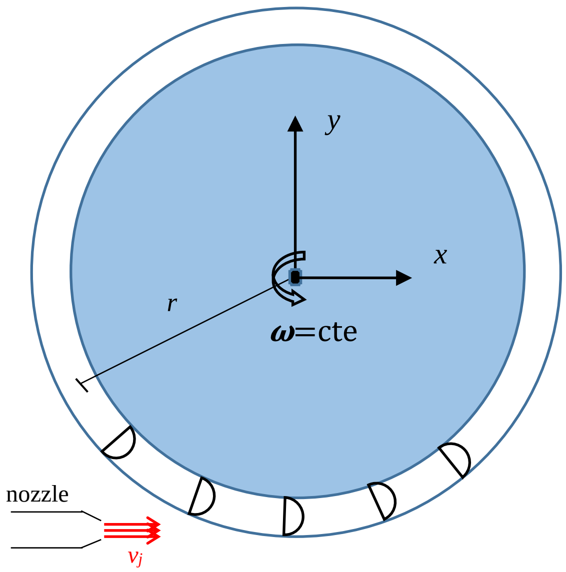
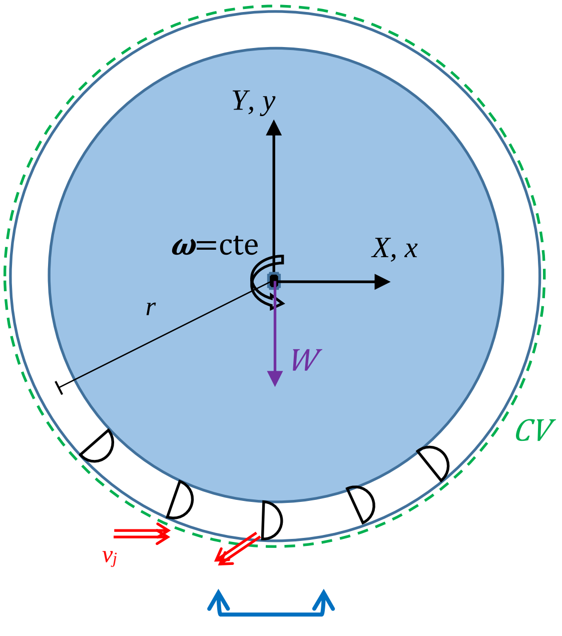
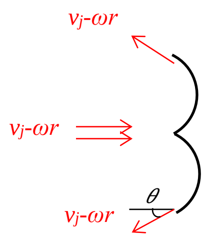
- مطابق شکل جت آب خروجی از نازل (nozzle) به پره های چرخ پلتون برخورد می کند. اگر سرعت جت v_j، دبی ورودی Q و سرعت دوران چرخ مقدار ثابت ω باشد، با استفاده از حجم کنترل غیر اینرسیال گشتاور اعمال شده به چرخ را بدست آورید. از تغییر سرعت آب در داخل پره ها صرفنظر می شود.



جواب:

حجم کنترل دوار (غیر اینرسیال) استوانه ای شکلی را در نظر می گیریم که توربین را در بر گرفته و با سرعت زاویه ای ω دوران می کند. جت آب با سرعت نسبی v_j-ωr به وسط پره ها برخورد کرده و از دو طرف با همین سرعت (نسبت به پره) خارج می شود. با نوشتن معادله لنگر اندازه حرکت حول محور دوران توربین:





دید از بالا/پایین پره (A-A)

$$\vec{M}_S+\vec{M}_B-\iiint_{CV}\left[\vec{r}\times[\ddot{\vec{R}}+\cancelto{0}{2\times\vec{\omega}\times\vec{v}_{xyz}}+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})]\right]\rho dV=\oiint_{CS}(\vec{r}\times\vec{v}_{xyz})(\rho\vec{v}_{xyz}.d\vec{A})+\frac{\partial}{\partial t}_{xyz}\iiint_{CV}\cancelto{0}{(\vec{r}\times\vec{v}_{xyz})(\rho dV)}$$

در جریان دائمی جمله آخر صفر است. لنگر نیروهای فرضی هم از معادله حذف می شود زیرا $\ddot{\vec{R}}=\dot{\vec{\omega}}=0$ بوده، بردار ضرب خارجی $\vec{\omega}\times\vec{v}_{xyz}$ (توجه شود که $\vec{v}_{xyz}$ جت جریان داخل حجم کنترل را نشان می‌دهد که راستای آن افقی است) در جهت خلاف بردار $\vec{r}$ است ($\vec{r}\times\vec{\omega}\times\vec{v}_{xyz}=\bar{r}\vec{e}_{\bar{r}}\times(-\omega v_{xyz}\vec{e}_{\bar{r}})=0$) و بردارهای $\vec{r}$ و $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ نیز برای تمام جزء جرمهای داخل حجم کنترل همراستا و مختلف الجهت هستند ($\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=-\bar{r}\omega^2\vec{e}_{\bar{r}}$,$\vec{r}=\bar{r}\vec{e}_{\bar{r}}$).

فشار اتمسفر در پیرامون حجم کنترل در حالت تعادل بوده و نیرو یا لنگری به محور توربین اعمال نمی کند. وزن توربین هم از محور آن عبور کرده و لنگر حاصل از آن حول محور چرخ صفر است. اگر گشتاور اعمال شده از محور چرخ به حجم کنترل را با M_{shaft} نشان دهیم:

$$\vec{M}_S + \vec{M}_B = \oiint_{CS} (\vec{r} \times \vec{v}_{xyz})(\rho \vec{v}_{xyz} . d\vec{A})$$

$$M_{shaft} = \oiint_{CS} [\bar{r}(v_\theta)_{xyz}(\rho \vec{v}_{xyz} . d\vec{A})]$$

اما در این مثال دبی جرمی ورودی به حجم کنترل دوار (غیر اینرسیال)/خروجی از آن تفاوتی با دبی جرمی ورودی به حجم کنترل ساکن/خروجی از آن ندارد (دوران حجم کنترل در نرخ ورود جرم بی تاثیر است)، بنابر این

$$\iint_{in} (\rho \vec{v}_{xyz} . d\vec{A}) = \iint_{in} (\rho \vec{v} . d\vec{A}) = -\rho Q \quad \text{و} \quad \iint_{out} (\rho \vec{v}_{xyz} . d\vec{A}) = \iint_{out} (\rho \vec{v} . d\vec{A}) = \rho Q$$

اگرجهت خلاف عقربه های ساعت مثبت فرض شود:

$$M_{shaft} = \oiint_{CS} [\bar{r}(v_\theta)_{xyz}(\rho \vec{v} . d\vec{A})] = r(v_j - \omega r)(-\rho Q) + r[-(v_j - \omega r)\cos\theta](\rho Q) = r\rho Q(\omega r - v_j)(1 + \cos\theta)$$

لنگر وارده از طرف جت آب (حجم کنترل) به محور توربین خلاف جهت این لنگر می باشد:

$$\boxed{T_{shaft} = r\rho Q(v_j - \omega r)(1 + \cos\theta)} \quad > 0$$