اصل انرژی در کانال های باز

$$H=\alpha\frac{V^2}{2g}+d\,Cos\theta+Z$$

$$H=\alpha\frac{V^2}{2g}+y\,Cos^2\theta+Z$$

$$If\ \ \theta\langle 6^\circ,\alpha=1\Rightarrow H=\frac{V^2}{2g}+y+Z$$

$$\alpha_1\frac{V_1^2}{2g}+d_1Cos\theta+Z_1-h_f=\alpha_2\frac{V_2^2}{2g}+d_2Cos^2\theta+Z_2$$

$$\frac{V_1^2}{2g}+y_1+Z_1-h_f=\frac{V_2^2}{2g}+y_2+Z_2$$

کاربردهای معادله انرژی

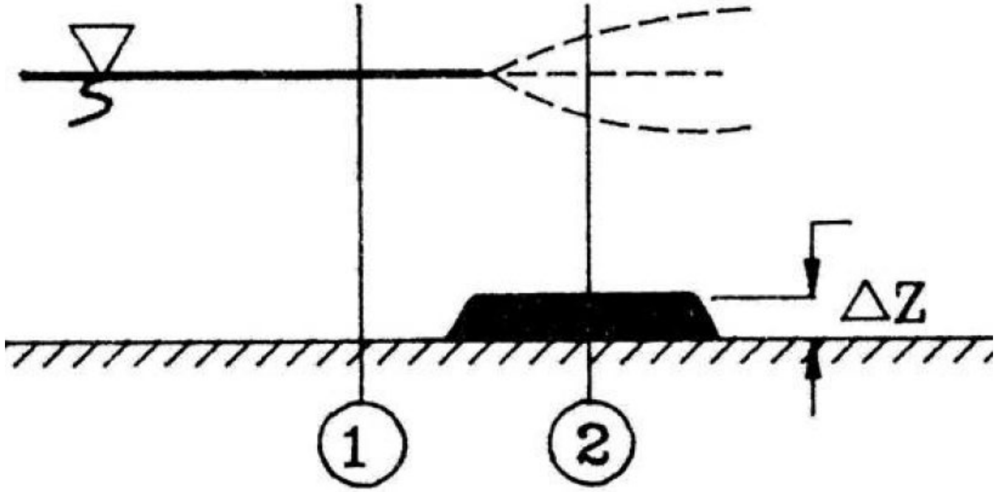
الف) تغییر ارتفاع کف کانال

$$H_1=H_2$$

$$\frac{V_1^2}{2g}+y_1=\frac{V_2^2}{2g}+y_2+\Delta Z$$

$$V_1y_1b_1=V_2y_2b_2\ \Rightarrow\begin{cases}V_1y_1=V_2y_2=q\\ q=\dfrac{Q}{b}\end{cases}$$

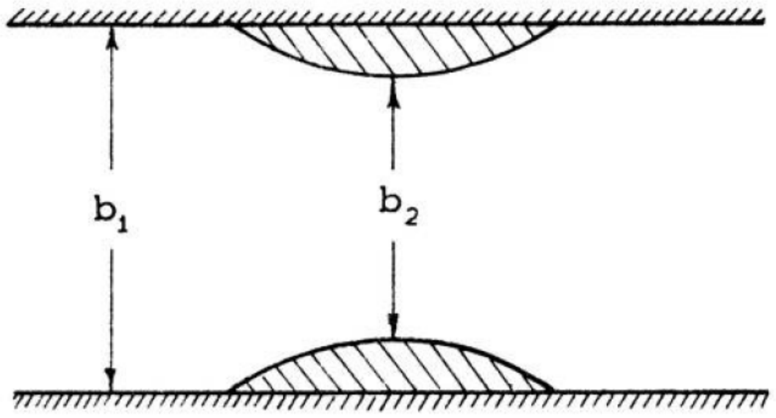
$$\frac{q^2}{2gy_1^2}+y_1=\frac{q^2}{2gy_2^2}+y_2+\Delta Z$$



اصل انرژی در کانال های باز–۱

کاربردهای معادله انرژی

ب) تغییر عرض کانال



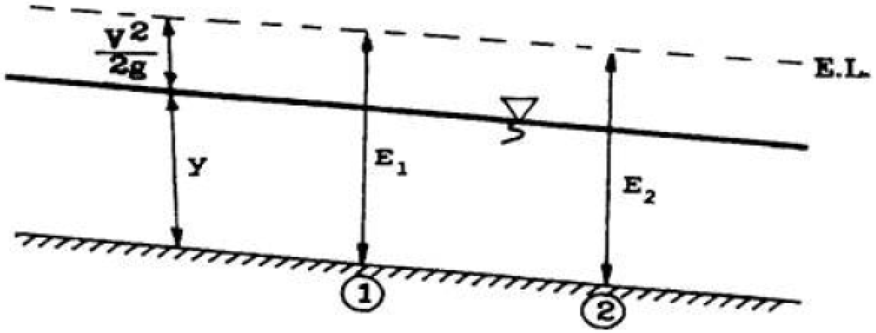
$$H_1 = H_2$$

$$\frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{V_2^2}{2g} + y_2 \qquad \Rightarrow \frac{q_1^2}{2gy_1^2} + y_1 = \frac{q_2^2}{2gy_2^2} + y_2$$

