

Fluid Properties

Mohsen Soltanpour

Email: soltanpour@kntu.ac.ir

URL: <http://sahand.kntu.ac.ir/~soltanpour/>

سیال (Fluid)

سیال ماده‌ای است که می‌تواند سیلان داشته باشد (جاری شود). در علم سیالات سیال ماده‌ای است که اگر تحت تاثیر تنش برشی مماسی قرار گیرد بطور پیوسته تغییر شکل می‌دهد، هر چند تنش برشی اندک باشد.

از ابتدایی‌ترین تعاریف برای سیال بی‌شکل بودن و تبعیت از شکل ظرف است که از عدم تحمل تنش برشی ناشی می‌شود.

مکانیک سیالات رفتار سیالات ساکن (static) یا متحرک (dynamic) را بررسی می‌کند.

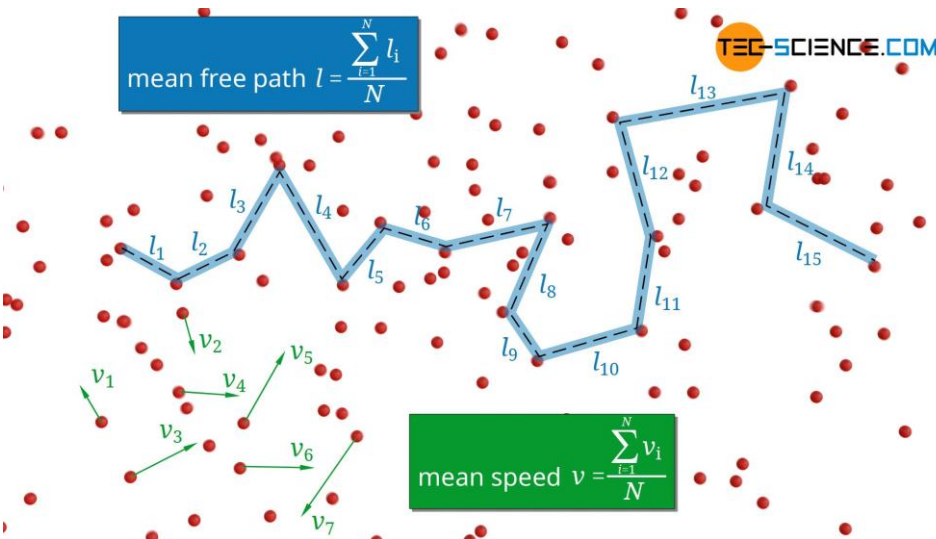
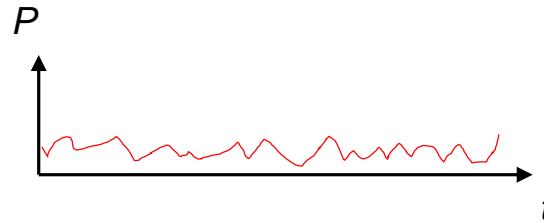
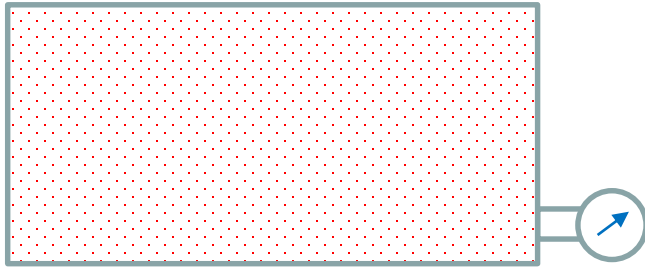
سیال حالات مایع (liquid) و گاز (gas) یا بخار را شامل می‌گردد.

تراکم پذیر
compressible

تراکم ناپذیر (جرم مخصوص ثابت)
incompressible

محیط پیوسته (Continuum)

به جای تلفیق پیچیده اثرات واقعی ملکولهای مجزا از توزیع پیوسته فرضی ماده (محیط پیوسته) استفاده می شود. روش محیط پیوسته هنگامی که مسیر متوسط آزاد ملکولها (mean free path) با کوچکترین طول با معنی مسئله هم مرتبه باشد بکار نمی آید. مثلا در حالتی که مقدار گاز کمی در محفظه بزرگی وجود دارد:



مسیر متوسط آزاد ملکولها متوسط فاصله ای است که ملکولهای سیال بین دو برخورد متوالی طی می کنند. این مسیر نه تنها به تراکم ملکولها بلکه به قطر آنها نیز بستگی دارد.

بعد (Dimension)

اختصاراتی است که برای بیان نموده‌های جسم استفاده می‌شود. ابعاد مستقل را ابعاد اصلی (primary units) و بقیه ابعاد را ابعاد فرعی یا ثانویه (secondary units) می‌نامند.

ابعاد اصلی (PRIMARY UNITS)

Quantity	Dimension	International System of Units (SI)*	U.S. Customary System (USCS)	cgs (سانتی متر-گرم-ثانیه)
طول (Length)	L	meter, m	foot, ft	cm
جرم (Mass)	M	kilogram, kg	slug, slug / pound mass, lbm	gram, g
زمان (Time)	T	second, s	second, s	second, s
حرارت درجه (Temperature)	θ	Kelvin, K	Rankin, R	Kelvin, K

اسلاگ مقدار جرمی است که تحت اثر ۱ lbf شتابی برابر 1 ft/s^2 می‌گیرد (1 slug = 32.2 lbm).**
 $g = 9.81 \text{ m/s}^2 = 32.2 \text{ ft/s}^2$

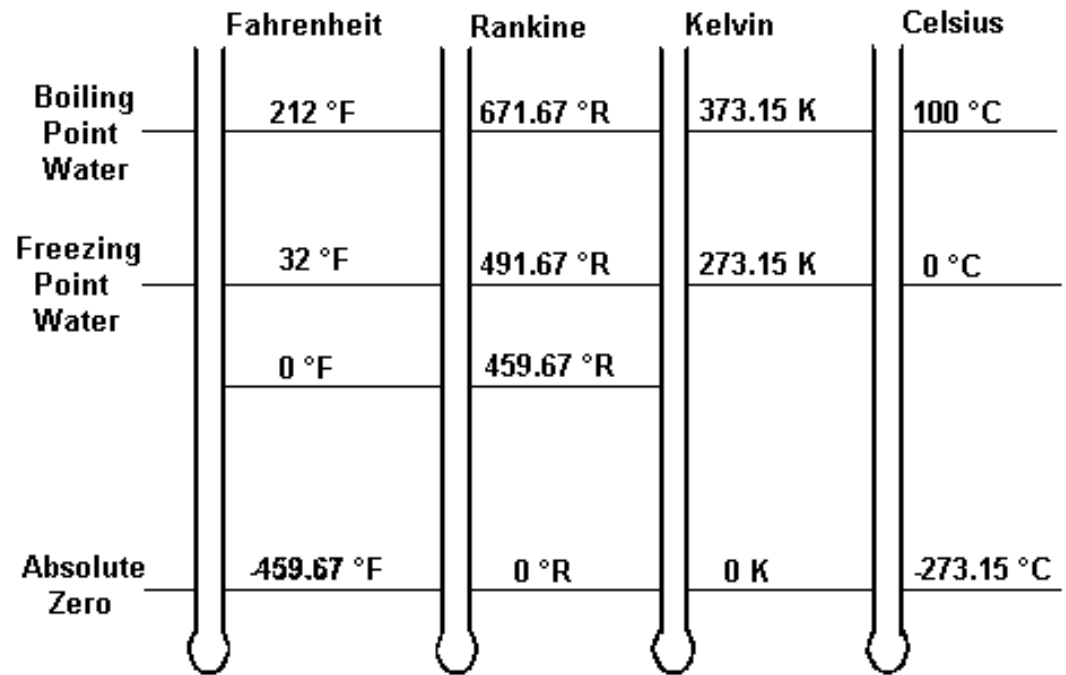
lb (پوند) یا lbm (پوند جرم) مقدار ماده‌ای است که سطح زمین آنرا با نیروی ۱ lbf به طرف خود می‌کشد (وزن آن ۱ lbf است).
یک پوند جرم برابر 0.453 کیلوگرم و یک پوند نیرو برابر 4.448 نیوتن است.

