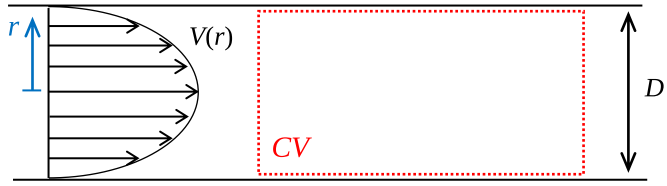
- مطابق شکل پروفیل سرعت در جریان لزج دائمی داخل لوله با رابطه $\text{(m/s)} \quad V(r) = -C(r^2 - \frac{D^2}{4})$ که در آن C مقداری ثابت ($C > 0$) است نشان داده می شود. دبی جرمی ($\dot{m}$) و انرژی جنبشی عبوری از سمت چپ حجم کنترل را بدست آورید.



جواب:

در سمت چپ حجم کنترل بردارهای $\vec{V}$ و $\vec{dA}$ مختلف الجهت هستند. با توجه به اینکه $\eta = \frac{dm}{dm} = 1$:

$$\iint_{left} \eta(\rho \vec{V}.d\vec{A}) = \iint_{left} -\rho V.dA = -\rho \int_0^{D/2} [-C(r^2 - \frac{D^2}{4}).(2\pi r dr)]$$

$$= 2\pi\rho C \int_0^{D/2} r(r^2 - \frac{D^2}{4}) dr$$

$$= 2\pi\rho C \left| [\frac{r^4}{4} - \frac{r^2 D^2}{8}] \right|_0^{D/2}$$

$$= \frac{-\pi\rho C D^4}{32} \quad \text{kg/s}$$

که در آن علامت منفی به معنی ورود جرم به حجم کنترل است. برای محاسبه انرژی جنبشی ورودی:

$$N = \tfrac{1}{2} m V^2 \qquad \eta = \frac{dN}{dm} = \frac{\tfrac{1}{2} dm V^2}{dm} = \tfrac{1}{2} V^2$$

$$\iint_{left} \eta(\rho \vec{V}.d\vec{A}) = \iint_{left} \tfrac{1}{2} V^2 (-\rho V.dA) = \frac{-\rho}{2} \int_0^{D/2} \{[-C(r^2 - \frac{D^2}{4})]^3.(2\pi r dr)\}$$

$$= \pi\rho C^3 \int_0^{D/2} (r^2 - \frac{D^2}{4})^3 r dr$$

$$= \frac{\pi\rho C^3}{8} \left| (r^2 - \frac{D^2}{4})^4 \right|_0^{D/2}$$

$$= \frac{-\pi\rho C^3 D^8}{2048} \quad \text{N.m/s}$$

علامت منفی به معنی ورود انرژی به حجم کنترل است.