$$q_1 = V_1\, y_1 = \frac{Q}{b_1}$$

$$q_2 = V_2\, y_2 = \frac{Q}{b_2}$$

انرژی مخصوص



$$E=\alpha\frac{V^2}{2g}+d\,Cos\theta$$

$$E=\alpha\frac{V^2}{2g}+y\,Cos^2\theta=y\,Cos^2\theta+\alpha\frac{Q^2}{2gA^2}$$

انرژی مخصوص در کانال مستطیلی با شیب کم

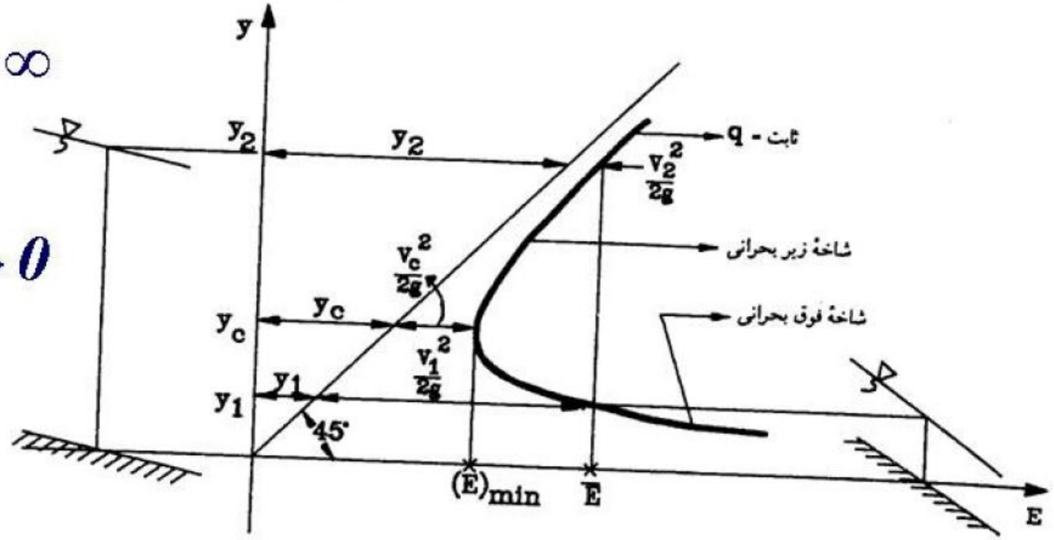
$$E=y+\alpha\frac{q^2}{2gy^2}$$

$$If\ \ (\alpha=1)\ \Rightarrow(E-y)y^2=\frac{q^2}{2g}=Cont.$$

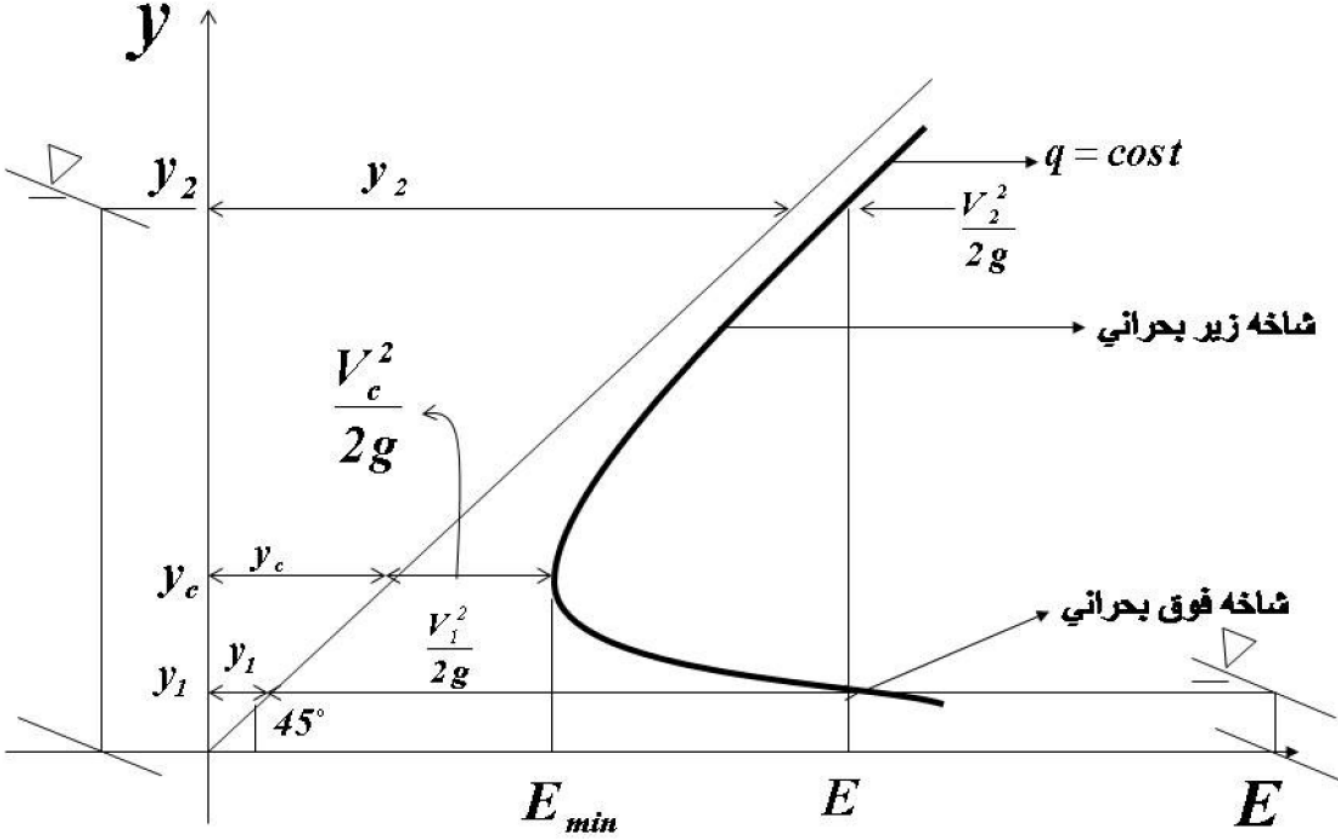
$$(E-y)y^2-\frac{q^2}{2g}=0$$

$$y\to 0\Rightarrow\frac{V^2}{2g}\to\infty$$

$$y\to\infty\Rightarrow\frac{V^2}{2g}\to 0$$



منحنی انرژی مخصوص–عمق



$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \Rightarrow \frac{dE}{dy} = 1 + \frac{q^2}{2g}\left(\frac{-2}{y^3}\right)$$

$$\frac{dE}{dy} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2q^2}{2gy^3} = 0 \Rightarrow \frac{q^2}{gy^3} = 1$$

$$y^3 = \left(\frac{q^2}{g}\right) \Rightarrow y = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}$$

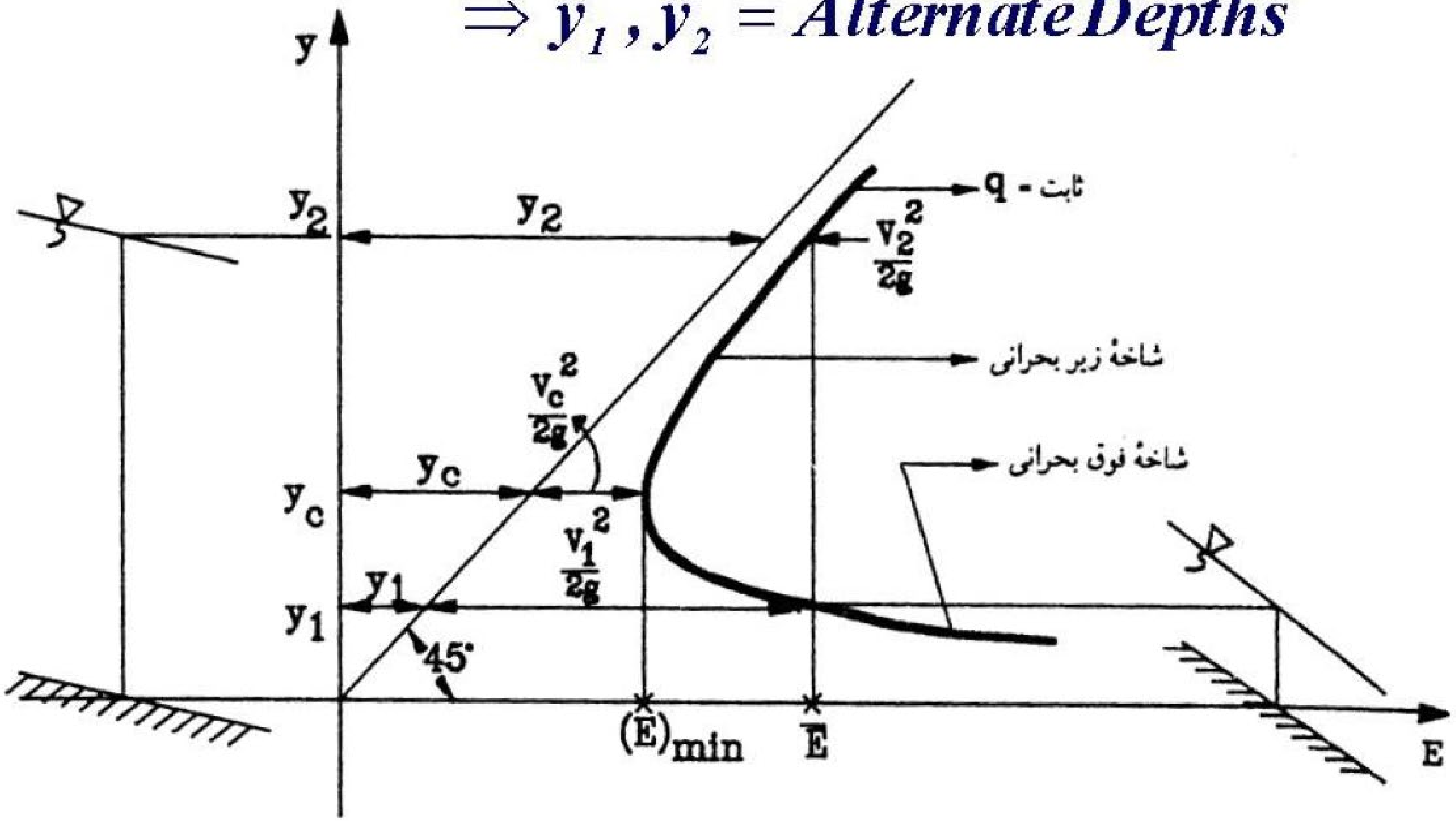
$$y = \left(\frac{V^2 y^2}{g}\right)^{1/3} = \frac{V^2}{gy} = 1 \Rightarrow \frac{V}{\sqrt{gy}} = Fr = 1$$

$$y_c = \left(\frac{q^2}{2g}\right)^{1/3} \Rightarrow E_{min} = y_c + \frac{V_c^2}{2g} = y_c + \frac{V_c^2 y_c}{2gy_c} \Rightarrow E_{min} = \frac{3}{2} y_c$$

اعماق متناوب

$$(y_2 > y_c \;,\; Fr < 1),\ (y_1 < y_c \;,\; Fr > 1)$$

$$\Rightarrow y_1 \,, y_2 = Alternate\,Depths$$

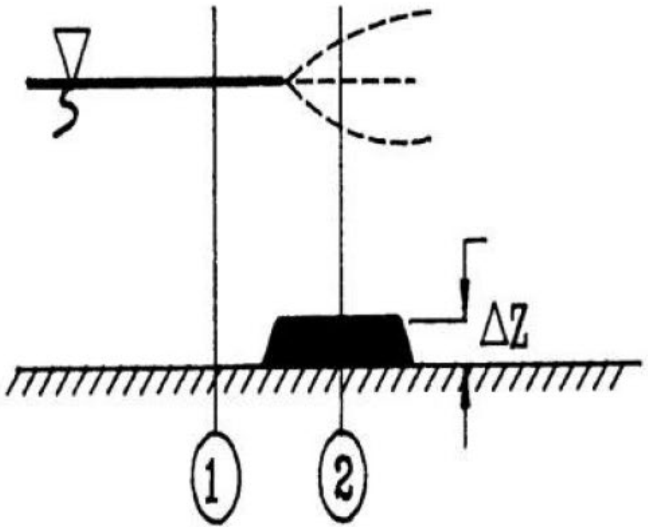


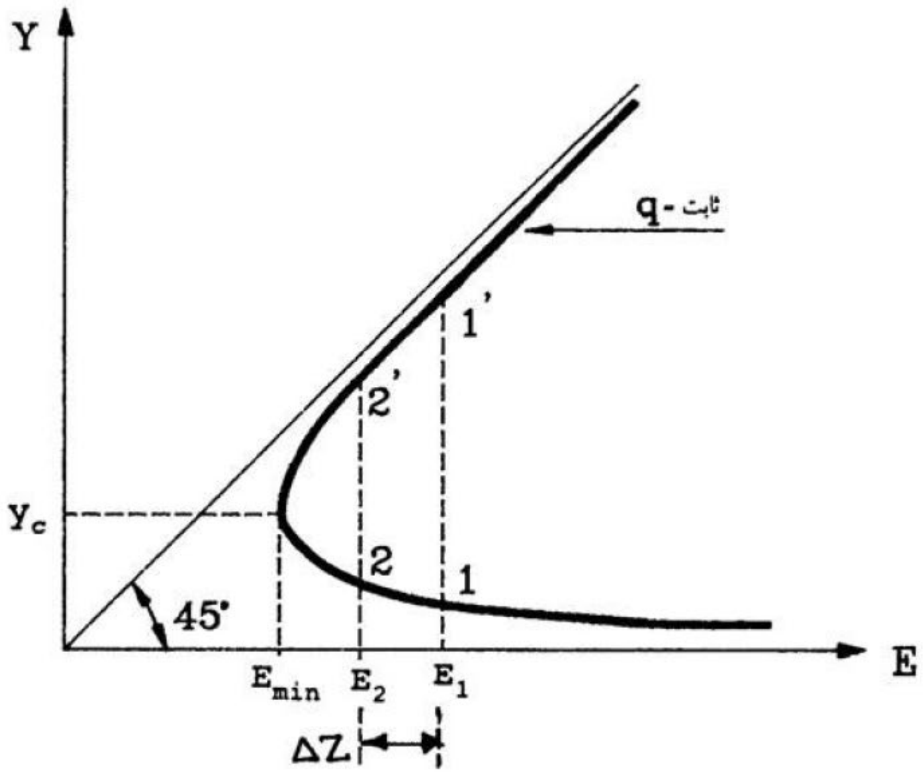
تحلیل جریان ناشی از یک برآمدگی موضعی در کانال مستطیلی