نیرو از ابعاد فرعی بوده و به ترتیب در سیستم SI، USCS و cgs از واحد نیوتن (N)، پوند نیرو (lbf) و دین (dyne, dyn) استفاده می‌شود. البته می‌توان به جای جرم از نیرو به عنوان واحد اصلی استفاده کرد.

رانکین مقیاسی برای درجه بندی حرارت است و همانند درجه بندی کلوین صفر رانکین، همان صفر مطلق می باشد ولی در تقسیم بندی درجات از مقیاس درجات فارنهایت استفاده می شود (تغییرات دما حسب رانکین با تغییرات دما حسب فارنهایت برابر است).

در حالی که محاسبات حرارت با درجه فارنهایت انجام می شود مقیاس رانکین در سیستم های مهندسی هنوز استفاده می گردد.

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{\circ}\text{K} = {}^{\circ}\text{C} + 273.15 \\ {}^{\circ}\text{K} = ({}^{\circ}\text{F} + 459.67) \times \frac{5}{9} \\ {}^{\circ}\text{K} = {}^{\circ}\text{R} \times \frac{5}{9} \end{array} \right.$$



$$\frac{F - 32}{180} = \frac{C}{100} = \frac{K - 273.15}{100} = \frac{R - 491.67}{180}$$

ابعاد فرعی (Secondary Units)

ابعاد فرعی زیادی وجود دارند که از ترکیب ابعاد اصلی تولید می‌شوند. مهمترین ابعاد فرعی در مکانیک سیالات عبارتند از:

Quantity	SI Unit	Dimension
سرعت (velocity)	m/s	LT^{-1}
شتاب (acceleration)	m/s^2	LT^{-2}
نیرو (force)	N kg m/s²	$M LT^{-2}$
انرژی/کار (energy/work)	Joule J N m, $kg m^2/s^2$	ML^2T^{-2}
توان (power)	Watt W N m/s $kg m^2/s^3$	ML^2T^{-3}
فشار/تنش (pressure/stress)	Pascal P, N/m^2 , $kg/(m.s^2)$	$ML^{-1}T^{-2}$
جرم مخصوص یا چگالی (density)	kg/m^3	ML^{-3}
وزن مخصوص (specific weight)	N/m^3 $kg/(m^2.s^2)$	$ML^{-2}T^{-2}$
چگالی نسبی (relative density)	بدون واحد	1 بی بعد

قانون همگنی ابعادی

معادلات اساسی فیزیک از نظر ابعادی همگن هستند. معادله همگن معادله‌ای است که از عملیات تحلیلی بدست آمده و مبین یک پدیده فیزیکی باشد و در تمام سیستم‌های آحاد معتبر است.

دانستن بعد کمیته‌ها جهت تبدیل واحدها از یک سیستم به سیستم دیگر ضروری است:

$$\rho \left(\frac{\text{t}}{\text{m}^3} \right) = \frac{1000 \text{ (kg)}}{(100)^3 \text{ (cm}^3)} = 10^{-3} \left(\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \right)$$

$$p \left(\frac{\text{lbf}}{\text{ft}^2} \right) = \frac{4.448 \text{ (N)}}{(0.3048)^2 \text{ (m}^2)} = 47.88 \text{ (pa)}$$

واحدهای طرفین یک معادله را می‌توان به سهولت کنترل کرد. چنانچه واحدها یکسان نباشند حتما اشتباهی روی داده است. مثلا امکان ندارد:

$$30 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m.s}} \right) = 30 \text{ (m)} \quad !$$

خواص مربوط به جرم

جرم مخصوص (Mass Density)

جرم مخصوص (ρ - "rho") با واحد Kg/m^3 جرم در واحد حجم را نشان می دهد.

بعد: ML^{-3}

مقادیر نمونه: (در دمای $288.15 \text{ }^\circ\text{K}$ ($4 \text{ }^\circ\text{C}$) و فشار $1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$)
آب = 1000 kg/m^3 (62.4 lbm/ft^3) جیوه = 13546 kg/m^3
هوا = 1.23 kg/m^3 روغن پارافین = 800 kg/m^3

تغییرات چگالی

هوا: تراکم پذیری بالا / تغییرات شدید چگالی

آب: تراکم پذیری پایین

چگالی مایعات تقریباً ثابت بوده اما با تغییر درجه حرارت و فشار مایع تغییر کمی می کند:

$$\rho = \rho(\text{liquid}, T, p)$$

$$T \uparrow \quad \rho \downarrow$$

$$p \uparrow \quad \rho \uparrow$$

وزن مخصوص (Specific Weight)

وزن مخصوص (γ - "gamma") با واحد N/m^3 وزن در واحد حجم را نشان می دهد:

$$\gamma = \rho g$$

که در آن g شتاب ثقل (9.81 m/s^2) است.

بعد: $\text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$

مقادیر نمونه: (در دمای $288.15 \text{ }^\circ\text{K}$ ($4 \text{ }^\circ\text{C}$) و فشار $1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$)

جیوه = 132.9 kN/m^3

روغن پارافین = 7.85 kN/m^3

آب = 9.79 kN/m^3

هوا = 11.8 N/m^3

چگالی نسبی (Relative Density)

نسبت وزن مخصوص سیال به وزن مخصوص آب:

