه بگیرید که در این سامانه از هر حالت دلخواه غیر سکونی آغاز گردد، مسیری که طی می‌شود گاه نزدیک‌شوند و گاه دورشونده است و این نیز بگونه‌ای است که به نفع هیچکدام نیز پیش نرفته بلکه دور سکون تا ابد دور زده خواهد شد و فاصله به صفر نیز میل نخواهد نمود.



شکل ۶

این درحالی است که در سامانه‌ی تک متغیره، سرعت فاصله در یک همسایگی تنها از سکون (بی‌گذر از سکون)، فقط یک علامت دارد و بس! و دو بخش یکی مثبت و یکی منفی اساساً بی‌معنی است. چراکه:

$$\frac{d}{dt}(x^2) = 2x\dot{x} = 2xf(x)$$

که اگر بخواهد تغییر علامت بدهد ناچار است یا $f(x)$ و یا x گذر از صفر داشته باشند که این، به هر حال، یعنی گذر از سکون! درحالی‌که در دو متغیره، بدون گذر از سکون می‌تواند از بخشی که علامت مثبت است به منفی و برعکس برود مانند آنچه در تمرین بالا دیدید. به این ترتیب در تک متغیره با یک تعیین علامت ساده به داوری قطعی می‌رسیم ولی در چند متغیره نمی‌توان به داوری قطعی دست یافت.

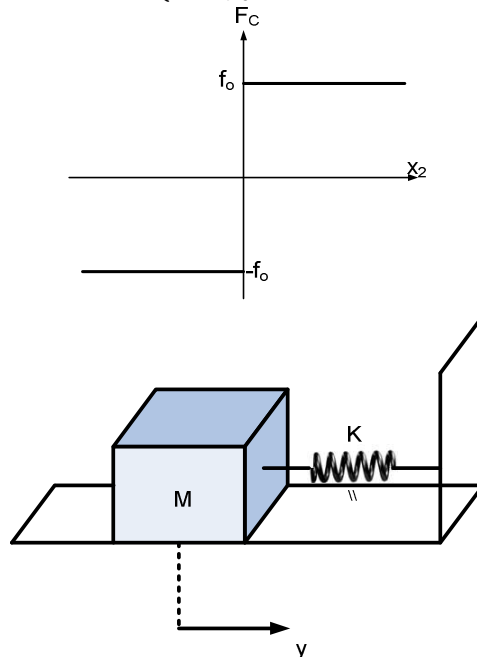
البته کاملاً روشن است که اگر سرعت فاصله در یک همسایگی نامثبت درآید یعنی در همه‌ی یک همسایگی‌ای دورشوندگی نداشته باشیم، آنگاه قاطعانه می‌توان گفت که پایداری برقرار است. ولی نمی‌توان از نبودن چنین همسایگی‌ای داوری نمود که حتماً ناپایداری دارد بلکه باید سکوت نمود و راهی دیگر برای داوری یافت. این درحالی است که در تک‌متغیره به آسانی پس از اینکه چنین همسایگی یافت نشد داوری می‌کنیم که ناپایدار است.

لذاست که نتیجه می‌گیریم: شرط $0.5 \frac{d}{dt}(x^T x) = x^T \dot{x} = x^T f(x) \leq 0$ ، در تک متغیره شرطی است کافی و لازم برای پایداری ولی برای چند متغیره، فقط شرطی کافی برای پایداری است ولی لزومی ندارد. در ادامه نمونه‌های متعدد دیگری می‌توانید ببینید که موضوع بالا را به رخ می‌کشند. بسیار آموزنده است که در ادامه در هر یک از نمونه‌ها به این چالش مهم توجه نموده و آن را مورد توجه و تحلیل قرار دهید.

روش حذف زمان و به دست آوردن معادله‌ی تغییری یک متغیر بر حسب دیگری روشی است که بویژه در دو متغیره می‌تواند بسیار کارا باشد. حتی در بسیاری موارد ممکن است مانند آنچه در تمرین بالا دیده شد، بتوان حلی بسته برای مسیر حالت به دست آورد. روشن است که با داشتن مسیر حالت شناخت بهتری از رفتار سامانه به دست می‌آید. در تمرین‌های زیر سعی در استفاده از این روش برای رفتارشناسی است.

تمرین - در این مسئله می‌خواهیم اثر اصطکاک ایستایی را در یک سیستم جرم فنر مورد بررسی قرار دهیم. رابطه اصطکاک با سرعت جسم را می‌توان به‌صورت شکل زیر نشان داد. در ضمن برای سرعت صفر (حالت ایستایی) می‌دانیم که اندازه اصطکاک می‌تواند هر مقداری تا نیروی معین f_0 اختیار کند. الف) نشان دهید می‌توان برای این سیستم معادلات حالت زیر را در نظر گرفت.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & ; x_1 &= y \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{F_c(x_2)}{m} & ; x_2 &= \dot{y} \\ F_c(x_2) &= \begin{cases} f_0 & x_2 > 0 \\ -f_0 \leftrightarrow f_0 & x_2 = 0 \\ -f_0 & x_2 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$



ب) در صفحه حالت، همه‌ی نقطه‌های تعادل را بر حسب f_0 و k تعیین کنید.

ج) به کمک معادله تغییر $\frac{dx_2}{dx_1}$ ، نشان دهید مسیرهای حالت برای x_2 های مثبت، بیضی هایی هستند به مرکز $(-\frac{f_0}{k}, 0)$ و برای x_2 های منفی، بیضی‌هایی هستند به مرکز $(\frac{f_0}{k}, 0)$ این مسیرها را برای محدوده‌ی مناسبی به صورت کیفی رسم کرده، جهت حرکت را نیز مشخص کنید.

د) دقیقاً استدلال کنید که کدامیک از نقاط تعادل پایدارند و در صورت پایداری از چه نوعی؟

روش ساده‌ی دیگری که می‌تواند مورد توجه قرار گیرد هنگامی است که بتوان هر دو متغیر حالت را نسبت به زمان حل نمود و سپس زمان را از حل حذف نموده و دو متغیر حالت را نسبت به هم به دست آورده و یا رسم کنیم.

