

Dimensional Analysis and Similitude

Mohsen Soltanpour

Email: soltanpour@kntu.ac.ir

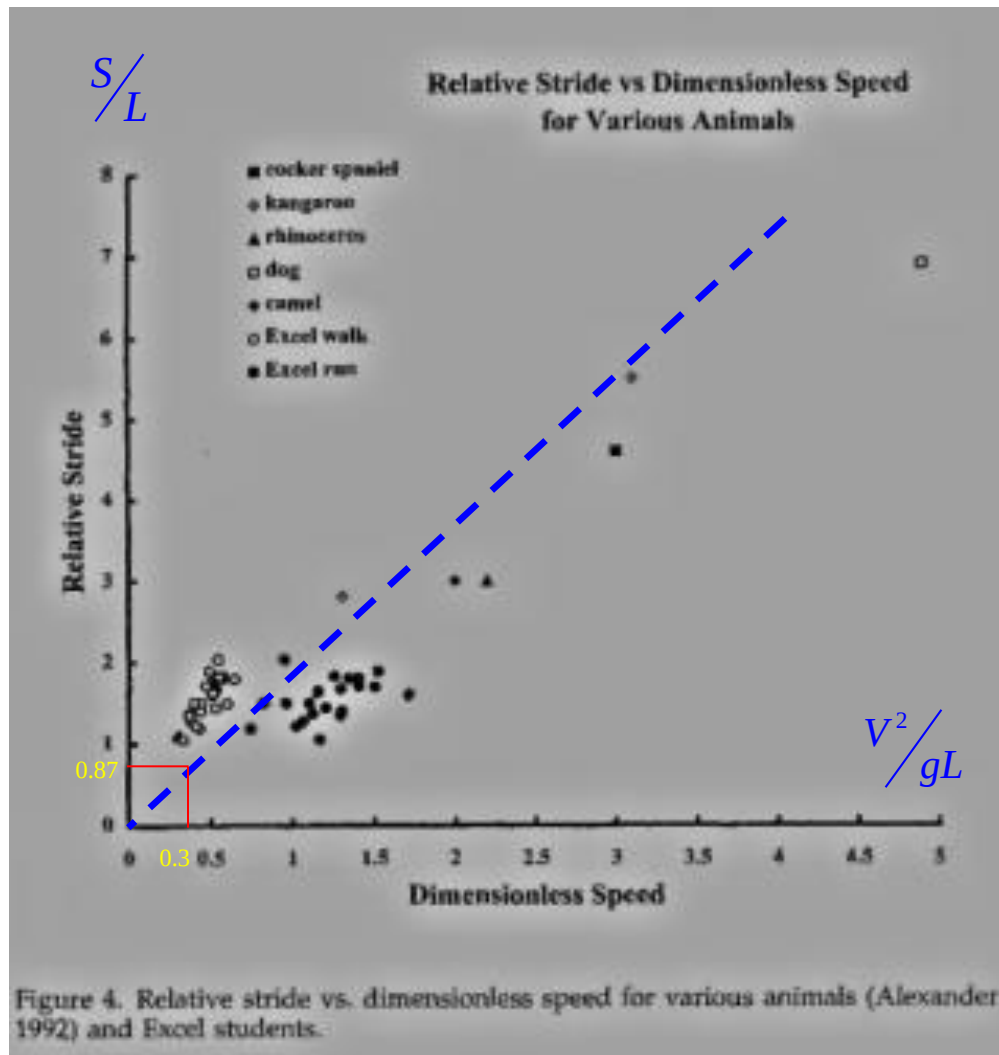
URL: <http://sahand.kntu.ac.ir/~soltanpour/>

آنالیز ابعادی تکنیک بی بعد سازی کمیتها به منظور تجزیه تحلیل و تفسیر داده ها است. با استفاده از نمایش داده های بی بعد شده می توان حجم زیادی از جداول خروجیها را در یک مجموعه منحنی و یا حتی یک منحنی نمایش داد.

با وجود اینکه در استاتیک سیالات و بسیاری از مسائل جریانهای لایه ای جواب دقیق وجود دارد، حل معادلات عمومی در جریانهای متلاطم با پیشرفته ترین کامپیوترها نیز تنها به تقریب قابل قبولی از جوابها منجر می شود که نیاز به مقایسه و تایید با داده های آزمایشگاهی دارد.* آنالیز ابعادی و تشابه همچنین امکان برپایی **مدلهای آزمایشگاهی** داده ها را ممکن می سازند.

اگرچه آنالیز ابعادی به شکل سنتی در مکانیک سیالات بکار می رود، این روش در تمام علوم فیزیکی و مهندسی سودمند بوده و کاربردهای برجسته ای از آن در علوم اجتماعی و بیولوژی نیز دیده شده است.