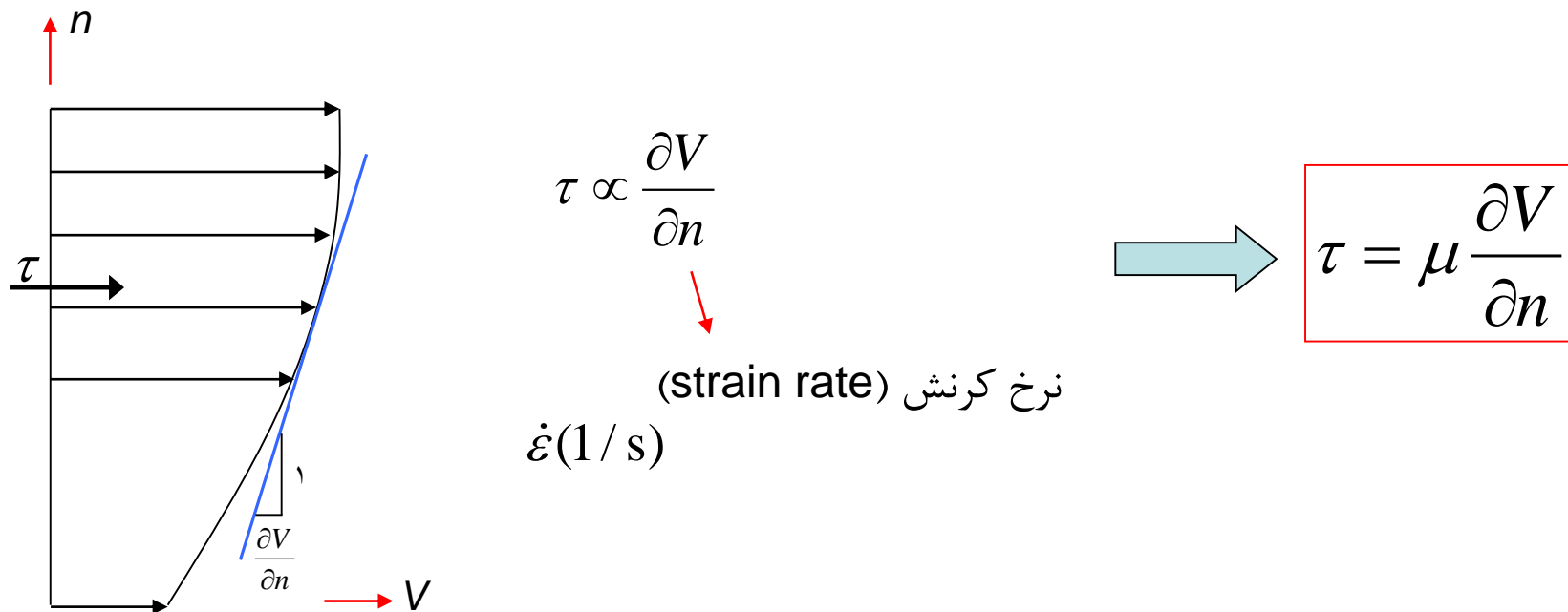
$$S = \frac{\gamma_{fluid}}{\gamma_{water}} = \frac{\rho_{fluid}}{\rho_{water}}$$

چگالی نسبی بی بعد است. مثلا چگالی نسبی جیوه در دمای ۲۰ درجه سانتیگراد برابر است با:

$$S_{Hg} = \frac{\gamma_{hg}}{\gamma_{H_2O}} = \frac{133 \text{ (kN/m}^3\text{)}}{9.81 \text{ (kN/m}^3\text{)}} = 13.6$$

قانون لزجت نیوتن: (Newton's Viscosity Law)

در یک جریان آرام (Laminar flow) که ذرات سیال در خطوط مستقیم و موازی حرکت می کنند، در سیالات نیوتنی (Newtonian fluids) تنش برشی بر روی سطحی مماس بر امتداد جریان متناسب است با میزان تغییر سرعت در امتداد عمود بر آن سطح:



μ : ضریب لزجت (Coefficient of viscosity) یا ضریب لزجت دینامیکی با بعد $ML^{-1}T^{-1}$:

$$\mu = \frac{\tau}{dV/dy} = \frac{(ML^{-1}T^{-2})}{(LT^{-1})/L} = ML^{-1}T^{-1}$$

در سیستم SI واحد آن $kg/m.s$ یا $N.s/m^2$ می باشد که نام بخصوصی ندارد.

در سیستم cgs واحد لزجت g/cm.s است که پواز (poise) نامیده می شود.

$$1 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m.s}} \right) = \frac{1000 \text{ (gr)}}{100 \text{ (cm.s)}} = 10 \text{ poise}$$

$$1 \text{ centipoise} = 0.01 \text{ poise}$$

Typical values:

Water dynamic viscosity = 1 centipoises (10^{-2} poise) = 1.005×10^{-3} kg/m.s
(at temperature $T = 20$ °C and pressure of 1 atm)

اگر لزجت دینامیک را بر جرم مخصوص تقسیم کنیم، لزجت سینماتیک (kinematic viscosity) بدست می آید:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{ML^{-1}T^{-1}}{M/L^3} = L^2T^{-1} \left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right)$$

در سیستم SI واحد آن m^2/s و در cgs استوک (stoke) می باشد. در USCS نیز با ft^2/s نمایش داده می شود.

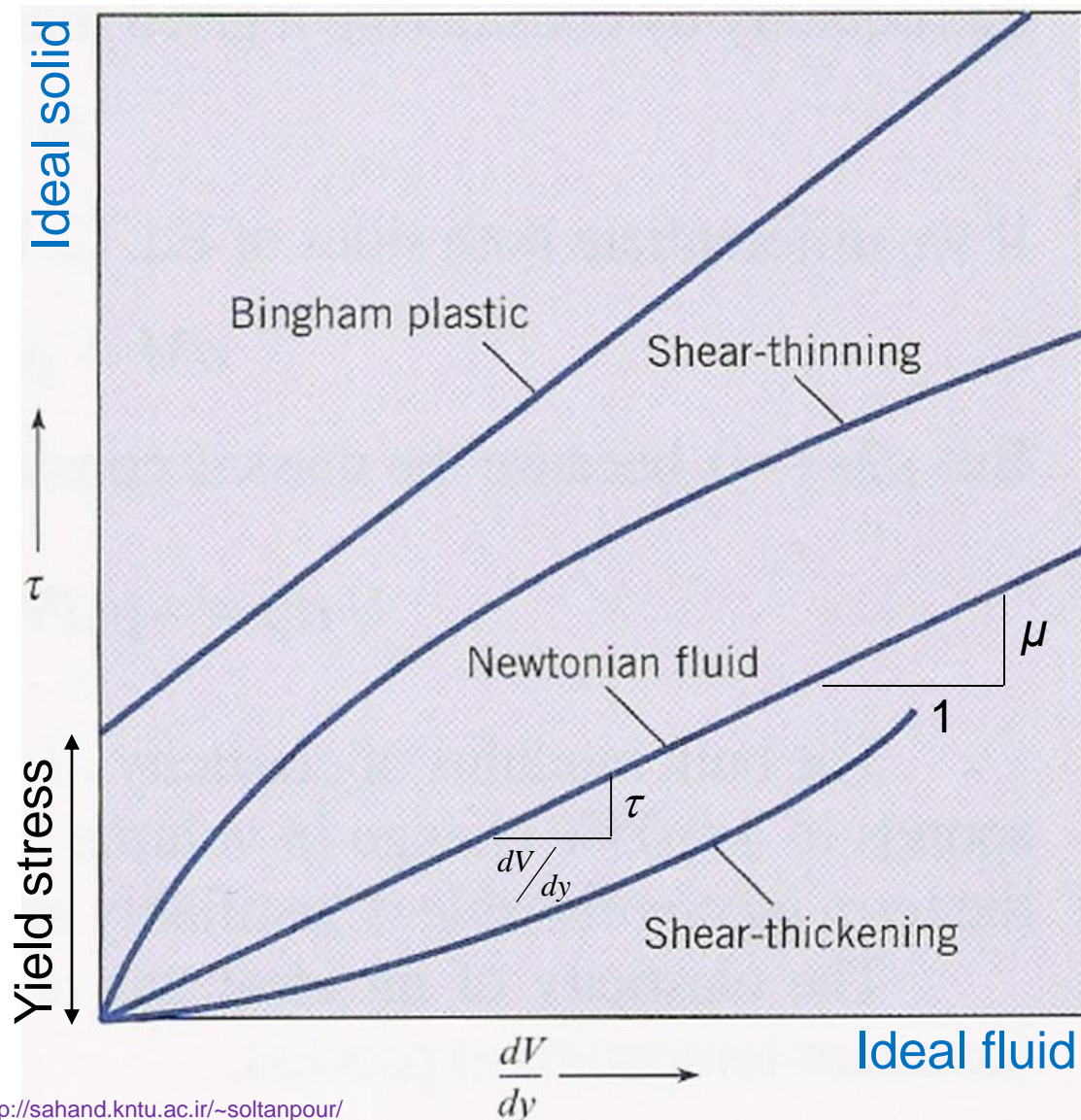
$$1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 10^4 \text{ stoke}$$

Typical values:

Water = $1.14 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, Air = $1.46 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, Mercury = $1.145 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$,
Paraffin Oil = $2.375 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

سیالات نیوتنی (Newtonian) و غیر نیوتنی (Non-Newtonian)

سیالات نیوتنی بر خلاف سیالات غیر نیوتنی سیالاتی هستند که در آنها نسبت تنش برشی و نرخ کرنش برشی خطی است.