تمرین - الف - ابتدا نشان دهید سامانه‌ی

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

دارای حل بسته‌ی $x_1 = x_{10} e^{-3t}$ و $x_2 = x_{20} e^t$ است. ب- با حذف t نشان دهید: $x_1 = x_{10} \left(\frac{x_2}{x_{20}}\right)^{-3}$

$$\implies x_1 = \frac{x_{10} x_{20}^3}{x_2^3} = \frac{c}{x_2^3}$$

ج- مسیر حالت را برای آغازهای $(x_{10} \neq 0, 0)$ و $(0, x_{20} \neq 0)$ شرح دهید.

د- چند مسیر حالت را برای نمونه رسم کنید و سپس درباره‌ی پایداری و ناپایداری سکون $(0,0)$ داوری کنید.

تمرین - همه‌ی مراحل تمرین بالا را برای سامانه‌های

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

اجرا کنید.

بردارهای ویژه و مقادیر ویژه مفاهیم بسیار مهمی هستند که در تحول حالت و رفتارشناسی سامانه‌های خطی نقش اساسی ایفا می‌کنند. برای ورود به داستان کافی است به یک پرسش پاسخ دهید. پرسش: آیا حالت‌هایی هست که اگر از آنجا آغاز گردد، حالت‌های بعدی در همان راستا باقی بمانند؟! به زبان عددی یعنی آیا (x_{10}, x_{20}) ای هست که پس از آن پاسخ سامانه به صورت $k(x_{10}, x_{20})$ با k های گوناگون باشد؟! برای تفکر در این باره کافی است به چگونگی تغییر توجه کنید $\dot{x} = Ax$. اگر قرار باشد که در راستای همان حالت بماند باید تغییری هم که در آن رخ می‌دهد در همان راستا باشد پس باید $Ax_0 = \lambda x_0$. به خوبی می‌دانید که این‌ها همان حالت‌هایی است که به نام بردارهای ویژه ماتریس A خوانده می‌شوند. ضرایب λ نیز به مقدارهای ویژه‌ی نظیر آن بردارها، نام‌گذاری شده‌اند. به این ترتیب یک رفتار ویژه‌ای در کار است.

حال بسته به A ، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه، صورت‌های گوناگون و پیرو آن رفتارهای گوناگونی می‌توانند به دست آیند. برای درک این‌ها لازم است تمرین‌های زیر به طور کامل حل گردد.

اگر هر دو مقدار ویژه حقیقی و متمایز باشند و هر دو نیز سمت چپی باشند، سکون **گره‌ی پایدار** نامیده می‌شود. اگر هر دو سمت راستی باشند، سکون، **گره‌ی ناپایدار خوانده** می‌شود. اگر یکی سمت چپی و یک راستی باشد، همانگونه که می‌دانید باز هم ناپایداری داریم و آن را سکون **زین‌اسبی** می‌گویند.

هنگامی که مقادیر به یکی از سه صورت بالا باشند، رسم مسیرهای حالت بسیار ساده است. چراکه می‌توان هر حالت را به دو مؤلفه‌ی روی دو بردار ویژه تجزیه نموده و سرنوشت هر یک را جداگانه در نظر گرفته و دوباره نتیجه را ترکیب نمود. به عنوان نمونه شکل‌های زیر را ملاحظه نمایید. در شکل ببینید که چون λ_1 از λ_2 بزرگتر است، کاهش در راستای آن بیشتر است. به همین ترتیب هنگامی که یکی مثبت و یکی منفی است، در راستای یکی افزایش و در راستای دیگری کاهش داریم و به همین دلیل مسیرها هیچگاه به سکون نمی‌رسند. به مسیرها وقتی دقیقاً از روی بردارهای ویژه آغاز می‌شوند نیز دقت کنید.

شکل ۷

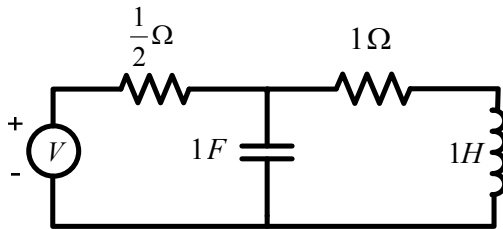
هرگاه مقادیر ویژه، حقیقی خالص نبوده و به صورت زوج مختلط باشند، دیگر مانند بالا، بردارهای ویژه‌ای به صورت حقیقی نخواهند بود بلکه بردار ویژه به صورت مختلط است که معنی آن نوعی مسیر دورانی است. این مسیر دورانی دور سکون رخ می‌دهد و یا شعاع دوران افزایش یافته و از آن دور می‌شود و یا کاهش یافته و به آن نزدیک می‌گردد. نزدیک‌شوندگی هنگامی است که بخش حقیقی منفی باشد و دورشوندگی هنگامی است که بخش حقیقی مثبت باشد. چنانچه بخش حقیقی صفر باشد، نوسانی کامل است و هرگز مجانبی به سکون نزدیک نمی‌گردد ولی پایداری دارد.

شکل ۸

تمرین - با روش‌هایی که در درس‌های دیگر آموختید، مقادیر و بردارهای ویژه را برای هریک از ماتریس‌های تحول حالت که در زیر داده شده است، به دست آورده و سپس با توجه به گفتگوهای بالا مسیرهای حالت را برای هر یک نمایش دهید.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

تمرین - مدار الکتریکی زیر را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) با در نظر گرفتن ولتاژ خازن (x_1) و جریان سلف (x_2) به عنوان متغیرهای حالت، معادلات حالت را بدست آورید.

ب) با در نظر گرفتن $v = 0$ ، مسیر حالت را با روشی که در بالا آموختید نمایش دهید.

