

- نشان دهید توزیع سرعتی که با رابطه $V_x = \frac{-x}{x^2 + y^2}$, $V_y = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ نمایش داده می شود، در جریان غیر قابل تراکم دویعدی معادله پیوستگی را اقلان می کند.

جواب:

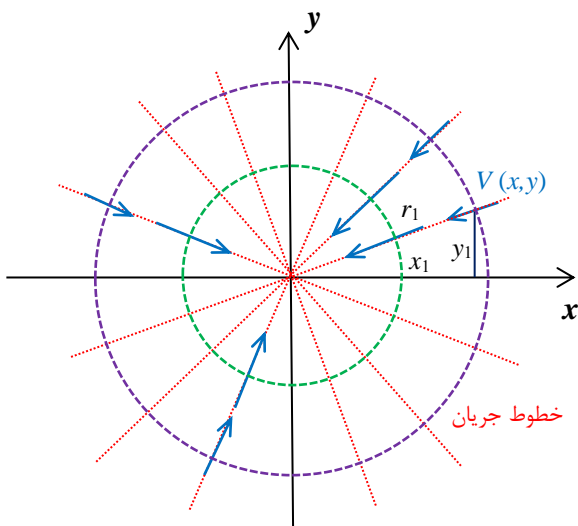
$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

در جریان غیر قابل تراکم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= \frac{\partial\left(\frac{-x}{x^2 + y^2}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)}{\partial y} \\ &= \frac{-(x^2 + y^2) - 2x(-x)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-(x^2 + y^2) - 2y(-y)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

در این جریان خطوط جریان به فرم $y=kx$ بوده و بردارهای سرعت با نزدیک شدن به مبدا مختصات بزرگتر می شوند.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_y}{V_x} = \frac{\frac{-y}{x^2 + y^2}}{\frac{-x}{x^2 + y^2}} = \frac{y}{x} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \ln y = \ln x + \ln k \quad y = kx$$



سرعت جریان در نقطه (x_1, y_1) واقع بر محیط دایره ای به شعاع r_1 برابر است با:

$$\begin{aligned} V(x_1, y_1) &= \sqrt{(V_x^2 + V_y^2)} = \sqrt{\left(\frac{-x_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)^2 + \left(\frac{-y_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{x_1^2 + y_1^2}} = \sqrt{\frac{1}{r_1^2}} = \frac{1}{r_1} \end{aligned}$$

و دبی عبوری از محیط این دایره (خط چین بنفش):

$$Q = VA = \frac{1}{r_1} (2\pi r_1) = 2\pi$$

مشاهده می شود که این دبی عبوری مستقل از شعاع دایره بوده و برای تمام دواير مقدار ثابتی است (معادله پیوستگی).