در کنار سیالات نیوتنی که اکثر مایعات ساده و گازها را شامل می شوند، سیالاتی وجود دارند (خمیر *paste*، دوغاب *slurry*، گریس *grease*، پلیمرهای بلند *high polymer*...) که رابطه تنش و نرخ کرنش در آنها خطی نیست.

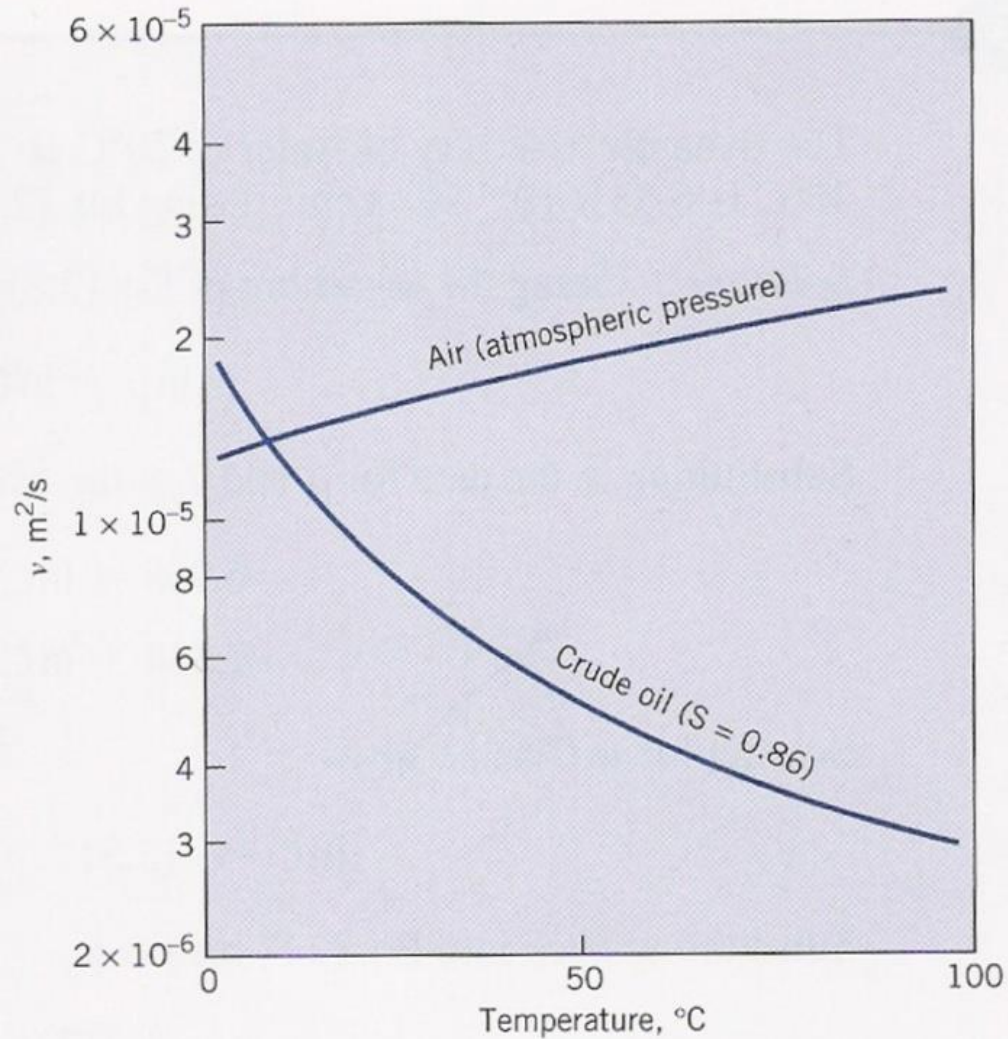
سیال ایده آل سیالی غیر لزج است ($\mu=0$) که در آن تنش برشی تحت هیچ نوع حرکتی ایجاد نمی شود.

تغییرات لزجت نسبت به تغییر فشار و درجه حرارت

gas and liquid $\mu \uparrow$ $p \uparrow$, but small $\Delta\mu$

gas: $\mu \uparrow$ $T \uparrow$
 liquid: $\mu \downarrow$ $T \uparrow$

Due to structural differences, more molecular activity, decreased cohesive forces



لزجت مایعات و گازها با افزایش فشار کمی افزایش می یابد.
 لزجت مایعات با افزایش دما کاهش می یابد در صورتی که
 گازها رفتاری دقیقاً متضاد دارند.

در مایعات لزجت ناشی از جاذبه بین ملکولی قوی است که
 با افزایش دما کاهش می یابد:

$$\mu = Ce^{b/T}$$

μ : لزجت دینامیکی سیال

C, b : ضرائب تجربی

T : درجه حرارت

در گازها ملکولها از یکدیگر دور بوده و تحرک زیادی دارند
 لذا جاذبه ملکولی کم است. حرکات و برخورد ملکولها که
 عامل لزجت است با افزایش دما بیشتر می شود.

گاز کامل سیالی است که اثرات متقابل ملکولهای سیال صرفاً ناشی از برخوردهای کاملاً الاستیک باشد.

حجم مخصوص (Specific volume)

$$pv_s = RT \quad \text{معادله حالت (Equation of State)}$$

یا

$$p = \rho RT$$

R (ثابت گاز) فقط به وزن ملکولی سیال بستگی دارد:

$$R = \frac{p}{\rho T} = \frac{\frac{N}{m^2}}{\frac{kg}{m^3} (^{\circ}K)} = \frac{N \cdot m}{kg (^{\circ}K)} = \frac{J}{kg (^{\circ}K)}$$

رفتار گاز کامل بر مبنای فقدان کامل جاذبه ملکولی است لذا رفتار گازها در نزدیک شرایط تقطیر تا حد زیادی از رفتار گاز کامل دور می شود.

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} = mR \quad \text{و یا} \quad \frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2} = R$$

در جرم مشخص m از یک گاز:

قانون آووگادرو (Avogadro's law)

یک مول از کلیه گازها ($n=1$) در شرایط متعارف ($P=1 \text{ atm}$, $T=273 \text{ °k}$) $۲۲/۴$ لیتر حجم را اشغال می کند.