تمرین - مدار سوال قبل را در نظر گرفته اما این بار مقاومت ۱ اهمی را با مقاومت ناخطی که دارای رابطه‌ی زیر می‌باشد جایگزین می‌کنیم.

$$v_r = i_r^3 - 3i_r^2 + 3i_r =: f(i_r)$$

الف) با در نظر گرفتن ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیرهای حالت، معادلات حالت را بنویسید.

ب) نقاط تعادل مدار را در حالت ورودی صفر بررسی کنید.

ج) با خطی سازی حول هر نقطه تعادل، رفتار در نزدیکی آنها را بیان کنید.

تمرین - معادله زیر در سامانه‌های بیولوژیکی به معادلات درنده-شکار معروف است .

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(\alpha - \beta x_1) \\ \dot{x}_2 &= -x_2(\gamma - \delta x_1) \end{aligned}$$

که در آن x_1 تعداد درندگان (به عنوان مثال تعداد گرگ ها) و x_2 تعداد شکارها (به عنوان مثال تعداد خرگوش ها) می‌باشد تمامی پارامترهای سیستم را یک در نظر گرفته و در صورت امکان با روش خطی سازی رفتار در حول و حوش تعادل را توضیح دهید.

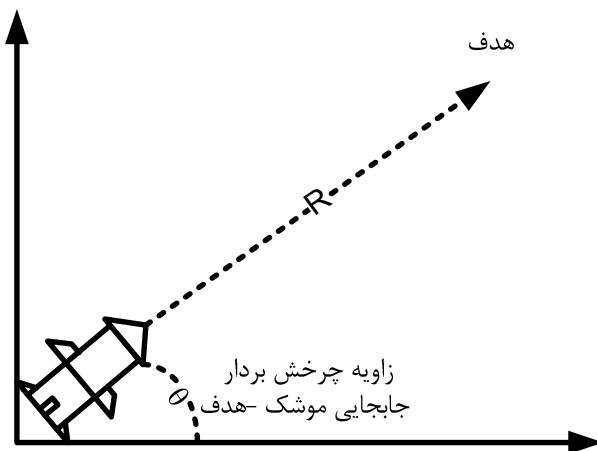
هرگاه یک متغیر حالت سرعت دیگری باشد و لذا در صفحه‌ی حالت شما سرعت را بر حسب خود متغیر در نظر می‌گیرید، اصطلاحاً به آن «صفحه‌ی فاز» گفته می‌شود. در تمرین زیر شما به این مورد برمی‌خورید. در حقیقت هرگاه شما شتاب و سرعت یک متحرک را در یک صفحه بر حسب هم داشته باشید، صفحه‌ی فاز دارید یا همین‌گونه است هنگامی که سرعت را بر حسب مکانش در نظر می‌گیرید.

در تمرین زیر یک نکته‌ی آموزنده‌ی دیگری نیز هست. معمولاً هنگامی که مرتبه‌ی سامانه از دو بیشتر می‌شود، رسم مسیر حالت مورد توجه قرار نگرفته و دیدن مسیر به صورت دو بعدی را رها می‌کنند. این درحالی است که همواره می‌توان دو راه را پیش گرفت. اول اینکه تصویر مسیر حالت را در صفحه‌ی هر دو متغیر دلخواه حالت نظاره کرد. دوم اینکه مانند تمرین آتی، می‌توان یکی از متغیرها را نگه‌داشته و موقتاً ثابت گرفته و سپس صفحه‌ی حالت را برای دو متغیر دیگر مورد بررسی قرار داد. چنانچه این روش‌ها به صورت حرفه‌ای و با نگرشی همه‌جانبه به کار گرفته شود، می‌تواند بسیار نتایج آموزنده و کارایی دارد. اگر تمرین بعدی را به دقت حل کنید و سعی کنید رفتارشناسی همه‌جانبه‌ای بیابید، این کارایی را در خواهید یافت.

تمرین - معادلات حرکتی تعقیب و گریز در صفحه دو بعدی به صورت زیر می‌باشد.

$$\ddot{R} = r^2 R + (a_{t1} - a_{m1}) \quad , r = \dot{\theta}$$

$$\dot{r} = \left(-\frac{2\dot{R}}{R}\right)r + \frac{a_{t2} - a_{m2}}{R}$$



که در آن $a_t = [a_{t1} \ a_{t2}]$ بردار شتاب هدف، $a_m = [a_{m1} \ a_{m2}]$ بردار شتاب موشک، R فاصله موشک تا هدف و r نرخ چرخش زاویه بردار جابجایی موشک-هدف می‌باشد. حال فرض کنید هدف مورد نظر برای اصابت ثابت و یا حداقل دارای سرعت ثابت باشد آنگاه می‌توان بردار شتاب آن را صفر در نظر گرفت. و همچنین فرض کنید a_{m1} صفر باشد. معادلات به صورت زیر خواهد شد.

$$\ddot{R} = r^2 R$$

$$\dot{r} = \left(-\frac{2\dot{R}}{R}\right)r - \frac{a_{m2}}{R}$$

اکنون برای درک ابتدایی داستان r را ثابت در نظر بگیرید. لذا معادلات به صورت زیر خلاصه می‌شوند.

$$\ddot{R} = r^2 R$$

اکنون به ازای r های ثابت مختلف درباره رفتار کیفی این سامانه بحث کنید. (با رسم صفحه فاز $\dot{R}$ بر حسب R) برای سادگی بیشتر شرایط اولیه را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$R(0) = R_0 > 0$$

$$-\dot{R}(0) = V_{cl}(0) > 0$$

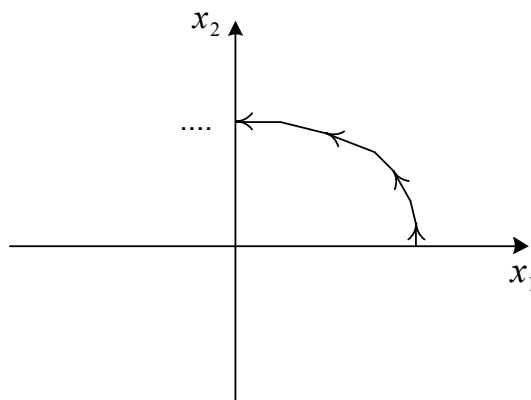
(این شرایط اولیه به این معناست که هدف جلوی روی موشک است و موشک به گونه‌ای پرتاب می‌شود که موشک در حال نزدیک شدن به هدف است و ادا شرایط اولیه درگیری از ربع چهارم است).
با استفاده از صفحه فازی که رسم نموده اید تحلیل کنید که با چه شرایط اولیه‌ای برخورد صورت می‌گیرد. راهنمایی: (در حالت برخورد مقدار نهایی R صفر خواهد شد و در حالت عدم برخورد R غیر صفر خواهد شد).

