• بردار سرعت در جریانی دو بعدی به صورت $\vec{V}=ax(1+bt)\vec{i}+cy\vec{j}$ می‌باشد.

الف- معادله عمومی مسیر جریان (pathline) و خط تمایل (streakline) ذرات عبوری از نقطه (x_1,y_1) را بدست آورید.

ب- با فرض $a=c=1\ \ 1/s$ و $b=0.2\ \ 1/s$، خط تمایل ذرات عبوری از نقطه $(1,1)$ را در لحظات $t=2$ s ($0\le t\le 2$) و $t=3$ s ($0\le t\le 3$) بدست آورید.

جواب:

الف- معادله مسیر حرکت ذراتی که در لحظه $t=t_0$ در نقطه (x_0,y_0) قرار دارند (مسیر جریان):

$$\begin{cases} v_x=\dfrac{dx}{dt} \\ v_y=\dfrac{dy}{dt}\end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=ax(1+bt) \\ \dfrac{dy}{dt}=cy\end{cases} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}=\int_{t_0}^{t}a(1+bt) \\ \displaystyle\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y}=\int_{t_0}^{t}cdt\end{cases} \qquad \begin{cases} \ln\dfrac{x}{x_0}=a[(t-t_0)+\dfrac{b}{2}(t^2-t_0^2)] \\ \ln\dfrac{y}{y_0}=c(t-t_0)\end{cases}$$

$$\begin{cases} x=x_0e^{a[(t-t_0)+\frac{b}{2}(t^2-t_0^2)]} \\ y=y_0e^{c(t-t_0)}\end{cases} \qquad \text{(I)}$$

برای تعیین معادله خطوط تمایل ابتدا معادله مسیر حرکت ذراتی که در لحظه $t=\tau$ از نقطه (x_1,y_1) عبور می کنند بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_1=x_0e^{a[(\tau-t_0)+\frac{b}{2}(\tau^2-t_0^2)]} \\ y_1=y_0e^{c(\tau-t_0)}\end{cases} \qquad \text{(II)}$$

با حذف (x_0,y_0) از مجموعه معادلات (I) و (II) معادله موقعیت ذرات مختلفی بدست می‌آید که از نقطه (x_1,y_1) عبور کرده و درلحظه t در موقعیت جدید قرار گرفته‌اند. معادله خطوط تمایل در لحظه t برابر است با:

$$\boxed{\begin{cases} x=x_1e^{a[(t-\tau)+\frac{b}{2}(t^2-\tau^2)]} \\ y=y_1e^{c(t-\tau)}\end{cases}} (t_0<\tau<t)$$

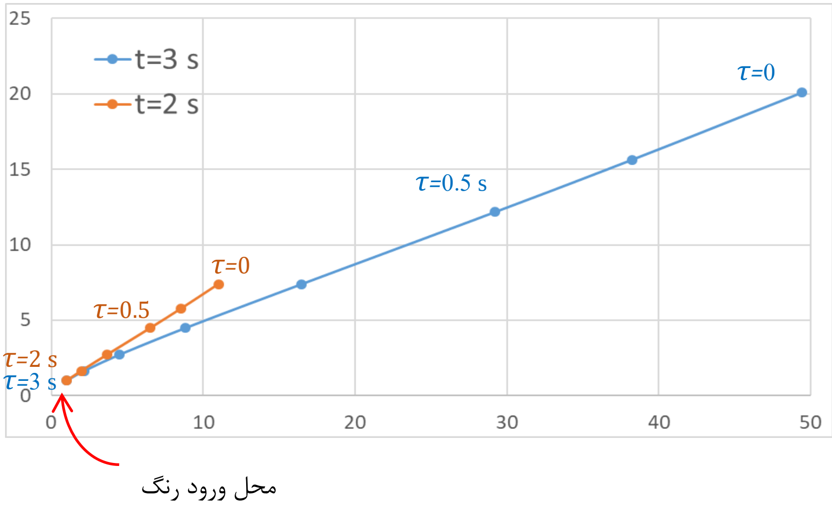
ب- با فرض $a=c=1\ \ 1/s$، $b=0.2\ \ 1/s$ و $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1\end{cases}$، خط تمایل ذرات عبوری از نقطه $(1,1)$ در زمانهای $t=2$ s و $t=3$ s :

$$\begin{cases} x=e^{[(2-\tau)+0.1(4-\tau^2)]} \\ y=e^{(2-\tau)}\end{cases} \quad (0\le\tau\le 2\text{ s}) \qquad\qquad \begin{cases} x=e^{[(3-\tau)+0.1(9-\tau^2)]} \\ y=e^{(3-\tau)}\end{cases} \quad (0\le\tau\le 3\text{ s})$$

با جایگذاری τ در معادلات فوق در بازه های مورد نظر می توان خطوط تمایل را رسم کرد.

τ (t=2)	x	y
0	11.02	7.39
0.25	8.53	5.75
0.5	6.52	4.48
1	3.67	2.72
1.5	1.96	1.65
2	1.00	1.00

τ (t=3)	x	y
0	49.40	20.09
0.25	38.23	15.64
0.5	29.22	12.18
1	16.44	7.39
1.5	8.80	4.48
2	4.48	2.72
2.5	2.17	1.65
3	1.00	1.00



معادله عمومی خطوط تمایل در لحظه t با حذف τ از معادلات فوق بدست می‌آید:

$$\ln\frac{y}{y_1}=c(t-\tau) \qquad t-\tau=\frac{1}{c}\ln(\frac{y}{y_1}) \qquad \tau=t-\frac{1}{c}\ln(\frac{y}{y_1})$$

با جایگذاری در معادله اول و با توجه به این که $(e^x)^y=e^{xy}$:

$$x=x_1e^{a(t-\tau)}\times e^{\frac{b}{2}(t-\tau)(t+\tau)} \qquad x=x_1e^{a[\frac{1}{c}\ln(\frac{y}{y_1})]}\times e^{\frac{b}{2}[\frac{1}{c}\ln(\frac{y}{y_1})][2t-\frac{1}{c}\ln(\frac{y}{y_1})]} \qquad x=x_1(\frac{y}{y_1})^{\frac{a}{c}}\times[(\frac{y}{y_1})^{\frac{b}{2c}}]^{[2t-\frac{1}{c}\ln(\frac{y}{y_1})]}$$

$$\boxed{x=x_1(\frac{y}{y_1})^{\{\frac{a}{c}+\frac{b}{2c}[2t-\frac{1}{c}\ln(\frac{y}{y_1})]\}}}$$

و معادله خط تمایل ذرات عبوری از نقطه (1,1) در زمانهای t=2 s و t=3 s (با فرض a=c=1 1/s ، b=0.2 1/s):

$$t=2\ \text{s}: \quad x=y^{[1+0.1(4-\ln y)]} \qquad t=3\ \text{s}: \quad x=y^{[1+0.1(6-\ln y)]}$$

که با رسم آن در محدوده $0\le\tau\le 2$ (متناظر با $1\le y\le 7.39$ یا $1\le x\le 11.02$) و $0\le\tau\le 3$ (متناظر با $1\le y\le 20.09$ یا $1\le x\le 49.4$) همان منحنی های بالا بدست می آید.