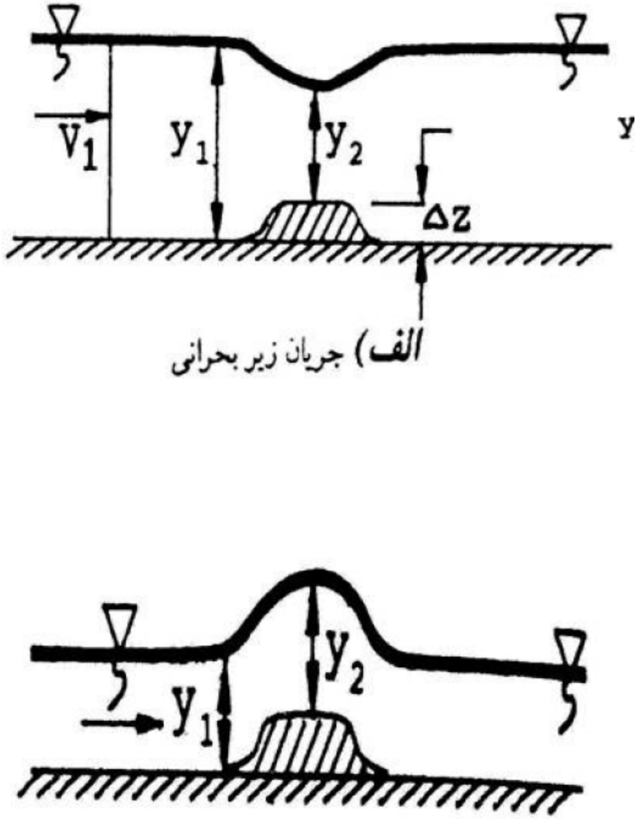
$$y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^2} = y_2 + \frac{q^2}{2gy_2^2} + \Delta Z$$

$$E_1 = E_2 + \Delta Z$$

$$\Rightarrow E_2 = E_1 - \Delta Z$$

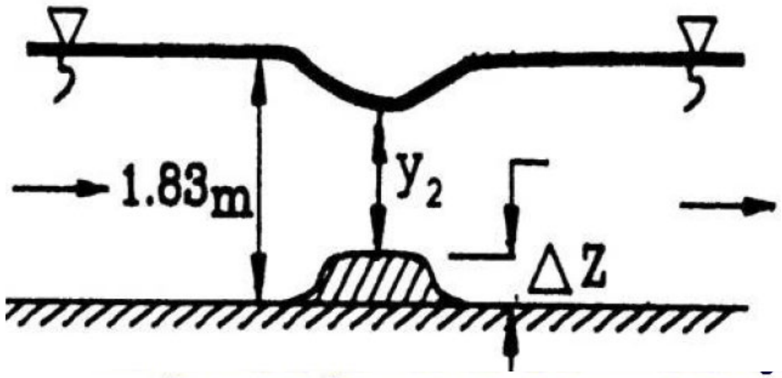






مثال

آب به صورت یکنواخت با دبی ۹/۹۱ متر مکعب در ثانیه و عمق ۱/۸۳ متر در یک کانال مستطیلی به عرض ۳/۰۵ متر جاری است.



الف) حداقل ارتفاع برآمدگی چقدر باشد تا عمق y_2 برابر عمق بحرانی شود.

وضعیت جریان قبل از برآمدگی

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{9.91}{3.05} = 3.25\, m^3/s.m$$

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1.3} = \left(\frac{3.25^2}{9.81}\right)^{1.3} = 1.025\, m \Rightarrow y_1 > y_c \Rightarrow Fr < 1$$

$$E_1 = y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^2} = 1.83 + \frac{3.25^2}{2\times 9.81\times 1.83^2} \approx 1.99\ m$$

$$E_{min} = \frac{3}{2}y_c = \frac{3}{2}\times 1.025 = 1.54\, m$$

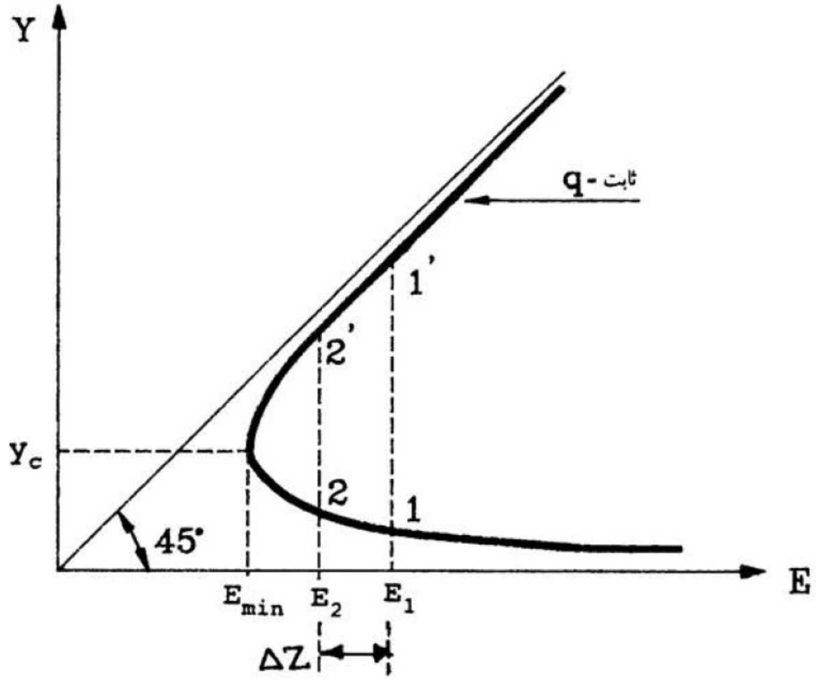
$$E_1 = E_2 + \Delta Z \Rightarrow E_1 = E_{min} + \Delta Z_c$$

$$\Delta Z_c = 1.99 - 1.54 = 0.45\, m$$

$$If\ \ \Delta Z_c = 0.45\, m \Rightarrow y_1 = 1.83\, m$$

$$y_2 = y_c = 1.025\, m$$

افت سطح آب $= y_1 - (y_2 + \Delta Z_c) = 1.83 - (1.025 + 0.45) = 0.35\, m$



برای بحرانی شدن در مقطع ۲، بایستی انرژی مخصوص در این مقطع برابر E_{min} باشد

ادامه مثال

ب – میزان افت در سطح اب را هنگامیکه ارتفاع برامدگی نصف حالت الف باشد محاسبه نمایید

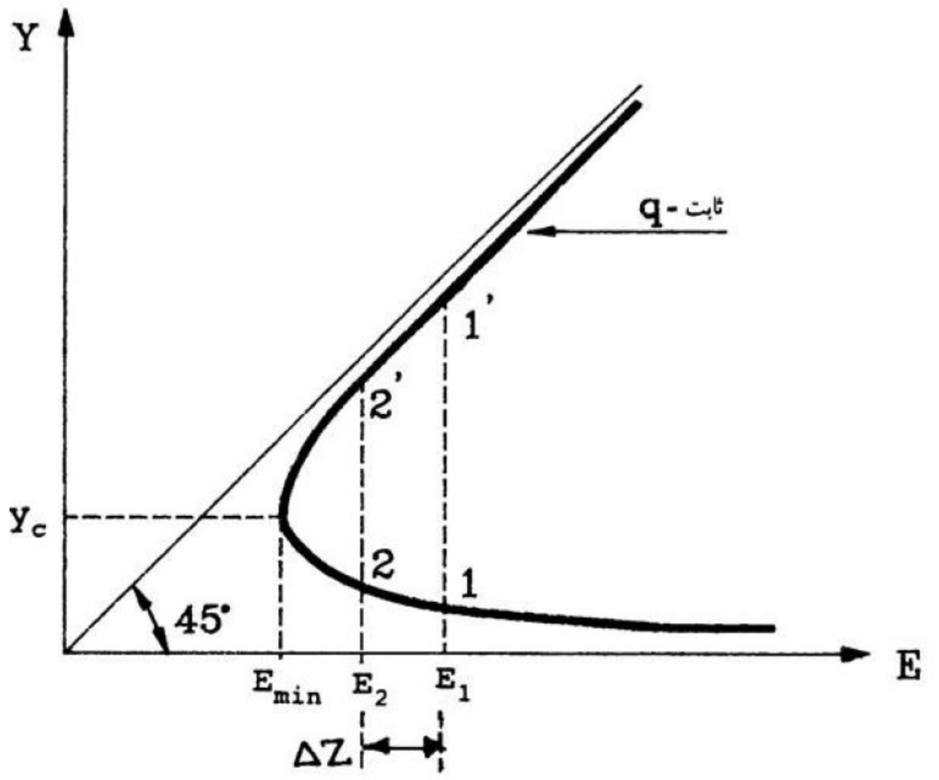
$$\Delta Z = \frac{0.45}{2} = 0.225\,m$$

$$E_2 = E_1 - \Delta Z$$

$$y_2 + \frac{q^2}{2gy_2^2} = 1.99 - 0.225$$

$$y_2 + \frac{3.25^2}{2\times 9.81\times y_2^2} = 1.765 \Rightarrow y_2 = 1.53\,m$$