روش عمومی برای رسم مسیرهای حالت

روش‌های گوناگونی که تاکنون برای رسم مسیرهای حالت گفتگو شد، هیچکدام عمومی نبود و هر یک در شرایطی می‌توانستند مفید باشند. ولی اگر از همان چگونگی سرعت تغییر در هر حالت استفاده گردد، می‌توان با دست نیز برای حالت دو متغیر رسم نمود و رفتارشناسی دقیقی نیز داشت هرچند یک حل بسته‌ای به دست نمی‌آید.

هرگاه شما در f که بردار f ها نشسته است، $\underline{x}$ را جاگذاری کنید، برداری به دست می‌آید که راستا و جهت یعنی مسیر (یا شیب) حرکت حالت بعدی را نشان می‌دهد. حال کافی است در همین مسیر، کمی پیش رفته و حالت بعدی را به دست آورد و سپس دوباره این کار را برای جای جدید به دست آمده، تکرار نمود و به همین ترتیب آرام آرام مسیر حالت را دید و رسم نمود.

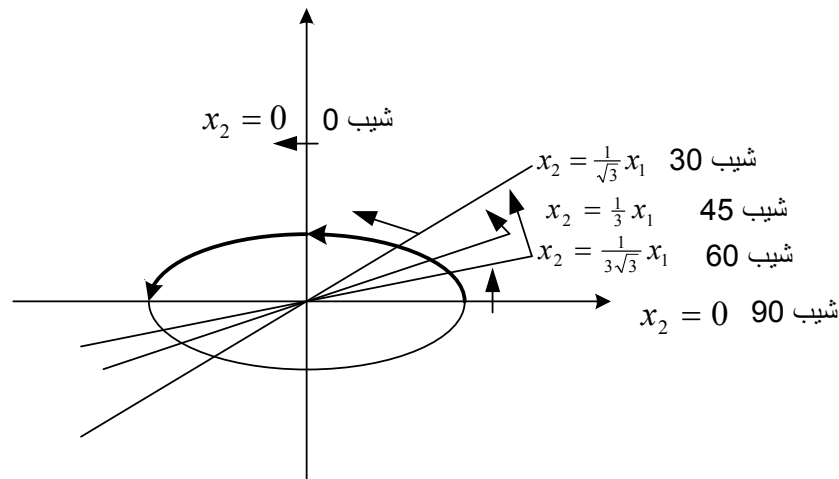
تمرین- برای همان نمونه‌ی نوسانی کاملی که داستان این بخش را با آن آغاز نمودیم، از حالت $(1,0)$ آغاز نموده و نشان دهید شیب، درست به سمت بالاست. حال به اندازه‌ی 0.1 بالا رفته و در حالت $(1,0.1)$ دوباره شیب را به دست آورده به بردار $(-0.3,1)$ برسید که شیبش 0.3- و به سمت بالا و کمی چپ است. این کار را با همان گام‌های 0.1 ادامه دهید تا شکلی مانند زیر به دست آید.



شکل ۹

روش بالا را می‌توان توسعه داد به این ترتیب که کلیه‌ی نقاطی را تعیین کنیم که دارای شیب‌های یکسان هستند. این نقاط منحنی‌ای را می‌سازند که اصطلاحاً خط هم‌شیب نامیده می‌شود. سپس سعی می‌گردد تا شیب‌های گوناگون در نظر گرفته شود و خط‌های هم‌شیب گوناگون به دست آیند. حال هنگامی که برای شیب‌های گوناگون این خط‌ها را داشته باشیم می‌توان از یک نقطه آغاز و با توجه به شیب‌ها مسیر را بطور تقریبی رسم نمود.

تمرین - برای نمونه‌ی بالا خط‌های هم‌شیب با شیب‌های $0, 1, -1, \infty, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \pm \sqrt{3}$ را به دست آورده و دوباره سعی کنید مسیرهای حالت گوناگونی را مشابه شکل زیر به دست آورید.



شکل ۱۰

تمرین - می‌خواهیم با استفاده از روش منحنی‌های هم شیب اقدام به نمایش مسیر حالت کنیم. برای سامانه‌های زیر این کار را انجام دهید.

(الف)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \end{aligned}$$

تمرین - برنامه‌ای در نرم‌افزار *MATLAB* بنویسید که بتواند با حل معادله‌ی تغییراتی به روش عددی، مسیر حالت را نمایش دهد و با رسم مسیر حالت سامانه‌های تمرین‌های گذشته، درستی آنها را مورد بررسی قرار دهید.

روش مشهور به روش مستقیم لیاپانوف درباره‌ی پایداری

دیدیم و دیدید که پایداری یک سکون چیزی نیست جز قسمت مهمی از رفتارشناسی دور و بر آن سکون به لحاظ اینکه در هر فاصله‌ی دلخواهی از آن (هرچند نزدیک و نزدیک‌تر) می‌تواند باقی بماند یا خیر؟! پاسخ به این پرسش نام تحلیل پایداری به خود گرفت. تاکنون روشی که برای این تحلیل پیش گرفتیم مستقیماً از روی رفتار فاصله بود. یعنی به رفتار تابع فاصله از سکون دقت کردیم و دیدیم که این برای سامانه‌های تک متغیره بسیار کارآمد بود و ما را به شرط لازم و کافی رساند. ولی برای دو متغیره دیدیم که رفتارشناسی تابع فاصله نمی‌تواند شرط لازم و کافی بدهد و در نتیجه نمی‌تواند ما را به داوری قاطعی سوق دهد. البته دیدیم که اگر همواره کاهشی باشد روشن است که پایداری نتیجه خواهد شد ولی اگر در بخشی از فضا کاهشی و در بخش دیگر افزایشی باشد آنگاه داوری نمی‌توان داشت و لازم است به گونه‌ای دیگر به داوری قاطعی دست یافت.

