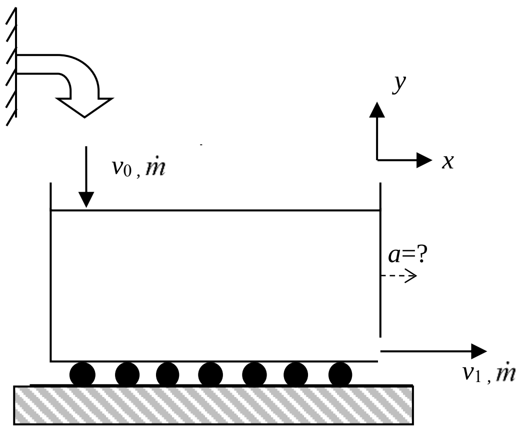


مطابق شکل ظرف روبازی محتوی آب بر روی سطح بدون اصطکاکی ساکن است. در این وضعیت دبی جرمی $\dot{m}$ با سرعت v_0 از شیر ساکنی در راستای قائم داخل ظرف ریخته شده و همزمان آب با سرعت v_1 (نسبت به ظرف) در راستای افقی از آن خارج می‌شود. اگر جرم اولیهٔ ظرف و آب محتوی آن M فرض شود، سرعت و شتاب ظرف را با فرض ثابت ماندن حجم آب داخل آن بدست آورید.

موفق باشید

سلطانپور

روابط: $\dot{m} = \rho AV$

قانون بقای جرم: $\oint\!\!\oint_{CS} \rho\vec{v}.d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} \rho dV = 0$

اندازه حرکت خطی(حجم کنترل اینرسیال):

$$\oint\!\!\oint_{cs} \vec{T}dA + \iiint_{cv} \vec{B}\rho dv = \oint\!\!\oint_{cs} \vec{V}(\rho\vec{V}.d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{cv} \vec{V}(\rho dv)$$

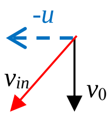
$$\sum \vec{F} = \rho Q(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

اندازه حرکت خطی(حجم کنترل غیراینرسیال):

$$\oint\!\!\oint_{cs} \vec{T}dA + \iiint_{cv} \vec{B}\rho dv - \iiint_{cv} [\ddot{\vec{R}} + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})]\rho dv = \oint\!\!\oint_{cs} \vec{V}_{xyz}(\rho\vec{V}_{xyz}.d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}_{xyz}\iiint_{cv} \vec{V}_{xyz}(\rho dv)$$

جواب

حجم کنترل غیر اینرسیالی در نظر می‌گیریم (x,y) که ظرف را در بر گرفته و با آن در راستای مثبت x با سرعت u حرکت می‌کند. با فرض کوچک بودن جت آب از تغییر اندازه حرکت آن در زمان می‌توان صرفنظر کرد. سرعت مطلق آب خروجی از شیر که در راستای قائم وارد ظرف می شود برابر v_0 است. سرعت نسبی ورودی به حجم کنترل را از جمع برداری $\vec{v}_0$ و $-\vec{u}$ می توان بدست آورد:

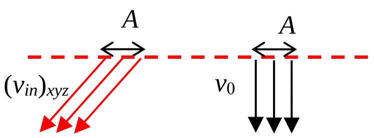


$$(\vec{v}_{in})_{xyz} = \vec{v}_0 - \vec{u} = \vec{v}_0 + (-\vec{u})$$

سرعت نسبی آب خروجی از ظرف هم برابر $\vec{v}_1$ فرض شده است (سرعت جت آب خروجی نسبت به حجم کنترل متحرک یا ظرف):

$$(\vec{v}_{out})_{xyz} = \vec{v}_1$$

با توجه به ثابت بودن حجم آب داخل ظرف و قانون بقای جرم، دبی (یا دبی جرمی) ورودی به حجم کنترل غیر اینرسیال با دبی خروجی از آن برابر است. سطح تماس جت و سطح کنترل در دو حال یکی است و فقط در حجم کنترل ساکن مطابق با شکل این سطح (خیس شده) با سرعت u حرکت می کند:

