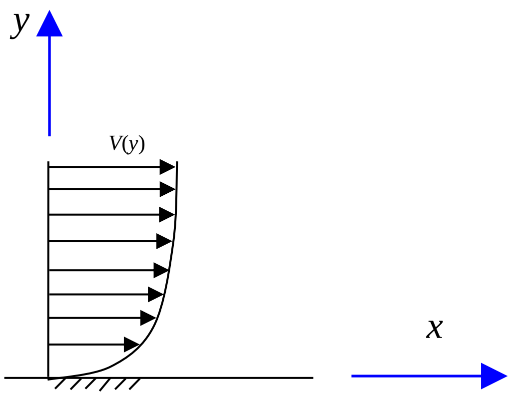
- در جریان دو بعدی روبرو تانسور نرخ کرنش، بردار چرخش را بدست آورید.



جواب:

تانسور نرخ کرنش در جریان سه بعدی برابر است با:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{xz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{yx}}{2} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{zx}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{zy}}{2} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$$

با توجه به بردار سرعت $\vec{v}(v_x, 0, 0)$ در جریان موازی:

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (\text{تنها تابعی از } y \text{ است } v_x) \qquad \dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad \dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

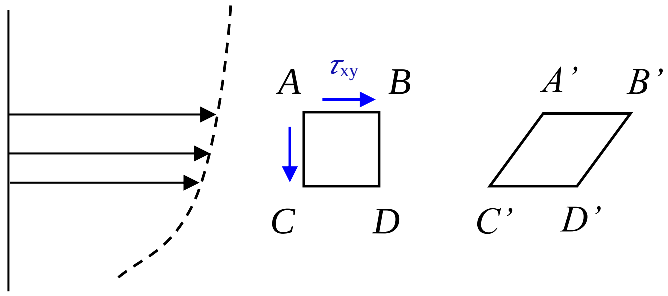
$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{xz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{yx}}{2} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{zx}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{zy}}{2} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_x}{\partial y}) & 0 \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_x}{\partial y}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_x}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_x}{\partial y}) & 0 \end{bmatrix}$$

بردار چرخش در جریان سه بعدی برابر است با:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z})\vec{i} + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x})\vec{j} + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y})\vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{\omega} = \frac{-1}{2}(\frac{\partial v_x}{\partial y})\vec{k}$$

با توجه به تغییر شکل المان $ABCD$ در اثر تنش برشی $\tau_{xy} = \mu(\frac{\partial v_x}{\partial y})$ مشاهده می شود که نرخ کرنشهای عمودی صفر بوده و تنها کرنش برشی وجود دارد. همچنین با توجه به عدم چرخش ضلع CD و دوران ضلع AC (با نرخ $\frac{\partial v_x}{\partial y}$)، المان در جهت عقربه های ساعت با سرعت زاویه ای $\frac{1}{2}(\frac{\partial v_x}{\partial y})$ دوران می کند.



می توان نشان داد که اگر به جای سیستم مختصات xy از دستگاه مختصات $x'y'$ (با زاویه ۴۵ درجه نسبت به دستگاه xy) استفاده شود، کرنشهای عمودی و برشی در المان جدید تغییر کرده ولی نرخ دوران المان تفاوتی با محاسبه فوق ندارد.