دقت کنید، اینکه بتوان فقط با یک تعیین علامت، تکلیف پایداری را روشن نمود، بسیار تحریک‌آمیز است. ولی همان‌گونه که در بالا آمد، متأسفانه این فقط در تک‌متغیره میسر و ما را به یک داوری قاطعی می‌رساند. اما این موضوع تحریک‌آمیز برخی را به این رهنمون نمود که شاید بتوان بجای تابع فاصله، تابع دیگری یافت که همچنان این نقش را ایفا کند.

به عبارت دیگر، انگیزه این شد که اگر می‌بینیم تابع فاصله، گاه کاهشی و گاه افزایشی است و لذا ما را به داوری نمی‌رساند، جستجو کنیم ببینیم شاید بتوان تابع شبه‌فاصله مناسبی یافت که این بار همه‌جای یک همسایگی از سکون فقط کاهشی (نافزایشی) باشد و از آنجا بتوان پایداری آن سکون را نتیجه گرفت. در کنار این داستان داستان دیگری نیز در بسیاری از سامانه‌های مکانیکی ملاحظه می‌شد و آن هم اینکه انرژی مکانیکی در سکون کمینه می‌شود و لذا در اطراف آن، تابع انرژی، تابعی است که کاهشی و یا حداقل نافزایشی است. به این ترتیب تابع انرژی در آن سامانه‌ها کاندیدای خوبی بجای تابع فاصله جلوه می‌کرد و از همین جا بود که امید اینکه بتوان بجای تابع فاصله توابع دیگری را یافت که همان نقش را در سکون‌های پایدار ایفا کنند، قوت گرفت.

همه‌ی آنچه گذشت، انگیزه‌ای شد تا عده‌ای برآن شدند تا این موضوع را همه‌جانبه بپردازند و ریاضیات دقیقی را توسعه دهند.

نکته‌ی اساسی این است که این تابع که کاندیدایی خواهد بود تا بجای تابع فاصله، تحت آزمون کاهشی (نافزایشی) بودن یا نبودن باید قرار گیرد، چه ویژگی‌ای داشته باشد تا بتوان از آن نتیجه‌ی پایداری‌ای را گرفت که می‌دانیم به فاصله مربوط است. از همین جا مشخص است که نافزایشی بودن کاندیدا در همه‌ی یک همسایگی‌ای از سکون، به هر حال باید ما را به محدود ماندن فاصله در کرانی معین مطمئن کند هرچند تابع

فاصله، خود در آن کران، بین افزایش و کاهش بازی کند. در شکل زیر برای عبارتی که آمد، نمایشی آمده است.

شکل

تمرین - الف - برای همان نمونه نوسانی کامل، تابع فاصله به توان 2 را بر حسب زمان رسم کنید. ب - تابع $W(x) = x_1^2 + 3x_2^2$ را نیز بر حسب زمان رسم کنید.

پس مثلاً اگر این تابع، بزرگتر از فاصله باشد، نافزایشی بودن آن برای همه مسیرهای ممکن حالت، می تواند محدود ماندن فاصله را تضمین کند چراکه فاصله، پایین تر از آن است و لذا بالا نرفتن آن یعنی محدود ماندن فاصله! هرچند فاصله در طی این مسیرها بالا و پایین رود. در واقع به این ترتیب مطمئن می شویم که این بالا و پایین رفتن ها، در مجموع، باعث از حد خارج شدن فاصله نخواهد شد. حال کافی است یک کار ساده کننده دیگر را نیز در نظر بیاوریم. دقت کنید که هر تابعی که با افزایش فاصله، افزایش و با کاهش اش کاهش یابد (یعنی با فاصله یکنوا باشد)، نیز می تواند جایگزین فاصله باشد. به این ترتیب لازم نیست تابع کاندیدای ما بزرگتر از فاصله باشد بلکه کافی است از تابع یکنوایی از فاصله بزرگتر باشد. توجه کنید که این شرط بسیار ساده کننده است!! مثلاً دقت کنید که: درست است که تابع یکنوای با فاصله با افزایش فاصله باید افزایش یابد، ولی نیاز نیست با به بی نهایت میل کردن فاصله، آن تابع نیز به بی نهایت میل کند. مثلاً تابع زیر را در نظر بگیرید

$$W(x) = 1 - e^{-||x||}$$

در شکل زیر نمایش این تابع بر حسب فاصله آمده است.

شکل

لذا این تعریف به دلیل به درد بخور بودنش نام ویژه‌ای گرفته است. به چنین توابعی که از تابع یکنوای افزایشی‌ای از فاصله، بالاترند، «مثبت مطلق» (*positive defenit*) یا به اختصار *pd* گویند.

اگر تابع یکنوایی مانند α گیر بیاید که

$$V(t, x) > \alpha(\|x\|) \quad \forall t \geq 0, \quad x \in B_r$$

آنگاه V را تابع مثبت مطلق (*pdf*) در فضای حالت x می‌گویند. اگر فقط در محدوده یک همسایگی r ، چنین باشد آن را مثبت مطلق محلی (*lpdf*) گویند.

