- نشان دهید توزیع سرعتی که با رابطه $V_y = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $V_x = \frac{-x}{x^2+y^2}$ نمایش داده می شود، در جریان غیر قابل تراکم دوبعدی معادله پیوستگی را اقناع می کند.

جواب:

در جریان غیر قابل تراکم:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial(\frac{-x}{x^2+y^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{-y}{x^2+y^2})}{\partial y}$$

$$= \frac{-(x^2+y^2)-2x(-x)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-(x^2+y^2)-2y(-y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

در این جریان خطوط جریان به فرم $y=kx$ بوده و بردارهای سرعت با نزدیک شدن به مبدا مختصات بزرگتر می شوند.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_y}{V_x} = \frac{\frac{-y}{x^2+y^2}}{\frac{-x}{x^2+y^2}} = \frac{y}{x} \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \qquad \ln y = \ln x + \ln k \qquad y = kx$$

سرعت جریان در نقطه (x_1, y_1) واقع بر محیط دایره ای به شعاع r_1 برابر است با:

$$V(x_1,y_1) = \sqrt{(V_x^2+V_y^2)} = \sqrt{(\frac{-x_1}{x_1^2+y_1^2})^2 + (\frac{-y_1}{x_1^2+y_1^2})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{x_1^2+y_1^2}} = \sqrt{\frac{1}{r_1^2}} = \frac{1}{r_1}$$

و دبی عبوری از محیط این دایره (خط چین بنفش):

$$Q = VA = \frac{1}{r_1}(2\pi r_1) = 2\pi$$

مشاهده می شود که این دبی عبوری مستقل از شعاع دایره بوده و برای تمام دوایر مقدار ثابتی است (معادله پیوستگی).