در سال ۱۹۹۱ مقاله ای در مجله Scientific American چاپ شد که نویسنده با توجه به بقایای فسیلهای دایناسورها سرعت حرکت آنها را تخمین زده بود. اگر چه مقایسه رابطه سرعت حرکت (V) با داده های ساق پا (L) و طول گام (S) نشان دهنده تفاوت چهارپایان و حیوانات دوپا می باشد، چنانچه همین داده ها به شکل دو کمیت بی بعد (S/L) و (V^2/gL) نمایش داده شوند، الگوی یکسانی برای کلیه جانداران بدست می آید که می تواند در دایناسورها نیز صحیح فرض شده و استفاده شود.



sauropod dinosaur

L (leg length) ~ 3.0 meters
 S (average stride length) ~ 2.6 meters
 (Farlow et al., 1989)

$S/L = 0.87 \gg V^2/gL \sim 0.3$
 $\Rightarrow V$ (speed) ~ 3 meters per second

گروه‌های بی‌بعد (Dimensionless groups)

اگر ساده‌ترین نمایش حاصل ضرب (یا تقسیم) گروهی از ابعاد برابر واحد باشد به آن گروه **گروه بی‌بعد** گفته می‌شود. بسیاری از پارامترهای بی‌بعد را می‌توان به صورت نسبت دو نیرو در نظر گرفت که اندازه نسبی پارامتر فوق نشان دهنده اهمیت نسبی یکی از نیروها نسبت به دیگری می‌باشد. مثلاً عدد بی‌بعد **رینولدز** (Reynolds number) نسبت **نیروی اینرسی** به **نیروی لزجت** را نشان می‌دهد:

$$\frac{Ma}{\tau A} = \frac{Ma}{\mu (dv/dy) A} = \frac{(\rho L^3) L / T^2}{\mu (v/L) L^2} = \frac{\rho L^2 (L^2 / T^2)}{\mu v L} = \frac{\rho v^2 L^2}{\mu v L} = \frac{\rho v L}{\mu} \left(\frac{\rho v L}{\mu} = \frac{(M/L^3)(L/T)L}{M/LT} = 1 \right)$$

اگر در جریان خاصی تاثیر بعضی نیروها از سایر نیروها خیلی بیشتر باشد اغلب می‌توان از اثر نیروهای کوچکتر صرف‌نظر کرده و تنها اثر نیروهای اصلی را در تجزیه و تحلیل پدیده در نظر گرفت. به این ترتیب می‌توان روشهای آزمایشگاهی و ریاضی ساده تری برای حل مسئله بکار برد. با این همه در حالاتی که چندین نیرو از اهمیت زیادی برخوردار می‌باشند (مثلاً نیروهای اینرسی، اصطکاکی، ثقل، ...) تحلیل پیچیده بوده و روشهای خاصی مورد نیاز می‌باشد.

تحلیل ابعادی (Dimensional analysis)

تحلیل ابعادی روشی برای کاهش تعداد و پیچیدگی متغیرهای آزمایشگاهی موثر بر یک پدیده فیزیکی با استفاده از تکنیک متراکم سازی است. با بهره گیری از تحلیل ابعادی می توان به تجزیه و تحلیل مسائل مکانیک سیالات با استفاده از پارامترها و متغیرهای بی بعد پرداخت. از آنالیز ابعادی در حالات زیر می توان استفاده کرد:

- ۱- انتقال از یک سیستم آحاد به سیستم دیگر
- ۲- کاهش تعداد متغیرهای لازم در یک برنامه آزمایشگاهی
- ۳- تعیین اصول طراحی مدلها با استفاده از مفهوم **تشابه** و تعیین مقیاس لازم برای خواص سیال و ابعاد مختلف فیزیکی
- ۴- کمک به فهم فیزیک مسئله و استخراج معادلات حاکم

قانون همگنی ابعادی (Principle of dimensional homogeneity): تمامی معادلات فیزیکی باید از نظر ابعادی جملات یکسانی داشته و در تمام سیستمهای آحاد صادق باشند. مثلاً رابطه موقعیت سقوط اجسام

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

از نظر ابعادی همگن است و تمام جملات آن از جنس تغییر مکان یا طول با بعد **L** هستند. هر سیستم آحادی می تواند برای محاسبه مقدار سقوط بکار رود.

لازم به ذکر است انتگرال گیری و یا مشتق گیری ممکن است ابعاد یک رابطه را تغییر دهد ولی همگنی ابعادی حفظ می شود:

$$\int S dt = S_0 t + \frac{1}{2} V_0 t^2 + \frac{1}{6} g t^3 \quad (\text{با بعد } LT)$$

$$\frac{dS}{dt} = V_0 + g t \quad (\text{با بعد } LT^{-1})$$

در حالت کلی تمام روابط فیزیکی را می توان بر مبنای مقادیر اصلی نیرو (F)، طول (L) و زمان (T) و یا جرم (M)، طول (L) و زمان (T) نمایش داد. البته متغیرهایی فیزیکی نیز وجود دارند که بی بعد هستند مثلاً کرنش (نسبت تغییر طول در واحد طول) یا زاویه بر حسب رادیان (نسبت طول کمان به شعاع).