جالب این است که برای آزمون برقراری این شرط لزومی ندارد کار زیادی انجام داد و کار بسیار ساده است و فقط کافی است تابع مذکور، پیوسته و در $x = 0$ ، صفر باشد ولی در بقیه جاها مثبت باشد. البته برخی ملاحظات ساده دارد که برای دقیق بودن ابتدا این آزمون را برای نامتغیر با زمان و محلی می‌نویسیم:

$$W(0) = 0, \quad W(x \in B_r) > 0$$

برای فراگیر بودن، علاوه بر این‌ها باید مراقب بود که بازای افزایش فاصله، W به سمت صفر میل نکند! یعنی باید کران پایین آن، بالای صفر باشد. این تضمین می‌کند تا بتوان تابعی زیر آن یافت که تا انتها بطور یکنواخت افزایشی باشد. اگر W علاوه بر این‌ها، بازای افزایش فاصله، به بی‌نهایت میل کند، آن را بی‌کران فاصله‌ای گویند. در شکل زیر این موارد نشان داده شده‌اند.

شکل

در شکل، نمایشی از $W(x)$ بر حسب فاصله $\|x\|$ نمایش داده شده است درحالی‌که W تابعی از فضای حالت n بعدی x به فضای تک‌بعدی R^+ است. چون این نمایش بسیار بدردبخور است باید کمی بیشتر شرح داده شود. دقت کنید که نگاشت $W(x)$ یک تابع است ولی نگاشت $W(\|x\|)$ ظاهراً بی‌معنی است. اما منظور ما از این چیست؟! برای درک آن، ابتدا توجه می‌دهیم که این نگاشت تابع نیست بلکه فقط یک رابطه است. نگاه کنید که بازای یک فاصله معین $\|x\| = c$ تعداد بی‌شمار حالت به دست می‌آیند که چنین فاصله‌ای دارند و یا به عبارت دیگر، معکوس تابع فاصله به هیچ‌وجه یک تابع نبوده و بی‌شمار پاسخ دارد (مگر در فضای

تک متغیره! مثلاً در فضای R^2 تمام نقاط یک دایره به شعاع c و در فضای R^3 تمام نقاط روی یک کره با همین شعاع خواهد بود.

حال هر یک از این بی‌شمار حالت وقتی وارد تابع W گردند، می‌توانند مقادیر متنوعی نتیجه دهند. پس در حالت کلی بازای یک c داده شده مقادیر متعددی برای W به دست می‌آید. به این ترتیب ما با یک رابطه و نه یک تابع مواجهیم. لذا نمایش آن نیز بصورت آمده در شکل بالا خواهد بود. اما همین نمایش کمک بسیاری در فهم هر چه بهتر موضوع این بخش خواهد نمود.

تمرین - در تمرین ... W را بر حسب $\|x\|$ رسم کنید.

حال بیایید ببینیم برای اینکه از همسایگی ε داده شده، بیرون نرویم، چه همسایگی آغازین δ را باید با توجه به W پیشنهاد کنیم؟! کافی است ببینیم بازای آن ε ، کران پایین W چیست؟ برای این نیز کافی است توجه کنیم که W همواره از α کوچکتر است و لذا $\alpha(\varepsilon)$ کران پایینی را برای $W(x \in B_\varepsilon)$ می‌دهد. پس اگر همسایگی آغاز (یعنی δ) را بگونه‌ای بگیریم که حداکثر W در آن همسایگی، از این کران پایین کوچکتر باشد، آنگاه با توجه به اینکه قرار است W نافزایشی باشد، پس خیالمان آسوده می‌شود که فاصله نیز نمی‌تواند از ε تجاوز نماید و در نتیجه حالت نیز از این همسایگی بیرون نمی‌رود. برای درک این داستان شکل زیر می‌تواند کمک کند.

شکل

تنها نکته‌ای که باید توجه نمود این است که در استدلال بالا فرض کرده‌ایم همواره همسایگی δ گیر می‌آید که حداکثر W در آن، کوچکتر از آن کران پایین باشد! حقیقت این است که این فرض درست است و این نیز از دو حقیقت صفر بودن W در صفر و پیوستگی‌اش نتیجه می‌شود.

تمرین - با استفاده از $W(0) = 0$ و پیوستگی W ، استدلال کنید که مسئله

$$\sup W(x \in B_{\delta=?}) < \alpha \quad \alpha > 0$$

همواره پاسخی برای δ خواهد داشت. این موضوع را سعی کنید در شکل بالا به صورت نمایش هندسی نیز استدلال کنید.

به این ترتیب قضیه آینده را می‌توانید خودتان اثبات کنید.

قضیه: چنانچه تابع پیوسته و مشتق‌پذیر و محلی مثبتِ مطلق $V(t \in R^{+,0}, x \in R^n) \rightarrow R$ یافت شود که در همه حالات‌های ممکنِ x در یک همسایگیِ r و برای هر زمان آغازین دلخواه t_0 ، نافزایشی باشد یعنی $\dot{V}(t, x) \leq 0, \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x \in B_r$ می‌توان نتیجه گرفت که سکونِ 0 پایدار است.

شکل زیر برای اثبات کمک می‌کند.

قضیه: اگر تابع V بازای زمان کراندار نیز باشد، پایداری یکنواخت است.

قضیه: اگر $\dot{V}$ ، محلی مثبت مطلق نیز باشد، پایداری مجانبی نیز هست.

تمرین- قضایای بالا را با ترسیم شکل مناسب و همراه با استدلال هندسی و نیز استدلال عددی ثابت کنید.

۱- ساده‌سازی شرط‌های کافی برای پایداری مجانبی

۲- قضایای اثبات ناپایداری به روش بالا

۳- پایداری سامانه‌های خطی با روش بالا

۴- طراحی تنظیم‌کننده‌های خطی برای سامانه‌های ناخطی با نگاهی به خطی‌سازی حول سکون

۵- قضیه دایره، ابزاری برای کنار هم قرار دادن دو الگوی خطی و ناخطی که بسیاری از سامانه‌ها در واقع چنین‌اند!

۶- ساده‌ترین کنترل‌کننده مبنایی برای یک طراحی به نام مود لغزشی

۷- توابع توصیفی و بهره‌مانند

(۴) طراحی تنظیم‌کننده‌های خطی برای سامانه‌های ناخطی با نگاهی به خطی‌سازی حول سکون

$$\dot{x} = f(x, u = v - n), \quad z = x + d$$

در اینجا v و y به ترتیب ورودی و حالت واقعی در دسترس هستند. در مقابل u و x ورودی و حالتی هستند که شناخت ما از سامانه یعنی f بازای آنها صدق می‌کنند که لزومی ندارد با واقع تطابق داشته باشند! روشن است که این عدم تطابق با واقع با دو متغیر n و d نمایش داده شده‌اند.

