- چرخشی بودن جریان در مختصات قطبی (r, θ) را در دو حالت زیر بررسی کنید:

الف- $\vec{v} = \omega r \vec{e}_\theta$

ب- $\vec{v} = {C}/{r}\, \vec{e}_\theta$

جواب:

بردار سرعت $\vec{v}$، عملگر del $(\vec{\nabla})$ و بردار کِرل $(curl\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v})$ در سیستم مختصات قطبی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\vec{v} = v_r(r,\theta)\vec{e}_r + v_\theta(r,\theta)\vec{e}_\theta$$

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{v} &= (\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}) \times (v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta) \\ &= (\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}v_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta})\vec{k}\end{aligned}$$

الف)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{v} &= (\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}v_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta})\vec{k} \\ &= (\omega + \omega)\vec{k} = 2\omega\vec{k} \neq 0\end{aligned}$$

پس جریان چرخشی است. سرعت زاویه ای دوران المانها در این جریان برابر با ω است:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \omega\vec{k}$$

ب)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{v} &= (\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}v_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta})\vec{k} \\ &= (\frac{-C}{r^2} + \frac{C}{r^2})\vec{k} = 0\end{aligned}$$

بنابراین جریان در این حالت غیرچرخشی است.