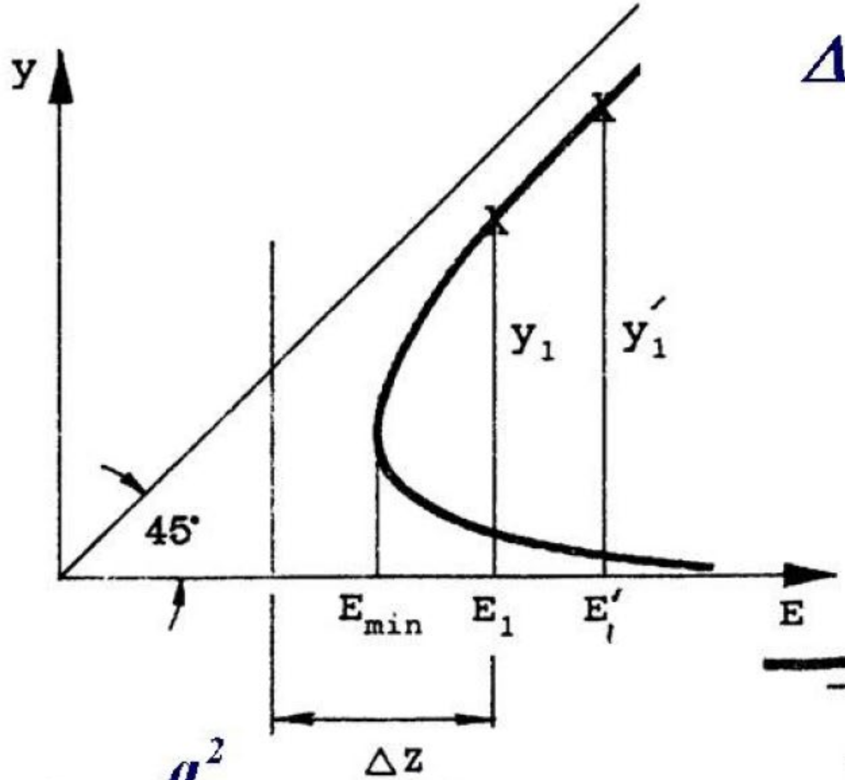
$$y_c \langle y_2 \langle y_1$$



$$\text{افت}_{\text{سطح آب}} = y_1 - (y_2 + \Delta Z_c) = 1.83 - (1.53 + 0.225) = 0.075\,m$$

ادامه مثال

ج – در صورتیکه ارتفاع برآمدگی دو برابر حالت الف انتخاب گردد

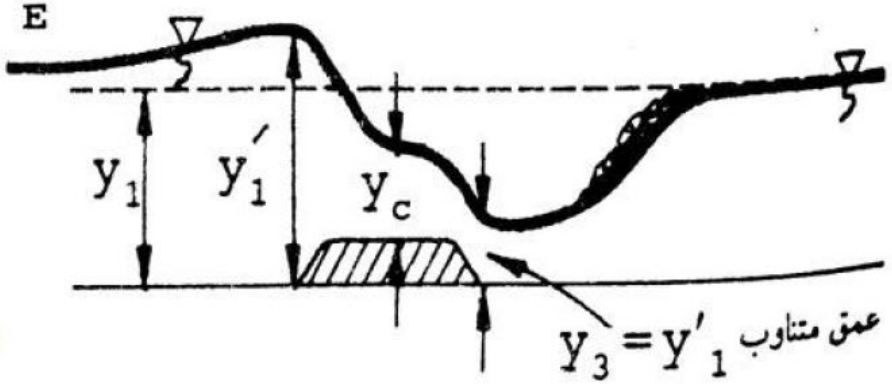


$$\Delta Z = 2\Delta Z_c = 2\times 0.45 = 0.9\,m$$

$$E_1' = E_2 + \Delta Z$$

$$E_1' = E_{min} + \Delta Z$$

$$E_1' = 1.54 + 0.9 = 2.44$$



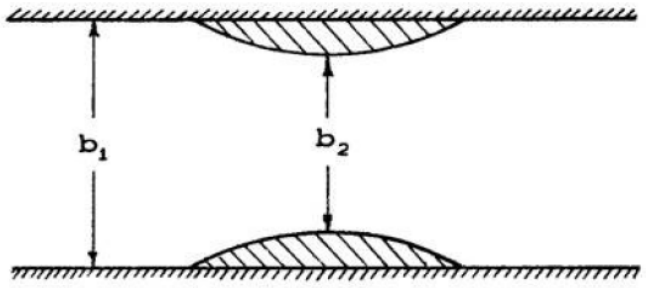
$\Delta z > \Delta z_c$

$$y_1' + \frac{q^2}{2gy_1'^2} = 2.44$$

$$\Rightarrow y_1' + \frac{3.25^2}{2\times 9.81\times y_1'^2} = 2.44$$

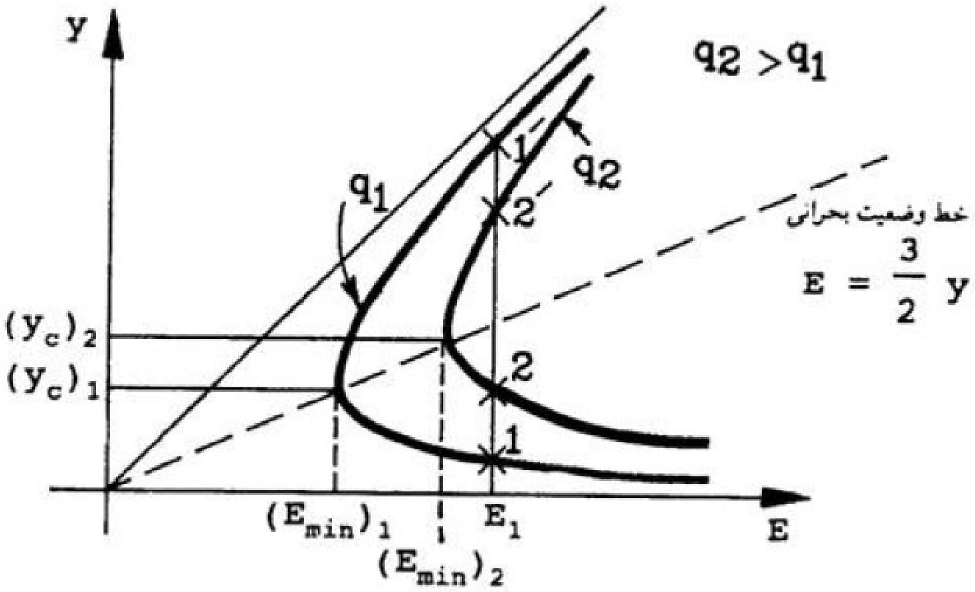
$$y_1' \rangle = y_1 \Rightarrow y_1' = 2.35\,m$$