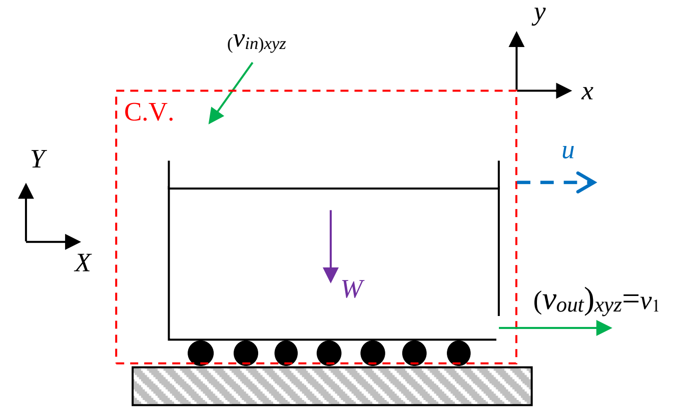


$$\oint\!\!\oint_{cs} (\rho\vec{V}_{xyz}.d\vec{A}) = 0 \qquad \iint_{A_{in}} (\rho(\vec{v}_{in})_{xyz}.d\vec{A}) + \iint_{A_{out}} (\rho(\vec{v}_{out})_{xyz}.d\vec{A}) = 0$$

$$\iint_{A_{in}} (\rho(\vec{v}_{in})_{xyz}.d\vec{A}) = \iint_{A_{in}} \rho[(\vec{v}_0 - \vec{u}).d\vec{A}] = \rho v_0 A$$ (دبی ورودی به حجم کنترل متحرک و ساکن برابر است)

$$\Longrightarrow \quad -\rho v_0 A_{in} + \rho v_1 A_{out} = 0 \qquad \rho v_0 A_{in} = \rho v_1 A_{out} = \dot{m}$$

با در نظر گرفتن قانون اندازه حرکت خطی برای حجم کنترل غیر اینرسیال در راستای x :



$$\oint_{cs} \vec{T}dA + \iiint_{cv} \vec{B}\rho dv - \iiint_{cv} [\ddot{\vec{R}} + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})]\rho dv = \oint_{cs} \vec{V}_{xyz}(\rho\vec{V}_{xyz}.d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}_{xyz} \iiint_{cv} \vec{V}_{xyz}(\rho dv)$$

$$-\iiint_{cv} [\ddot{R}]_x \rho dv = \oint_{cs} (V_{xyz})_x (\rho\vec{V}_{xyz}.d\vec{A})$$

$$-a_x M = \iint_{in} (V_{xyz})_x (\rho\vec{V}_{xyz}.d\vec{A}) + \iint_{out} (V_{xyz})_x (\rho\vec{V}_{xyz}.d\vec{A}) = (-u)(-\dot{m}) + (v_1)(\dot{m}) = (v_1 + u)\dot{m}$$

$$-\frac{du}{dt}M = (v_1 + u)\dot{m}$$

$$>>>> \quad \frac{du}{(v_1+u)} = -\frac{\dot{m}dt}{M} \qquad \int_0^u \frac{du}{(v_1+u)} = \int_0^t \frac{-\dot{m}dt}{M} \qquad \ln\left(\frac{v_1+u}{v_1}\right) = \frac{-\dot{m}t}{M}$$

$$\boxed{u = -v_1 + v_1 e^{\frac{-\dot{m}t}{M}}}$$

$$a_x = \frac{du}{dt} \quad \rightarrow \quad \boxed{a_x = \frac{-v_1\dot{m}}{M} e^{\frac{-\dot{m}t}{M}}}$$

در شروع حرکت: $\boxed{u_{t=0} = 0, \quad (a_x)_{t=0} = \frac{-v_1\dot{m}}{M}}$