و اما برای هر حالت سکون مانند (x_d, u_d) می‌توان یک تنظیم‌کننده به کمک اقدام تناسبی علیه خطا طراحی نمود. در واقع در اینجا هدف این است که z به x_d برود و تا جاییکه می‌شود در آنجا بماند. پس به نظر می‌رسد که سیاست کنترلی‌مان به صورت زیر است.

$$v = K(z - x_d)$$

تمرین- این سیاست یک اشکالی دارد که سعی کنید آن را بگویید.

حل: بیایید این سیاست را اعمال کنیم ببینیم تحولات چگونه می‌شود؟ حتی اگر در بهترین شرایط $n = 0$ و $d = 0$ باشد داریم:

$$\dot{x} = f(x, K(x - x_d))$$

حال اگر در بهترین وضعیت x به x_d برسد، آنگاه به دست می‌آید:

$$\dot{x} = f(x_d, 0) \neq 0$$

که این انتظار ما نبود و لیباید نگران بود چراکه ما می‌دانیم: $f(x_d, u_d) = 0$. برای رسیدن به این کافی است در سیاست‌مان کاری کنیم که پس از رسیدن حالت به سکون مورد خواسته‌مان، ورودی نیز به ورودی نظیر آن سکون میل کند. پس باید این را نیز به ورودی اضافه کنیم. لذا سیاست درست‌تر می‌شود:

$$v = K(z - x_d) + u_d \rightarrow \dot{x} = f(x, K(z - x_d) + u_d - n) = f(x, K(x + d - x_d) + u_d - n)$$

حال اگر ورودی‌های نایقینی را موقتاً صفر بگیریم، شاید مناسب‌تر این باشد که تغییرات را در این طراحی به روش خطی‌سازی در سکون رفتارشناسی نمود. خطی‌سازی در سکون چیزی نیست جز به دست آوردن تقریب مرتبه اول تغییرات و این نیز یعنی بسنده کردن به جمله اول بسط مک‌لورانِ چگونگی تغییرات (f).

$$f \cong \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_d, u_d)} (x - x_d) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x_d, u_d)} (u - u_d) = A\delta x + B\delta u$$

پس سامانه خطی که قرار است رفتار سامانه را در نزدیکی سکون مورد نظر تقریب بزند، به صورت زیر به دست می‌آید.

$$(\dot{x} - \dot{x}_d) \cong A(x - x_d) + B(K(x - x_d) + Kd - n + u_d - u_d)$$

$$\dot{e}_d \cong (A - BK)e_d + (BKd - Bn)$$

البته این معادلات خطا، فقط هنگامی صحیح است که شما x_d را ثابت گرفته باشید یعنی $\dot{x}_d = 0$. بسیار توجه کنید که این معادلات فقط یک تقریب است و نباید هرگز فکر کنید که همه داستان را دربر دارد. اما نکته اصلی این است که اگر این سامانه تقریبی خطی پایدار نمایی باشد می‌توان نتیجه گرفت که سامانه اصلی نیز در این سکون پایدار نمایی است. این نتیجه در عین سادگی از اهمیت بسیار بالایی در کاربردهای واقعی برخوردار است. به این ترتیب کافی است همانگونه که در سامانه‌های خطی برای جفت (A, B) کار طراحی را پیش می‌برید، برای جفت مشابه آن در ناخطی نیز کار را پیش ببرید.

دقت کنید که چنانچه بخواهید این سیاست را برای همه حالت‌های سکون به کار ببرید، لازم است هر گاه حالت سکونی که می‌خواهید روی آن تنظیم صورت گیرد، تغییر می‌دهید حتماً ورودی متناظر با آن حالت را نیز تغییر دهید. به عبارت دیگر تغییر سکون باید به صورت زوج (x_d, u_d) صورت پذیرد. لذا اگر x_d را مبنای تغییر بدانیم، آنگاه u_d را نیز تابعی از آن باید دانست. حال پرسش خوب و جالبی رخ می‌نماید این است که در این گذر از یک سکون دیگر رفتار چگونه خواهد بود؟!

اولاً باید توجه داشت که جفت (A, B) بازای هر سکون به دست می‌آید و لذا از یک سکون به سکون دیگر می‌تواند تغییر کند و شاید بهتر باشد زیرنویسی برای آنها گذارد و به صورت جفت (A_d, B_d) نوشت. حال توجه می‌کنیم که بسطی که برای تقریب مرتبه اول f بکار رفت، برای همه سکون‌ها حتی اگر در حال تغییر باشند نیز معتبر است بشرط اینکه u_d ی مربوطه نیز تغییر داده شده باشد.

اما باید توجه داشت که در طرف دیگر فقط $\dot{x}$ است و نه $\dot{x} - \dot{x}_d = \dot{e}$. لذا کافی است برای رسیدن به عبارت کامل برای تغییرات خطا، $\dot{x}_d$ افزوده شود. در شکل اخیر، داستان از مسئله رسیدن و ماندن در یک مقدار ثابت به مسئله پیروی یک مقدار متغیر با زمان تبدیل شده است.

$$\dot{e}_d \cong (A_d - B_d K_d) e_d + \dot{x}_d + (B_d K_d d - B_d n)$$

اما گذشته از اینکه مسئله کدامیک از این دو باشد، سامانه خطی تقریبی دارای عناصر ثابت با زمان نیست! هم پیش از اعمال بازخور K_d و هم پس از آن، ماتریس‌های مربوطه بازای حالتی که در آنیم، در حال تغییرند.