تحلیل جریان ناشی از یک تنگنای موضعی در کانال مستطیلی



شکل ۳-۲ : پلان کانال مستطیلی با تنگ شدگی در عرض

$$y_1 + \frac{q_1^2}{2gy_1^2} = y_2 + \frac{q_2^2}{2gy_2^2}$$

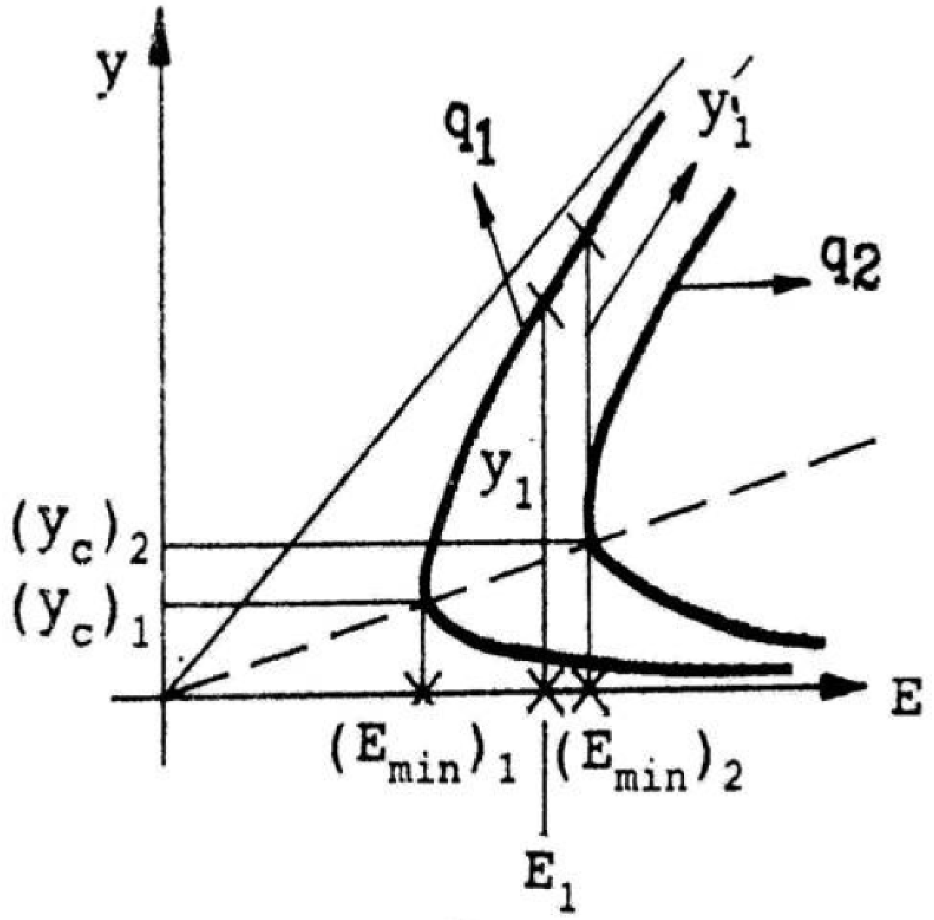


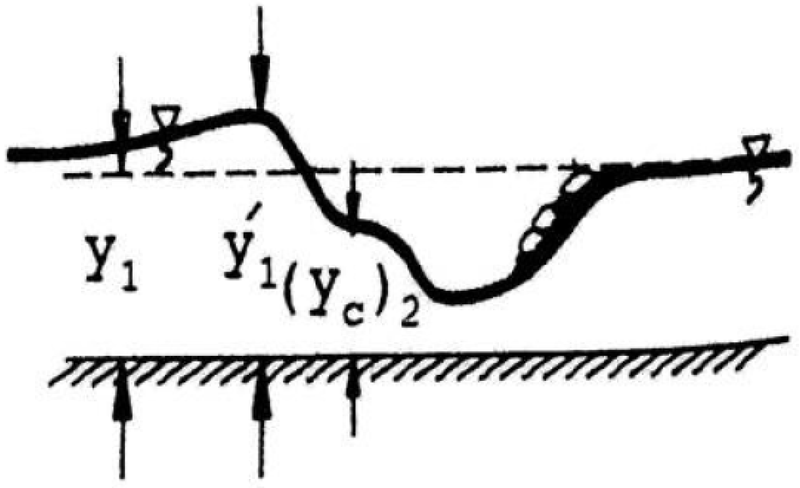
$$\left.\begin{array}{l} E_1 = E_2 \\ q_2 \rangle q_1 \end{array}\right\} \Rightarrow (y_c)_2 \rangle (y_1)_1$$

$$\Rightarrow E_{min\,2} \rangle E_{min\,1}$$

انسداد

هرگاه کاهش عرض بگونه ای باشد که منحنی E-y با مشخصه q_2 در سمت راست خط قائم به معادله $E=E_1$ قرار گیرد ($E_1<E_{min2}$) در این صورت هیچ نقطه از منحنی $E=y$ با مشخصه q_2 جواب مسئله نخواهد بود

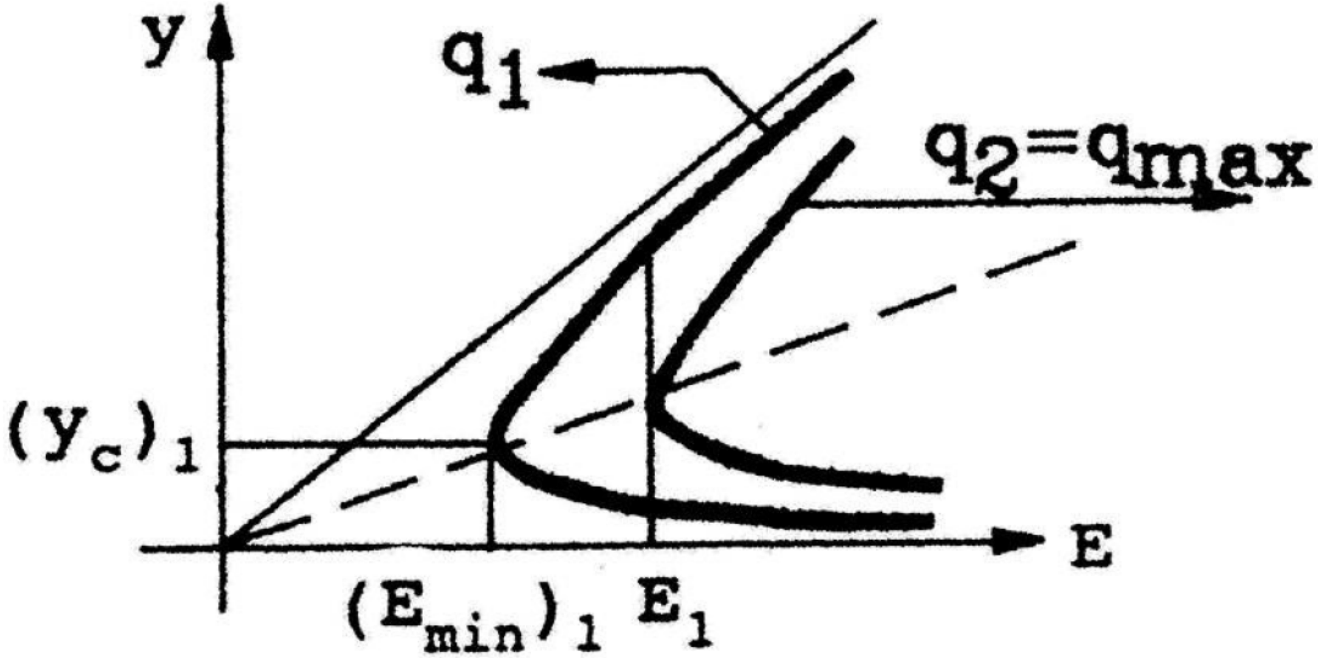


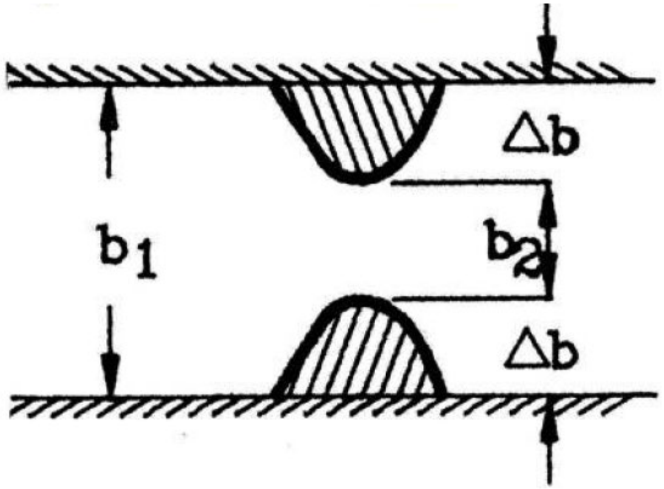


مثال

مثال: یک کانال مستطیلی با مشخصات زیر موجود می باشد. ماکزیمم عرض پیش آمدگی پایه های پل را بگونه ای تعیین نمایید که باعث تغییر وضعیت جریان آب در بالا دست نگردد. از افت انرژی موضعی صرفنظر شود.

$$b_1 = 30.0\,m \quad , \quad Q = 90.0\,{m^3}/{s} \quad , \quad y_1 = 2.5\,m$$





وضعیت جریان قبل از تنگ شدگی

$$q_1 = V_1\, y_1 \Rightarrow 3 = V_1 \times 2.5 \Rightarrow V_1 = 1.2\,{m}/{s}$$

$$q_1 = \frac{Q}{b_1} = \frac{90}{30} = 3\,\frac{m^3}{s.m}$$

$$Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g y_1}} = \frac{1.2}{\sqrt{9.81 \times 2.5}} = 0.242 \langle 1$$

ادامه مثال

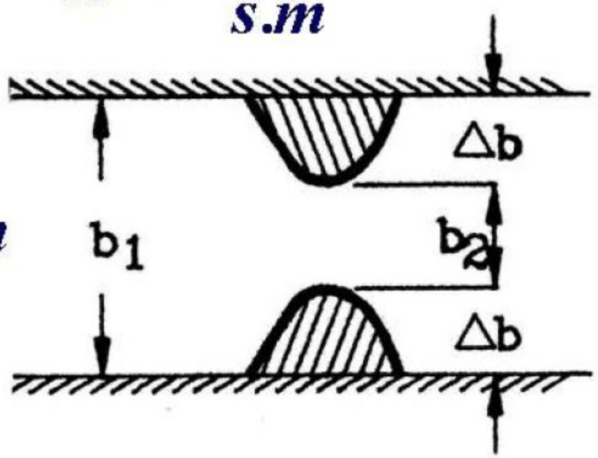
$$E_1 = y_1 + \frac{q_1^2}{2gy_1^2} = 2.5 + \frac{3^2}{2\times 9.81\times 2.5^2} = 2.573\,m$$

$$E_{min\,2} = E_1 = 2.573\,m$$

$$(y_c)_2 = \frac{2}{3}E_{min\,2} = \frac{2}{3}\times 2.573 = 1.71\,m$$

$$(y_c)_2 = \left(\frac{q_2^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 1.71 = \left(\frac{q_2^2}{9.81}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow q_2 = 7\,\frac{m^3}{s.m}$$

$$q_2 = \frac{Q}{b_2} \Rightarrow 7 = \frac{90}{b_2} \Rightarrow b_2 = 12.85\ m$$



$$(\Delta b)_{max} = \frac{b_1 - b_2}{2} = \frac{30 - 12.58}{2} = 8.57\,m$$

مثال

مثال: جریان آبی با دبی ۱۶ متر مکعب بر ثانیه و عمق ۲ متر در یک کانال مستطیلی به عرض ۴ متر برقرار است . در مقطع پایین دست ، عرض مقطع به ۳/۵ کاهش داده و نیز کف کانال در همین محل به مقدار Δz بالا برده می شود.