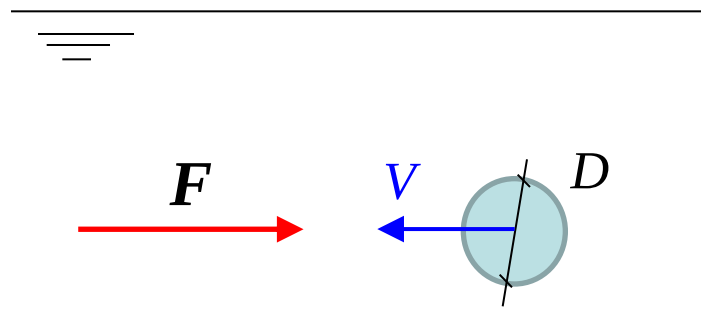
جدول ارائه شده در اسلاید بعد ابعاد کمیات مورد استفاده در مکانیک سیالات را در دو سیستم ($M-L-T$) و ($F-L-T$) نشان می دهد.

کمیت (Quantity)	علامت	SI Unit	Dimension (M-L-T)	Dimension (F-L-T)
مساحت (area)	A	m^2	L^2	L^2
حجم (volume)	V	m^3	L^3	L^3
سرعت (velocity)	v	m/s	LT^{-1}	LT^{-1}
دبی (discharge)	Q	m^3/s	L^3T^{-1}	L^3T^{-1}
شتاب (acceleration)	a	m/s^2	LT^{-2}	LT^{-2}
سرعت زاویه ای (velocity)	ω	rad/s	T^{-1}	T^{-1}
نیرو یا وزن (force or weight)	F, W	N	MLT^{-2}	F
جرم (mass)	M	kg	M	$FL^{-1}T^2$
وزن مخصوص (specific weight)	γ	$N/m^3, kg/(m^2.s^2)$	$ML^{-2}T^{-2}$	FL^{-3}
جرم مخصوص (density)	ρ	kg/m^3	ML^{-3}	FT^2L^{-4}
انرژی، کار یا پیچش (energy, work or torsion)	E, W, T	Joule (J), N.m, kg. m^2/s^2	ML^2T^{-2}	FL
توان (power)	P	Watt (W), N.m/s, kg.m ² /s ³	ML^2T^{-3}	FLT^{-1}
فشار، تنش، مدول ارتجاعی یا مدول حجمی (pressure, stress, elastic modulus or Bulk modulus)	$P, \sigma(\tau), k(E)$	Pascal (Pa), N/m ² , kg/(m.s ²)	$ML^{-1}T^{-2}$	FL^{-2}
لزجت دینامیک (dynamic viscosity)	μ	$Pa.s$	$ML^{-1}T^{-1}$	FTL^{-2}
لزجت سینماتیک (kinematic viscosity)	ν	m^2/s	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}
کشش سطحی (surface tension)	σ	N/m	MT^{-2}	FL^{-1}

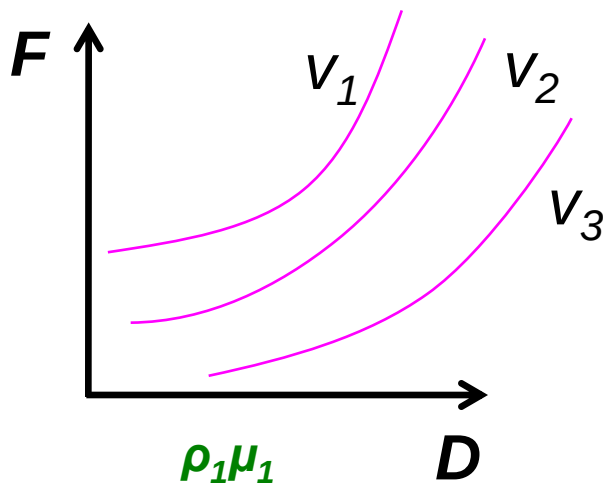
در صورتی که **متغیرهای موثر** در یک پدیده فیزیکی شناخته شده بوده اما ارتباط بین آنها معلوم نباشد، با استفاده از آنالیز ابعادی می توان پدیده را به صورت رابطه ای بین چند **گروه بی بعد** که تعدادشان کمتر از تعداد متغیرها است فرموله کرد. به این ترتیب تعداد آزمایشات لازم به منظور تعیین رابطه بین متغیرها کمتر شده و غالبا نوع آزمایشات نیز ساده تر می شوند.