$۱۰^{۲۳} \times ۶/۰۲$ ملکول گاز برابر با جرم ملکولی آن (مثلا ۳۲ g اکسیژن O_2)

ثابت جهانی گازها

دو محفظه گاز را در شرایط یکسان دما، فشار و حجم در نظر می گیریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P_1 V_1}{T_1} = m_1 R_1 \\ \frac{P_2 V_2}{T_2} = m_2 R_2 \end{array} \right. \xrightarrow{V_1 = V_2 \quad T_1 = T_2 \quad P_1 = P_2} m_1 R_1 = m_2 R_2$$

اما تعداد ملکولهای دو ظرف برابر است (بر مبنای قانون آووگادرو حجمهای مساوی از گازها در شرایط یکسان دما و فشار مطلق تعداد ملکول یکسانی دارند). اگر تعداد ملکولهای هر دو ظرف را N فرض کنیم:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{\overline{M}_1}{\overline{M}_2}$$

جرم مولی (جرم $۱۰^{۲۳} \times ۶/۰۲$ ملکول از گاز اول، gr) \rightarrow جرم N ملکول از گاز اول \leftarrow

جرم مولی (جرم $۱۰^{۲۳} \times ۶/۰۲$ ملکول از گاز دوم، gr) \rightarrow جرم N ملکول از گاز دوم \leftarrow

که در آن \bar{M} کیلوگرم مول از گاز می باشد (یک کیلوگرم مول از هرگاز، جرمی از گاز با واحد کیلوگرم است که از نظر عددی مساوی جرم ملکولی آن گاز باشد، مثلا یک کیلوگرم مول اکسیژن برابر 32 kg می باشد)*.

$$\longrightarrow \bar{M}_1 R_1 = \bar{M}_2 R_2$$

و یا $\boxed{\bar{M}R = cte}$

$\bar{M}R$ ثابت جهانی گازها نامیده می شود و در سیستم آحاد بین المللی برابر است با:

$$\bar{M}R = 8312 \text{ J/}^\circ\text{K}$$

$$\longrightarrow \boxed{R = \frac{8312}{\bar{M}} \text{ J/kg}^\circ\text{K}}$$

با جایگذاری R در معادله حالت $(\frac{PV}{T} = mR)$:

$$\frac{PV}{T} = m \frac{8312}{\bar{M}}$$

با توجه به تعریف تعداد مول گاز n (نسبت تعداد ملکولها به عدد آووگادرو یا جرم گاز بر حسب گرم به جرم مولی):

$$n = \frac{N}{N_A} = \frac{m'(gr)}{M(gr)}$$

$$\longrightarrow \frac{PV}{T} = (0.001 \times n \times \bar{M}) \frac{8312}{\bar{M}}$$

$$\boxed{\frac{PV}{T} = 8.312n}$$

مدول حجمی (bulk modulus)

در تغییرات سریع و یا فشار بسیار زیاد قابلیت تراکم مایعات اهمیت پیدا می کند.

$$\beta = \frac{-1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

با واحد $1/pa$ دمای ثابت (Isothermal)

ضریب تراکم پذیری (Coefficient of compressibility)

$$E[k] = -v \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T = - \left(\frac{\partial p}{\partial v / v} \right)_T$$

با واحد pa

مدول حجمی (بالک)

$$\text{اما } \rho v = M = cte \quad d\rho v + \rho dv = 0 \quad E[k] = - \left(\frac{\partial p}{\partial v / v} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho / \rho} \right)_T$$

و یا

$$E[k] = -v \frac{dp}{dv} = \rho \frac{dp}{d\rho}$$

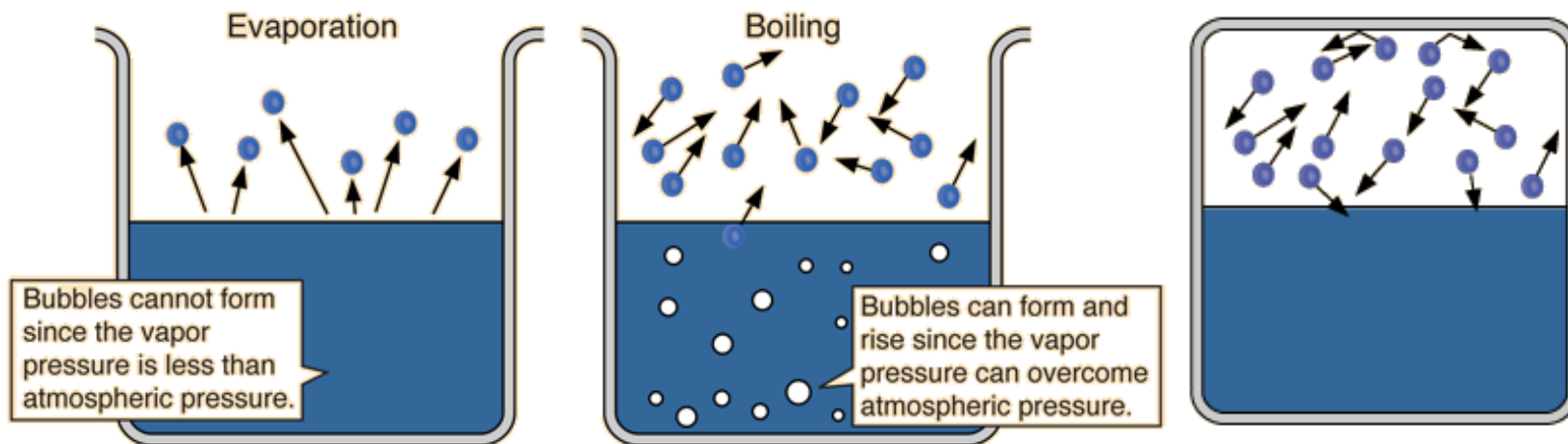
مقدار k برای آب در دمای اطاق و فشار اتمسفر برابر 2068 Mpa می باشد. ** مقدار k با افزایش فشار افزایش می یابد مثلا در فشار 3000 atm مدول حجمی آب دو برابر می شود.

فشار بخار (Vapor pressure)

وقتی تبخیر مایعات در یک محیط محصور صورت گیرد، ملکولهای بخار فشاری جزئی در فضا وارد می کنند که در حالت تعادل به عنوان **فشار بخار** شناخته می شود. حالت تعادل وضعیتی است که تعداد ملکولهای برخورد کننده به سطح مایع که وارد مایع می شوند برابر با تعداد ملکولهای جدا شونده از سطح مایع باشند.

از آنجایی که فعالیت ملکولی تابعی از **دما** است، فشار بخار سیال نیز بستگی به دما داشته و با افزایش دما زیاد می شود.