تغییرات سطح آب را در محل این تبدیل در دو حالت زیر بدست آورید.

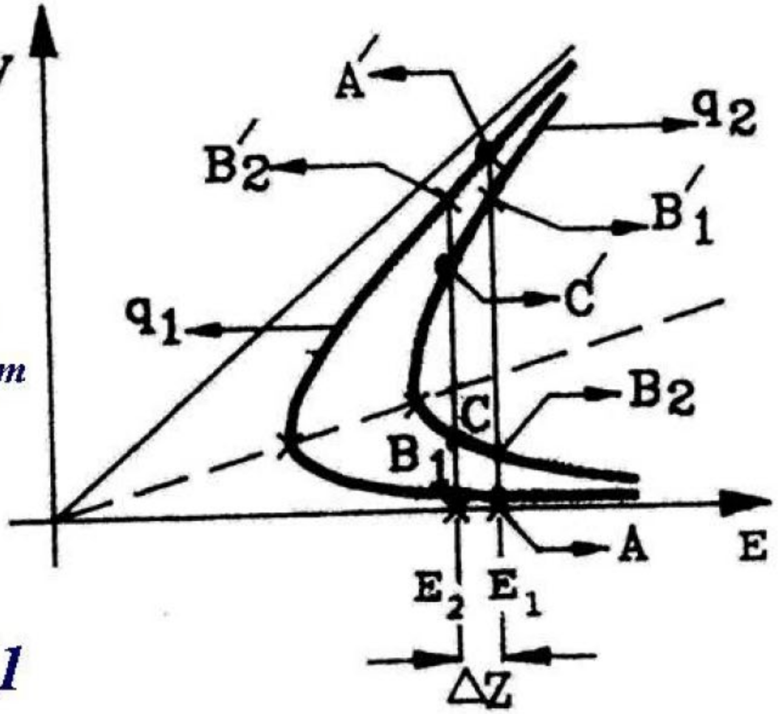
الف) $\Delta z = ۰/۲\,m$ ب) $\Delta z = ۰/۳۵\,m$

مشخصات جریان در مقطع بالادست

$$q_1 = \frac{Q}{b_1} = \frac{16}{4} = 4\,\frac{m^3}{s.m}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{q_1}{y_1} \Rightarrow V_1 = \frac{4}{2} = 2\,{}^{m^3}\!/_{s.m}$$

$$Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} = \frac{2}{\sqrt{9.81 \times 2}} = 0.45 \langle 1$$



$$(y_c)_1 = \left(\frac{q_1^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4^2}{9.81}\right)^{\frac{1}{3}} = 1.178\,m$$

$$E_{min\,1} = \frac{3}{2}(y_c)_1 = \frac{3}{2} \times 1.178 = 1.766\,m$$

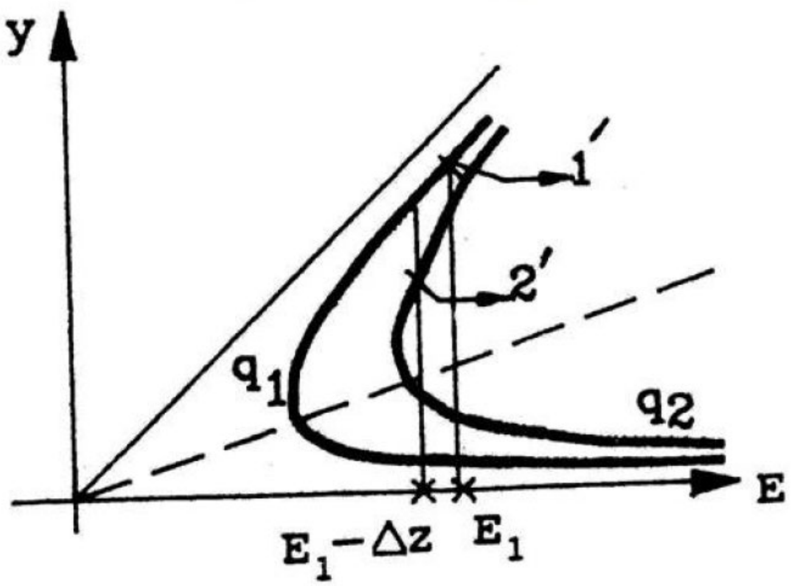
ادامه مثال

مشخصات در مقطع پایین دست(محل تبدیل)

$$q_2 = \frac{Q}{b_2} = \frac{16}{3.5} = 4.57 \frac{m^3}{s.m}$$

$$(y_c)_2 = \left(\frac{4.57^2}{9.81}\right)^{\frac{1}{3}} = 1.287\ m$$

$$E_{min\,2} = \frac{3}{2}(y_c)_2 = \frac{3}{2} \times 1.287 = 1.93\,m$$



$$E_1 - \Delta Z = 2.204 - 0.2 = 2.004 \quad \Rightarrow 2.004 \rangle E_{min\,2}$$

$\Delta z = ۰/۲ m$

$$E_2 = y_2 + \frac{q_2^2}{2gy_2^2} = 2.004$$

$$y_2 + \frac{4.57^2}{2 \times 9.81 \times y_2^2} = 2.004 \rightarrow y_2 = 1.575\ m$$

ادامه مثال

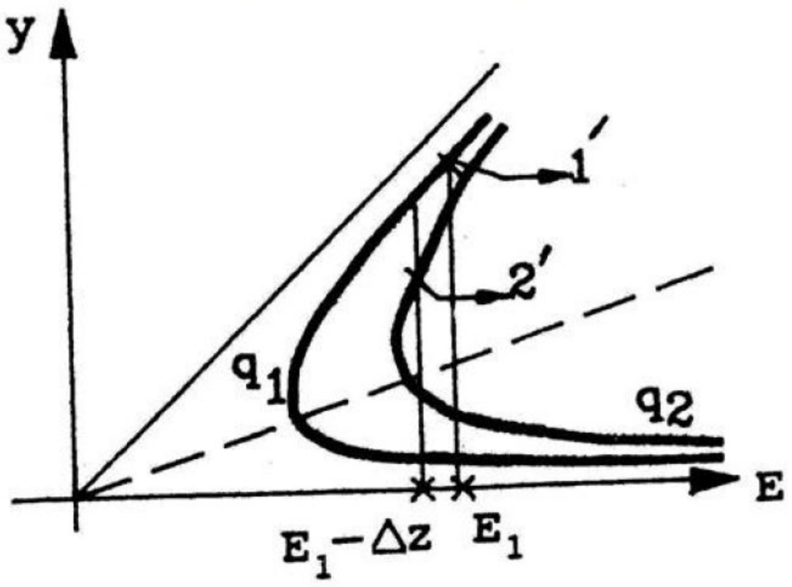
ب) Δz -۰/۳۵ m

$$E_2 = E_1 - \Delta Z = 2.204 - 0.35 = 1.854 \langle E_{min\,2}$$

$$y_2 = (y_c)_2 = 1.287\,m$$

$$E_2 = E'_1 - \Delta Z \Rightarrow E_{min\,2} = E'_1 - \Delta Z$$

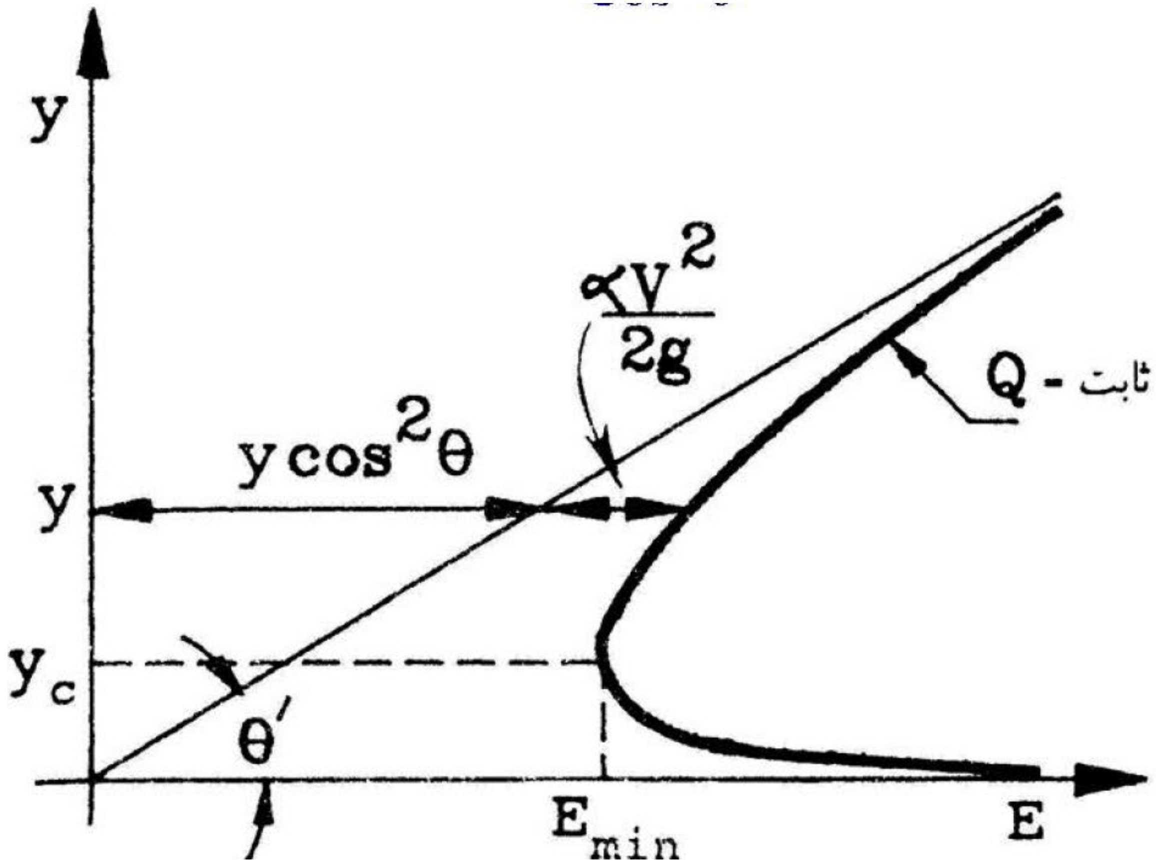
$$2.28 = y'_1 + \frac{q_1^2}{2gy_1'^2} = y'_1 + \frac{4^2}{2 \times 9.81 \times (y'_1)^2} \rightarrow y'_1 = 2.094$$

