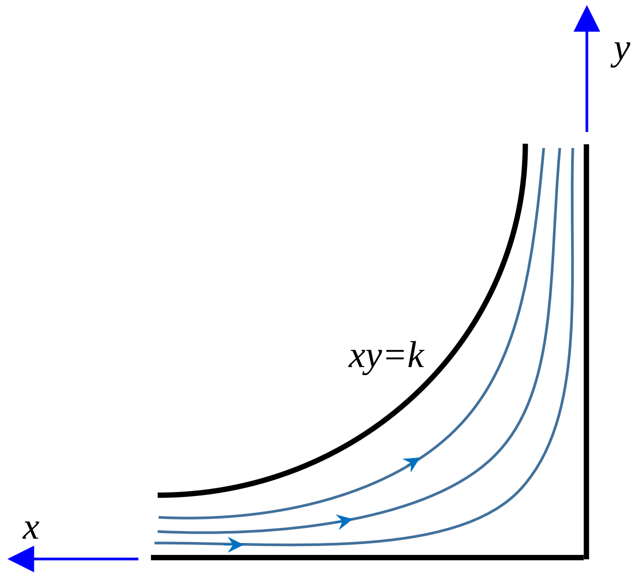
- در جریان دو بعدی ساده ای مرز فوقانی هذلولی قائم الزاویه با معادله $xy = k$ می باشد. اگر مولفه های اسکالر میدان سرعت

$$V_x = -Ax\ ,\ V_y = Ay\ ,\ V_z = 0 \quad (A\text{=cte})$$

باشد، معادله خطوط جریان (streamline)، مسیر جریان (pathline) و بردار شتاب را بدست آورید.



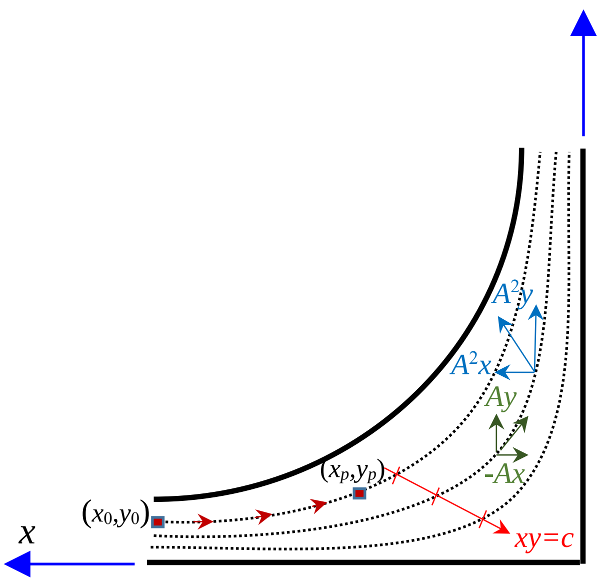
جواب:

معادله خطوط جریان:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_y}{V_x} = \frac{Ay}{-Ax} = \frac{-y}{x} \qquad \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x} \qquad \ln y = -\ln x + \ln c \qquad \ln xy = \ln c$$

$$\boxed{xy = c} \qquad (0 \le c \le k)$$

مشابه مرز فوقانی خطوط جریان نیز هذلولی قائم الزاویه هستند.



معادله مسیر حرکت ذراتی که در لحظه t=0 در نقطه (x_0,y_0) قرار دارند (مسیر جریان):

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = -Ax \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = Ay \end{cases} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x_p} \frac{dx}{x} = \int_0^t -Adt \\ \displaystyle\int_{y_0}^{y_p} \frac{dy}{y} = \int_0^t Adt \end{cases} \qquad \begin{cases} \ln \dfrac{x_p}{x_0} = -At \\ \ln \dfrac{y_p}{y_0} = At \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x_p = x_0 e^{-At} \\ y_p = y_0 e^{At} \end{cases}}$$

با حذف t از معادله فوق: $\quad x_p y_p = x_0 y_0 = c'$

مشاهده می شود که مسیر جریان و خطوط جریان بر هم منطبق هستند (در جریان دائمی خطوط جریان، مسیر جریان و خطوط تمایل بر هم منطبق هستند).

بردار شتاب برابر است با:

$$\vec{a}=V_x\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}+V_y\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}+V_z\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$$
$$=-Ax(-A\vec{i})+Ay(A\vec{j})=A^2x\vec{i}+A^2y\vec{j}=\boxed{A^2x\vec{i}+A^2y\vec{j}}$$

جریان دائمی است و تنها شتاب انتقالی وجود دارد.

با استفاده از دیدگاه لاگرانژ نیز همین نتیجه برای بردار شتاب بدست می آید:

$$\begin{cases} v_{xp}=-Ax_p=-Ax_0e^{-At} \\ v_{yp}=Ay_p=Ay_0e^{At} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{xp}=\dfrac{dv_{xp}}{dt}=A^2x_0e^{-At}=A^2x \\ a_{yp}=\dfrac{dv_{yp}}{dt}=A^2y_0e^{At}=A^2y \end{cases} \qquad \vec{a}=A^2x\vec{i}+A^2y\vec{j}$$