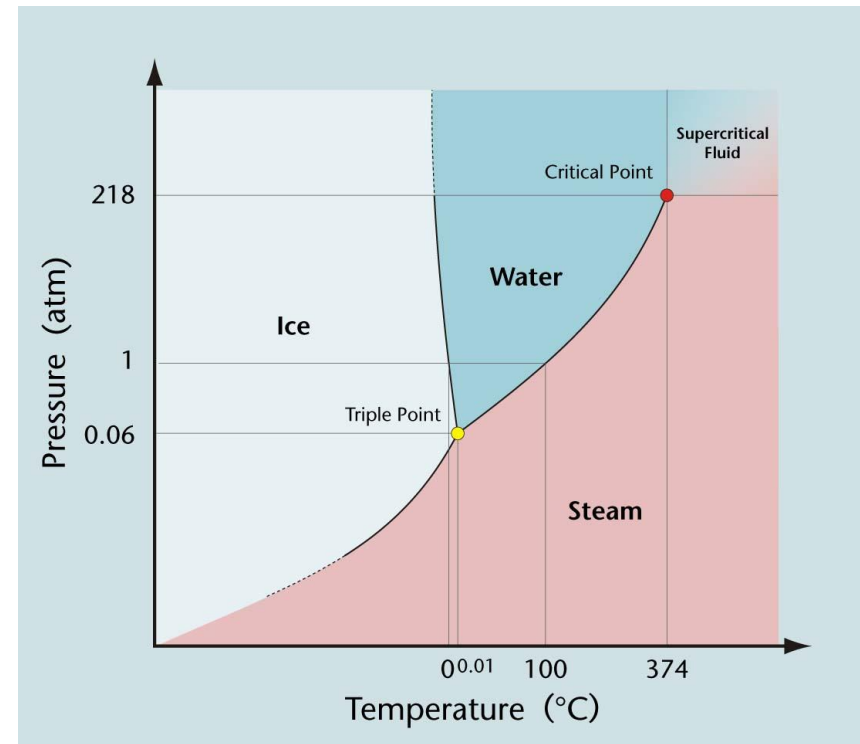
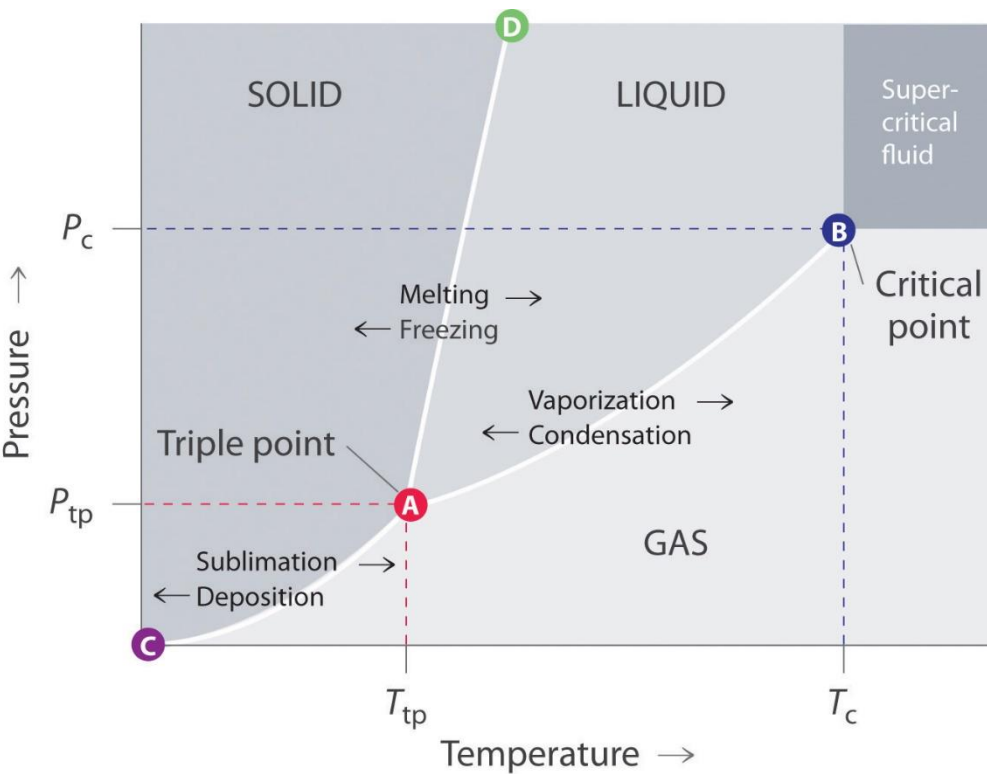
زمانی که فشار روی مایع برابر فشار بخار مایع باشد، مایع **می جوشد**. مثلا اگر فشار به حد کافی کاهش یابد آب در دمای اطاق می جوشد در حالی که در فشار طبیعی (۱ اتمسفر) آب در دمای ۱۰۰ درجه می جوشد (در نقاط مرتفع نقطه جوش کمتر از ۱۰۰ درجه اما در زودپز بیشتر از ۱۰۰ درجه است).



خلا زایی (Cavitation)

اگر تبدیل مایع به گاز صرفاً ناشی از افزایش دما باشد آن را تبخیر (Evaporation) می‌نامند و چنانچه در اثر کاهش فشار روی دهد (فشار سیال از فشار بخار کمتر گردد) خلا زایی (Cavitation) نامیده می‌شود.

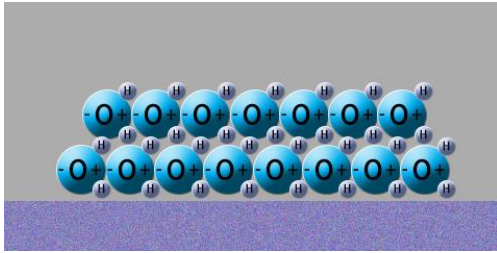
خطر خلا زایی در ورودی پمپها و خروجی توربین‌ها وجود دارد. نقاط خلا ایجاد شده توسط جریان به مناطق با فشار بالاتر منتقل شده و به سرعت پرمی‌شوند که به کاهش راندمان و خوردگی فلزات منجر می‌شود.



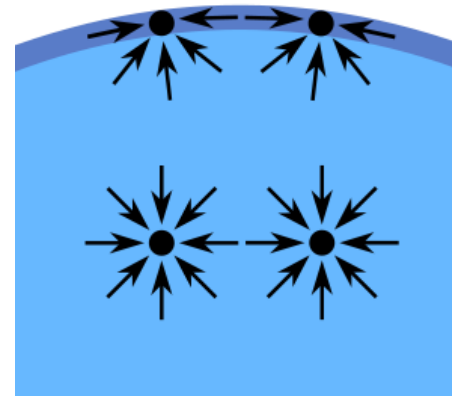
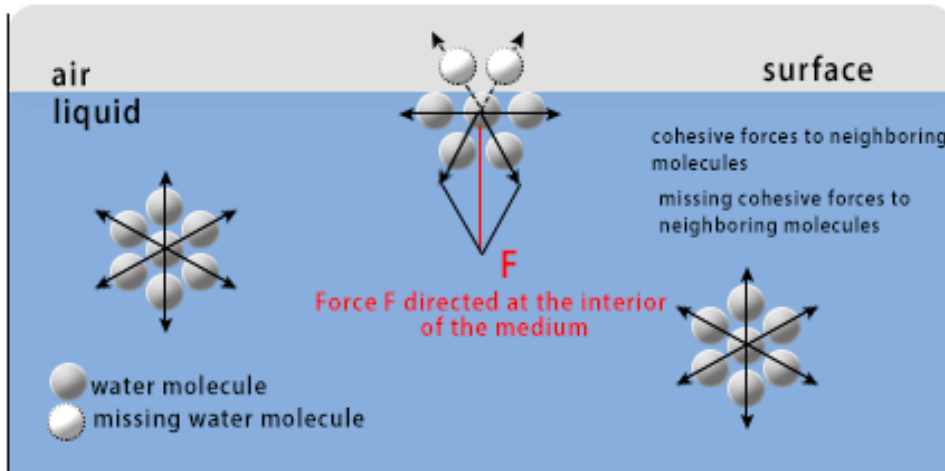
نمودار فازی (phase diagram)