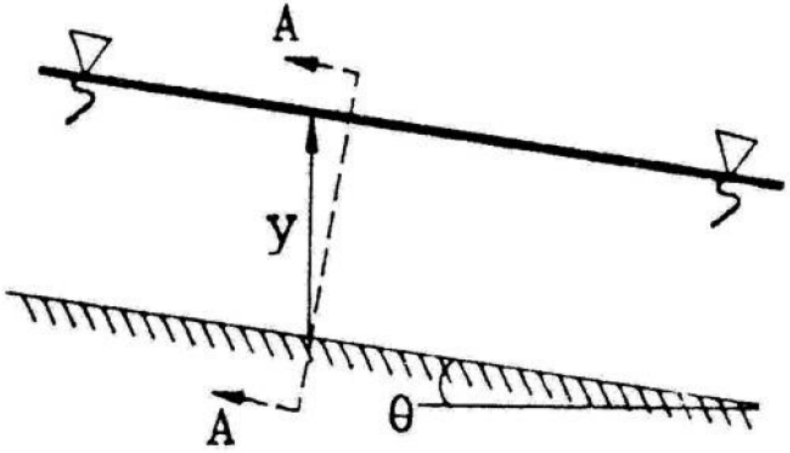


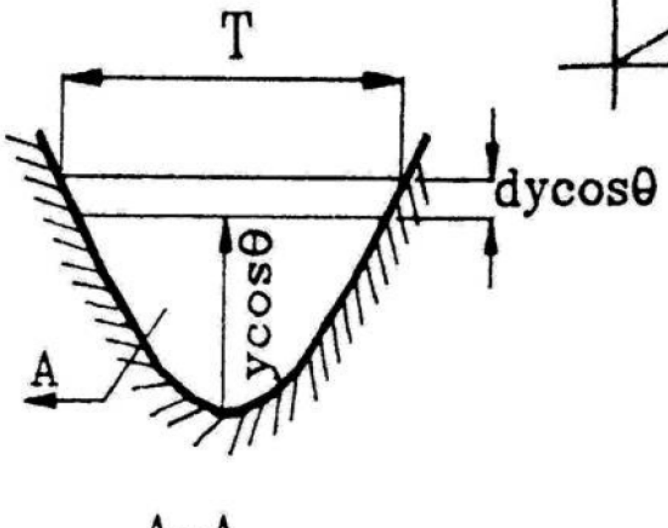
منحنی E-y در حالت کلی و برای هر مقطع دلخواه

$$E = \alpha\frac{V^2}{2g} + y\,Cos^2\theta = y\,Cos^2\theta + \alpha\frac{Q^2}{2gA^2}$$

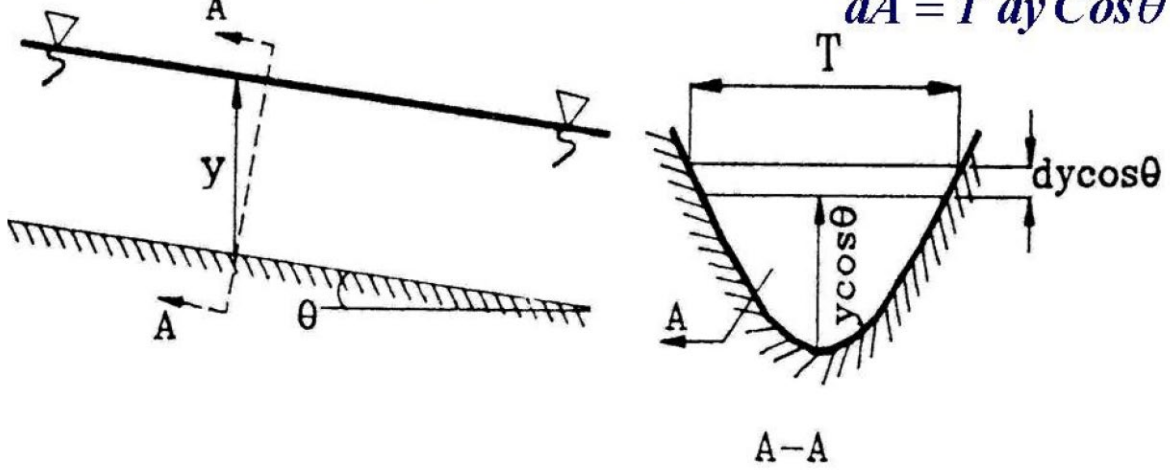
$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ E = y\,Cos^2\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مجانب ها} \qquad \Rightarrow \theta' = tg^{-1}\frac{1}{Cos^2\theta}$$







مشخصات نقطه بحرانی



$$dA = T\,dy\,Cos\theta$$

$$E = y\,Cos^2\theta + \alpha\frac{Q^2}{2gA^2}$$

$$\frac{dE}{dy} = Cos^2\theta + \frac{\alpha Q^2}{2g}\left(\frac{-2A\,{}^{dA}\!/_{dy}}{A^4}\right) = Cos^2\theta - \frac{\alpha Q^2\,{}^{dA}\!/_{dy}}{gA^3}$$

$$\frac{dE}{dy} = Cos^2\theta - \frac{\alpha Q^2\,T\,Cos\theta}{gA^3}$$

$$\frac{dE}{dy} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\alpha Q^2\,T}{gA^3 Cos\theta} = 1}$$

$$\frac{\alpha Q^2\,T}{gA^3 Cos\theta} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha V^2\,T}{gA\,Cos\theta} = 1$$

$$\frac{A}{T} = D \Rightarrow \frac{\alpha V^2}{gD\,Cos\theta} = 1$$

$$\frac{\alpha V^2}{gD\,Cos\theta} = 1 \Rightarrow \frac{V\sqrt{\alpha}}{\sqrt{gD\,Cos\theta}} = 1$$

$$\boxed{Fr = \frac{V\sqrt{\alpha}}{\sqrt{gD\,Cos\theta}}}$$

$$E_{min} = y_c\,Cos^2\theta + \frac{\alpha V_c^2}{2g} = y_c\,Cos^2\theta + \frac{\alpha V_c^2\,D_c\,Cos\theta}{2g\,D_c\,Cos\theta}$$

$$\boxed{E_{min} = y_c\,Cos^2\theta + \frac{1}{2}D_c\,Cos\theta}$$

مقطع بحرانی

$$\frac{\alpha Q^2 T}{g A^3 \, Cos\theta} = 1$$

$$E_{min} = y_c \, Cos^2\theta + \frac{1}{2} D_c \, Cos\theta$$

$$Fr = \frac{V\sqrt{\alpha}}{\sqrt{gD \, Cos\theta}}$$

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c}$$

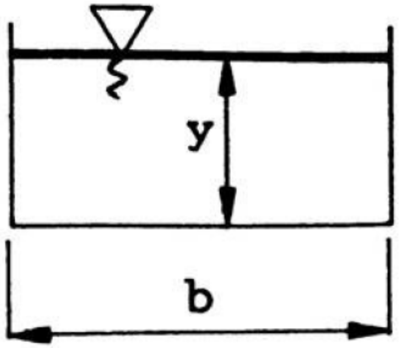
$$E_{min} = y_c + \frac{1}{2} D_c$$

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}}$$

مقطع بحرانی-۱

$$Fr=\frac{V}{\sqrt{gD}}=\frac{V}{\sqrt{gy}}$$

مقطع مستطیلی

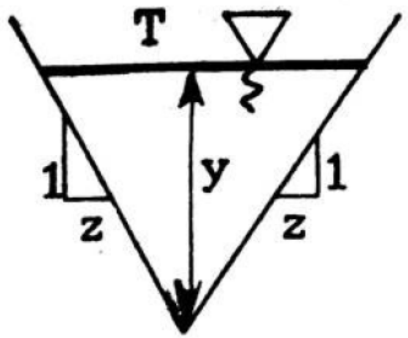


$$\frac{Q^2}{g}=\frac{A_c^3}{T_c}\Rightarrow\frac{Q^2}{g}=\frac{b^3y_c^3}{b}$$

$$\Rightarrow y_c=\left(\frac{Q^2}{b^2g}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$E_{min}=y_c+\frac{1}{2}D_c\Rightarrow y_c+\frac{1}{2}y_c=\frac{3}{2}y_c$$