تمرین - برای فهم بهتر مطالب بالا خوب است به مسئله مفصل ولی ساده‌ای بپردازیم. ارتباط بین مسئله‌ی

تنظیم (Regulation) و حالت‌های تعادل یک الگو

- ۱- برای یک سیستم، الگوی تغییراتی مرتبه‌ی اول $\dot{x} = -x(x^2 - 1) + u$ ارائه گردیده است. نمایش بلوکی سیستم را به همراه این الگو و نایقینی‌های ممکن در ورودی و حالت واقعی ارائه کنید.
- ۲- تعادل‌های الگو را برای $u \equiv 0$ بدست آورده و در مورد نوع رفتار حول هر یک داوری کنید.
- ۳- به ازای $u \equiv u_0$ که $u_0 \in R$ (به ازای مقادیر گوناگون آن) در مورد تعادل‌های ممکن و نوع رفتار حول آن‌ها به دقت بحث کنید.
- ۴- با استفاده از معلوماتی که بالاتر یافته‌اید، الگوریتمی ارائه کنید که بدون استفاده از بازخور حالت، بتوان تنظیم روی حالت مطلوب (که نام آنرا x_d می‌گذاریم) انجام داد. این الگوریتم بازای چه x_d ‌هایی اصولاً قابل قبول خواهد بود و حداقل کارایی را خواهد داشت؟ چرا؟ در همان جاهایی هم که کارایی دارد چه اشکال اساسی دارد (به نایقینی‌ها توجه کنید)؟
- ۵- برای ناحیه‌ای از فضای x_d ‌ها که الگوریتم بدون بازخور بالا تا حدودی پاسخگوست، بگویید چنانچه به هر دلیلی حالت، در x_d ی مطلوب نباشد، حداقل و حداکثر سرعت (بر اساس معیار نمایی ثابت زمانی) برای بازگرداندن سیستم به همان تعادل مطلوب چقدر است؟ از این پس به این سرعت، به اختصار، سرعت تنظیم یا ثابت زمانی تنظیم، می‌گوییم.
- ۶- حال برای فائق آمدن به ناحیه‌ای که الگوریتم بدون بازخور بالا پاسخگو نبود و همین طور برای فائق آمدن به نایقینی‌های الگو، نسبت به سیستم واقعی، می‌خواهیم بازخور حالت را نیز به الگوریتم تنظیم خود اضافه کنیم. برای این منظور به غیر از استفاده‌ای که از x_d در بالا انجام دادیم، با کم کردن x_s (حالت اندازه‌گیری شده) از آن، خطا را تشکیل داده و بصورت تناسبی با ضریب تناسب k ، سعی در جبران خطا می‌کنیم. روشن است که ورودی سیستم که در اختیار ماست، این بار از دو قسمت تشکیل می‌گردد: یکی همان که از الگوریتم بدون بازخور در بالا درست گردید و دیگری همین که در اینجا با کمک بازخور درست شده است. هم معادلات بوجود آمده‌ی الگوریتم ترکیبی جدید را بنویسید و هم شکل مناسبی برای نمایش بلوکی آن ارائه کنید.
- ۷- حال k را طوری تعیین کنید که نه تنها مشکل عدم پاسخگویی الگوریتم بالاتر را برطرف سازد بلکه حداقل ثابت زمانی تنظیم، یک ثانیه، باشد.
- ۸- در این الگوریتم ترکیبی که ساخته‌اید، خطای مانا چقدر خواهد بود؟ پاسخ خود را با توجه به در نظر گرفتن و نگرفتن نایقینی‌های الگو، دقیق کنید.
- ۹- حال بیایید از الگوریتم ترکیبی بالا، قسمت بدون بازخور را حذف نموده و فقط از قسمت بازخوردار که همان جبران خطاست، استفاده کنیم. به نظر شما چه چیزی خراب می‌شود؟ مقدار این خرابی را بازای x_d ‌های گوناگون و k به دقت ارائه کنید.

۱۰- برای فائق آمدن به خرابکاریِ بالا، پیشنهادی ارائه کنید که همچنان فقط بازخور استفاده گردد و نه الگوریتم بدون بازخور؟ (راهنمایی: به دو راه، یکی، افزایش بهره تناسبی و دیگری، نقشی که یک انتگرالگیر خالص بعد از خطا می‌تواند ایفا کند، فکر کنید)

۱۱- افزایش بهره تناسبی را بررسی نموده و سعی کنید کارایی آن را به خوبی بسنجید. در این راه به دو چیز بطور همزمان نگاه کنید. یکی بهبودی که در خطای مانا حاصل می‌گردد و دیگری حداکثر ورودی درخواستی که بازای خطاهای گوناگون ممکن است درخواست شود.

۱۲- پیشنهاد گذاردن انتگرالگیر خالص را به دقت با ملاحظه‌ی تمام جوانب اجرا کنید بگونه‌ای که هنوز همان شرط حداقل سرعت تنظیم برقرار مانده و ضمناً پاسخ چندان نوسانی نگردد.

در تمامی مراحل طی شده‌ی بالا به کمک شبیه‌سازی نرم‌افزاری مناسبی که ترتیب می‌دهید، نتایج را مشاهده کنید و برای هر یک از موارد، سعی کنید نمونه و یا نمونه‌هایی را بدهید بگونه‌ای که گزارش کاملی از مراحل تکامل طراحی‌تان ارائه گردد.

حال در مسئله بالا سامانه تقریبی خطی را نیز به دست آورده و رفتار آن را با سامانه اصلی مقایسه کنید. این مقایسه را با کمک شبیه‌سازی عددی نیز انجام دهید.

باید فراموش نکنید که این تقریب هر بار که سکون مطلوب خود را تغییر می‌دهید، فقط در همسایگی به اندازه کافی نزدیک به آن معتبر است و هرچه از آن سکون که حول آن خطی‌سازی نموده‌اید، دور شوید، اعتبار آن نیز کاهش می‌یابد. لذا اگر می‌خواهید از این تقریب خطی همچنان استفاده کنید لازم است مرتباً سکونی که حول آن خطی‌سازی می‌کنید را نیز تغییر داده تا به ماتریس‌های جدید (A_d, B_d, K_d) برسید.