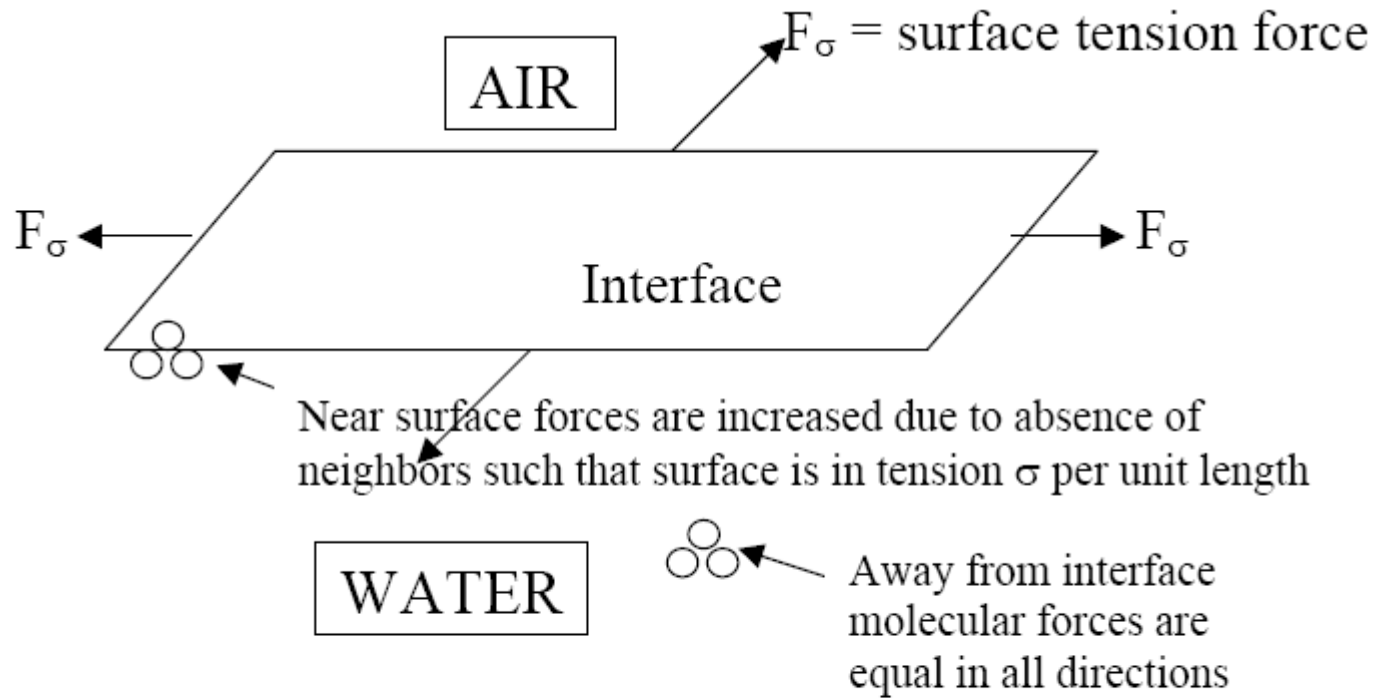
کشش سطحی (Surface tension)

پدیده کشش سطحی ناشی از اختلاف جاذبه بین ملکولهای یکسان (پیوستگی-Cohesion) و جاذبه بین ملکولهای غیر یکسان (چسبندگی-Adhesion) است.



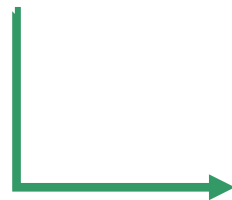
در داخل مایع، نیروهای پیوستگی یکدیگر را خنثی می کنند ولی در سطح آزاد مایع نیروهای پیوستگی که از پایین اثر می کنند از نیروهای چسبندگی محل تماس مایع و گاز بیشتر می شود. بدلیل تفاوت این نیروها مرز دو سیال شبیه یک پوسته تحت کشش عمل می کند.* در نتیجه به مولکولهای روی سطح مایع نیروی خالصی به سمت درون وارد می شود که این نیرو با مقاومت مایع در برابر فشرده شدن خنثی می شود. در نتیجه، نیرویی در مایع به وجود می آید که می خواهد سطح مایع را کم کند. از همین رو سطح مایع به شکل ورقه ای الاستیک عمل می کند و آن قدر جمع می شود که کمترین سطح ممکن را داشته باشد.





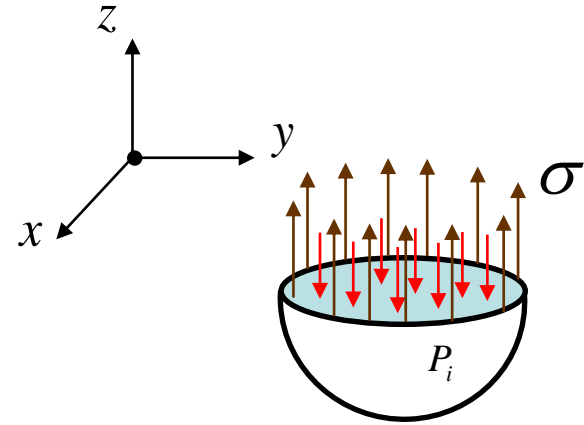
$$\sigma_{\text{air/water}} = 0.073 \text{ N/m}$$

$$F_\sigma = \sigma \times L = \text{Force normal to cut, } L = \text{length of cut}$$



ضریب کشش سطحی (شدت بارگذاری خطی مماس بر سطح)

اگر قطره ای به شعاع R و فشار نسبی داخلی (فشار داخل منهای فشار اتمسفر) P_i را در حال تعادل در نظر بگیریم*:



$$\sum F_z = 0$$

$$\Rightarrow -P_i(\pi R^2) + \sigma(2\pi R) = 0$$

$$P_i = \frac{2\sigma}{R}$$

مثلا با در نظر گرفتن این امر که ضریب کشش سطحی در دمای اطاق برای آب مجاور هوا برابر با $\sigma = 0.073 \text{ N/m}$ است، در قطره ای به شعاع 0.5 mm :

$$P_i = \frac{2 \times 0.073}{0.5 \times 10^{-3}} = 292 \text{ Pa}$$

$$= 0.00288 \text{ atm} \quad (1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa})$$

در حباب کشش سطحی در هر دو وجه داخلی و خارجی (محلهای تماس با هوا) وجود دارد. بنابراین**:

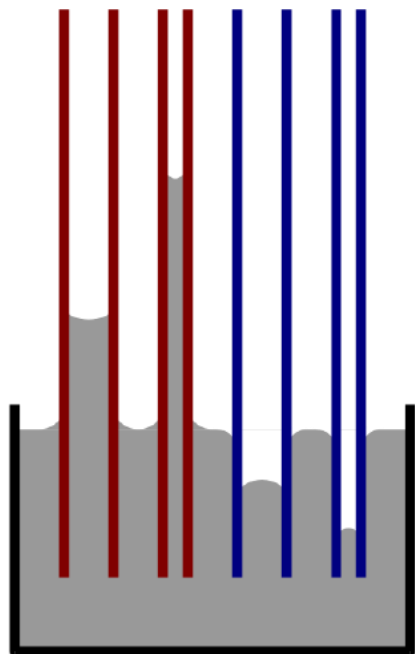
$$-P_i(\pi R^2) + 2\sigma(2\pi R) = 0 \Rightarrow P_i = \frac{4\sigma}{R}$$