مقطع مثلثی



$$\frac{Q^2}{g}=\frac{A_c^3}{T_c}\Rightarrow\frac{Q^2}{g}=\frac{z^3y_c^6}{2zy_c}\Rightarrow y_{c=}\left(\frac{2Q^2}{gz^2}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$E_{min}=y_c+\frac{1}{2}\left(\frac{y_c}{2}\right)=1.25y_c$$

$$Fr=\frac{V}{\sqrt{gD}}=\frac{V}{\sqrt{g\,y/2}}=\frac{V\sqrt{2}}{\sqrt{gy}}$$

مقطع بحرانی—۲

حل به روش عددی آزمون و خطا

مقطع ذوزنقه

$$\frac{Q^2}{g}=\frac{A_c^3}{T_c} \longrightarrow$$

$$A = (b + zy)y$$

$$T = b + \text{۲}zy$$

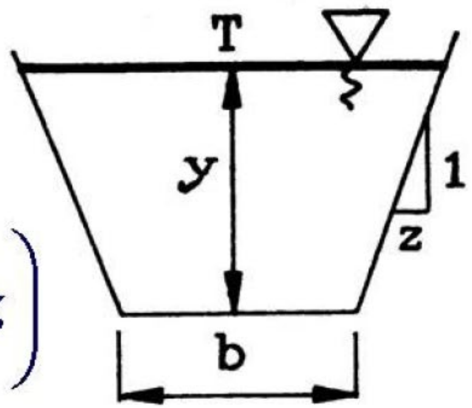
$$D = \frac{(b + zy)y}{b + \text{۲}zy}$$

$$E_{min} = y_c + \frac{1}{2}D_c$$

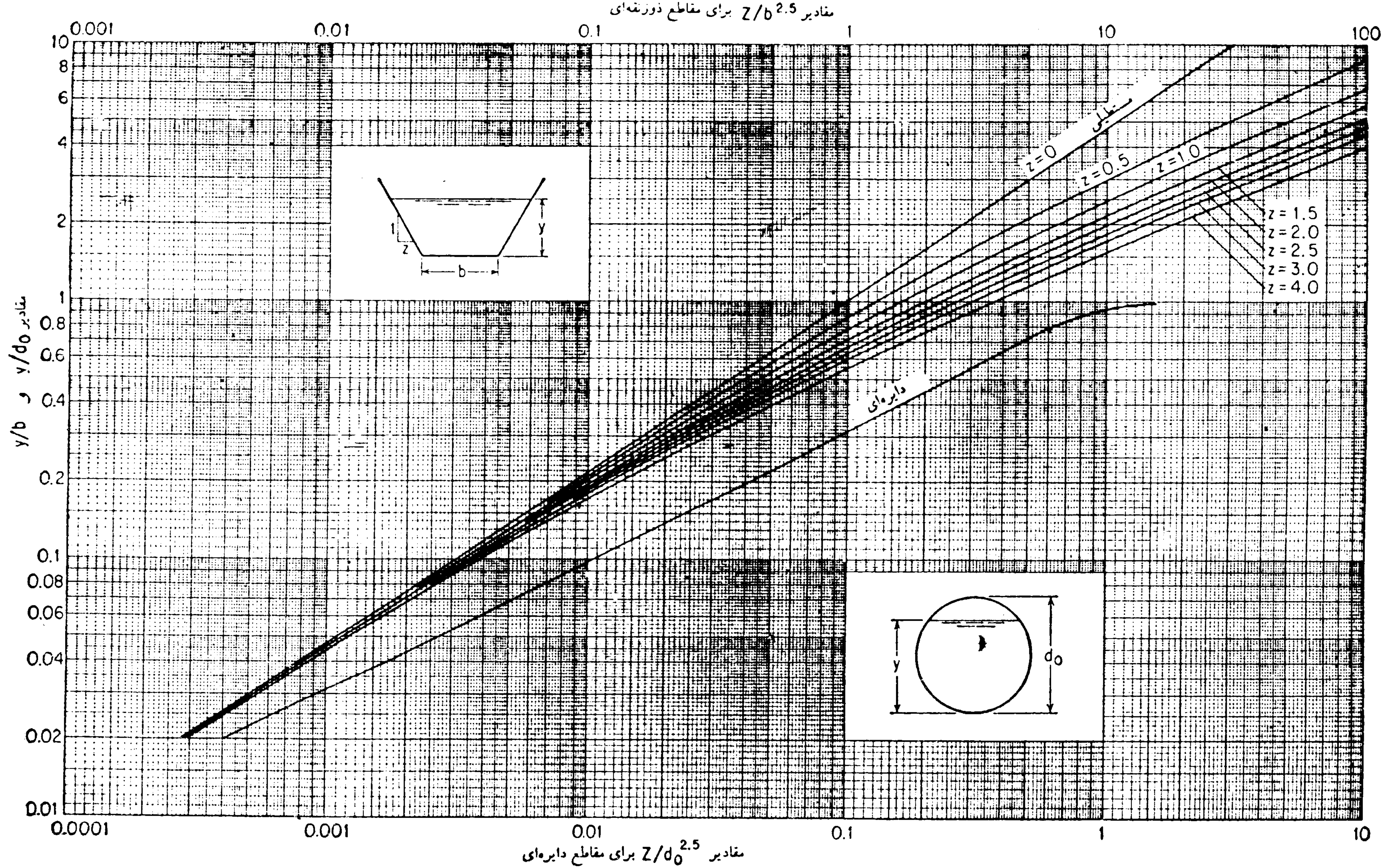
حل به روش ترسیمی

$$Z = A\sqrt{A/T} = A\sqrt{D} = \frac{\left[(b+zy)y\right]^{3/2}}{(b+2zy)^{1/2}}$$

$$\frac{Z}{(b)^{2.5}} = \frac{\left[\left(1+zy/b\right)\left(y/b\right)\right]^{1.5}}{\left(1+2zy/b\right)^{0.5}} = g\left(\frac{y}{b}, z\right)$$



$$\frac{Q^2}{g}=\frac{A_c^3}{T_c} \longrightarrow \frac{Q^2}{g} = Z_c \longrightarrow \frac{Q}{\sqrt{g}b^{2.5}} = \frac{Z_c}{b^{2.5}}$$



مقادیر $Z/b^{2.5}$ برای مقاطع ذوزنقه‌ای
0.001
0.01
0.1
1
10
100
10
8
6
4
2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0.01
مقادیر y/b و y/d_0
مستطیلی
z = 0
z = 0.5
z = 1.0
z = 1.5
z = 2.0
z = 2.5
z = 3.0
z = 4.0
y
1
z
b
دایره‌ای
y
d_0
0.0001
0.001
0.01
0.1
1
10
مقادیر $Z/d_0^{2.5}$ برای مقاطع دایره‌ای

مثال

در دو حالت زیر عرض کف را به گونه‌ای محاسبه نمایید که کانال دبی $۱۵ m^۳/s$ را با عمق بحرانی $۱/۲ m$ جریان دهد.

الف: کانال مستطیلی

ب: کانال ذوزنقه‌ای با شیب کناره $z = ۱/۵$

الف: در مقطع مستطیلی شکل روابط به صورت زیر می‌باشند:

$$y_c = \left(\frac{q^۲}{g}\right)^{۱/۳} \Rightarrow ۱/۲ = \left(\frac{q^۲}{۹/۸۱}\right)^{۱/۳} \Rightarrow q = ۴/۱۱۷ \ m^۳/s.m$$

$$q = \frac{Q}{b} \Rightarrow ۴/۱۱۷ = \frac{۱۵}{b} \Rightarrow b = ۳/۶۴۳ \ m$$

حل ب: در کانال ذوزنقه‌ای شرط بحرانی بودن مقطع به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{Q^۲}{g} = \frac{A_c^۳}{T_c}$$

$$A_c = (b + ۱/۵ \times ۱/۲)۱/۲ = (b + ۱/۸)۱/۲$$

$$T_c = (b + ۲ \times ۱/۵ \times ۱/۲) = (b + ۳/۶)$$

$$\frac{۱۵^۲}{۹/۸۱} = \frac{(b + ۱/۸)^۳ \times ۱/۲^۳}{b + ۳/۶}$$

آزمون و خطا $\rightarrow b = ۲/۵۳۵ \ m$

مثال

در یک کانال ذوزنقه‌ای به عرض کف ۲٫۰m و شیب کناره‌های ۱:۱ عمق بحرانی و نیز ماکزیمم دبی عبوری در این حالت را برای انرژی مخصوصی معادل ۱٫۵m پیدا نمایید.

$$E_{min} = y_c + \frac{۱}{۲} D_c$$

$$۱٫۵ = y_c + \frac{(۲ + y_c)y_c}{۲(۲ + ۲y_c)} \xrightarrow{\text{آزمون و خطا}} y_c = ۱٫۰۹۵ \text{ m}$$

$$E_{min} = y_c + \frac{۱}{۲} D_c = y_c + \frac{V_c^۲}{۲g} \Rightarrow \frac{V_c^۲}{۲g} = \frac{۱}{۲} D_c$$

$$\frac{V_c^۲}{۲g} = (۱٫۵ - ۱٫۰۹۵) \Rightarrow V_c = ۲٫۸۲ \text{ m/s}$$

$$A_c = (۲ + ۱٫۰۹۵)۱٫۰۹۵ = ۳٫۳۹ \text{ m}^۲$$

$$Q_{max} = V_c A_c = ۲٫۸۲ \times ۳٫۳۹ = ۹٫۵۰۵ \text{ m}^۳\text{/s}$$