اجسام آب دور/هیدروفوب (Hydrophobic) و آب دوست/هیدروفیل (Hydrophilic)

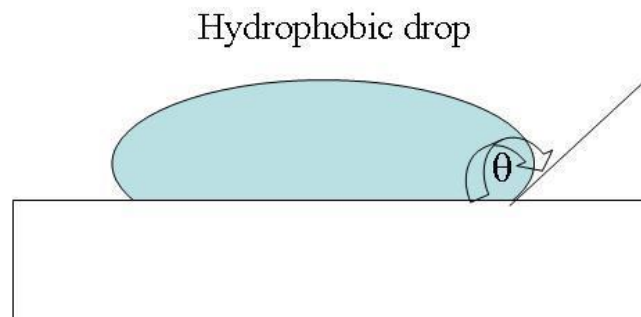
لغت (Hydro-) به معنی آب و “-phobic” از لغت “phobia” به معنی هراسناک است. به این ترتیب ذرات و ملکولهای هیدروفوب با آب مخلوط نمی شوند (آن را دفع می کنند). از طرف دیگر ملکولهای هیدروفیل به خوبی با آب اندرکنش دارند. بنابراین اجسام آب دور و آب دوست را بر مبنای دفع یا جذب آب می توان طبقه بندی کرد.

به همین ترتیب می توان زاویه سطح سیال درمحل تماس با جسم جامد را در نظر گرفت. این زاویه با خواص جامد و سیال و ویژگیهای سه فاز (گاز، مایع و جامد) در محل اتصال ارتباط دارد.

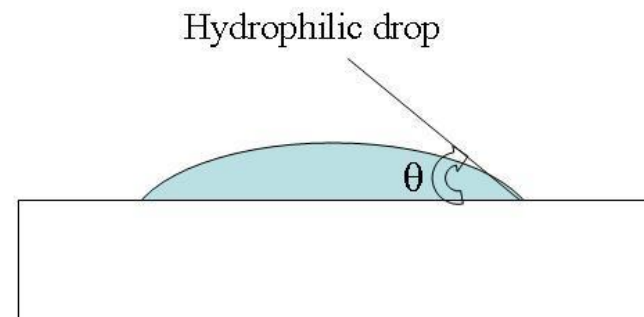
در شیشه تمیز و آب تقریباً برابر با صفر درجه است. در آب و نقره و آب و پارافین θ به ترتیب برابر با ۹۰ و ۱۰۷ درجه است.



لوله های قرمز $\theta < 90^\circ$
لوله های آبی $\theta > 90^\circ$



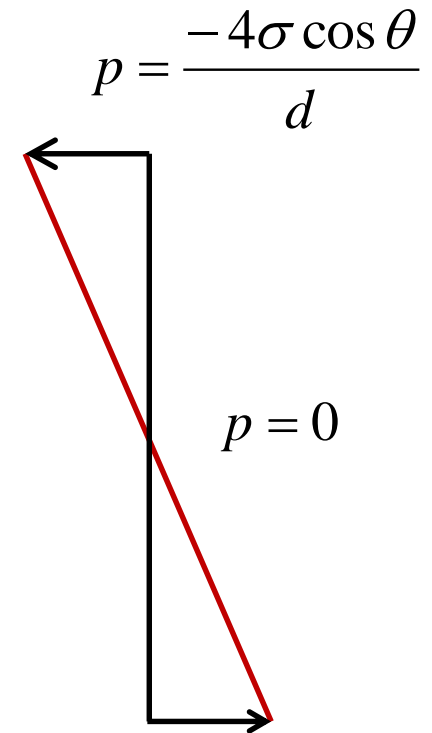
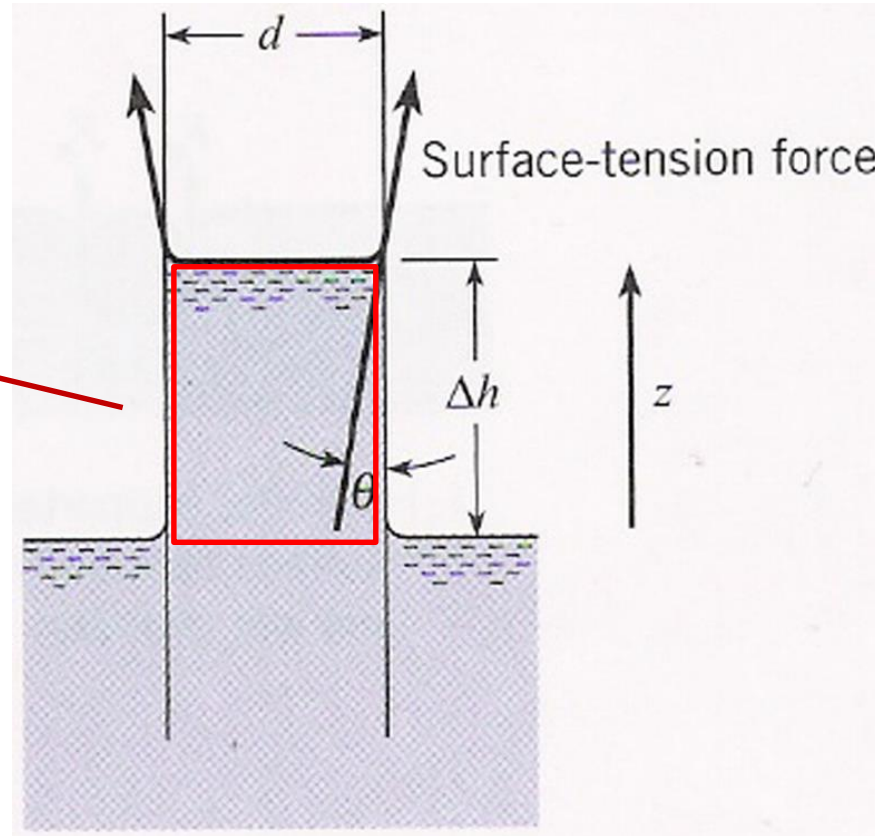
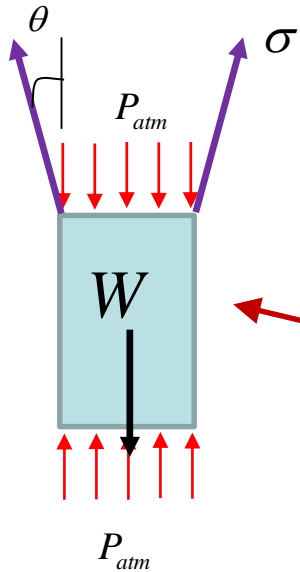
پیوستگی < چسبندگی $\theta > 90^\circ$



پیوستگی > چسبندگی $\theta < 90^\circ$

موئینگی (Capillary)

تفاوت نیروهای چسبندگی و پیوستگی باعث تغییر تراز (بالا یا پایین رفتن) سیال در لوله موئینه می شود.



$$\sum F_z = 0$$

$$\implies (\pi d)\sigma \cos \theta - W = 0$$

$$(\pi d)\sigma \cos \theta - \frac{\pi d^2}{4} \times \Delta h \times \gamma = 0$$

$$\Delta h = \frac{4\sigma \cos \theta}{d\gamma}$$