فرض می کنیم تعیین نیروی دراگ (Drag) وارد بر کره ای صیقلی به قطر D که با سرعت V در زیر تراز آزاد سیال لزجی حرکت می کند مورد نظر باشد. با در نظر گرفتن سایر متغیرهای موثر (جرم مخصوص ρ و لزجت μ):

$$F = f(D, V, \rho, \mu)$$

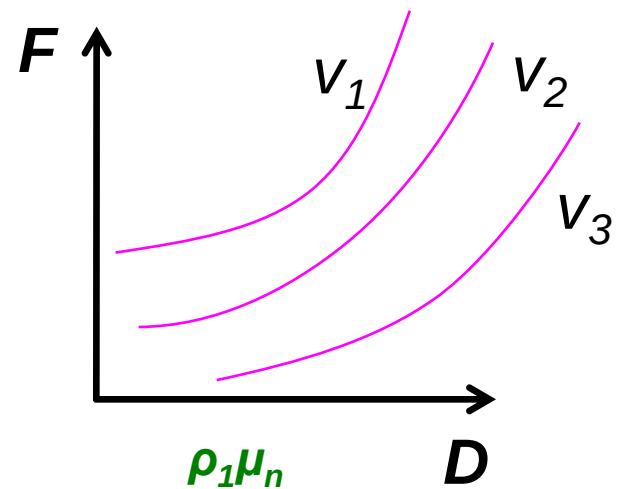


تعیین این تابع مستلزم حجم آزمایشات زیادی است زیرا در هر آزمایش تنها یکی از کمیت های داخل پرانتز را می توان تغییر داد. مثلا $m \times n$ دسته نمودار اسلاید بعد تغییرات F را در مقابل D برای مقادیر مختلف V نمایش می دهد.



...

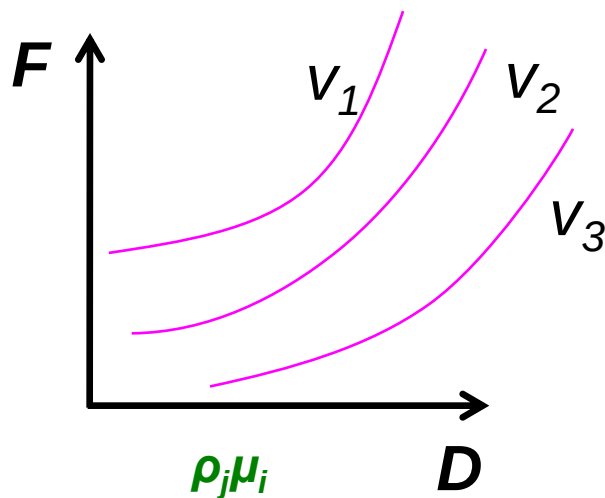
$\rho_1 \mu_i$



...

$\rho_j \mu_1$

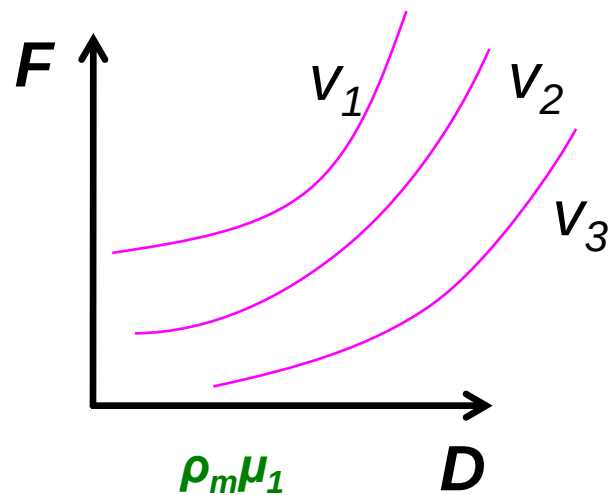
...



...

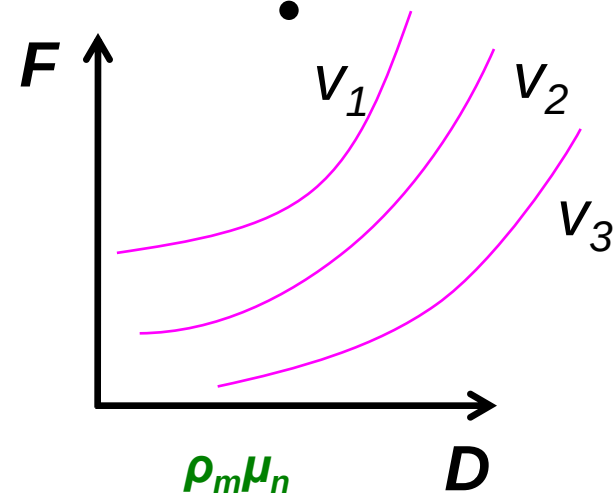
$\rho_j \mu_n$

...



...

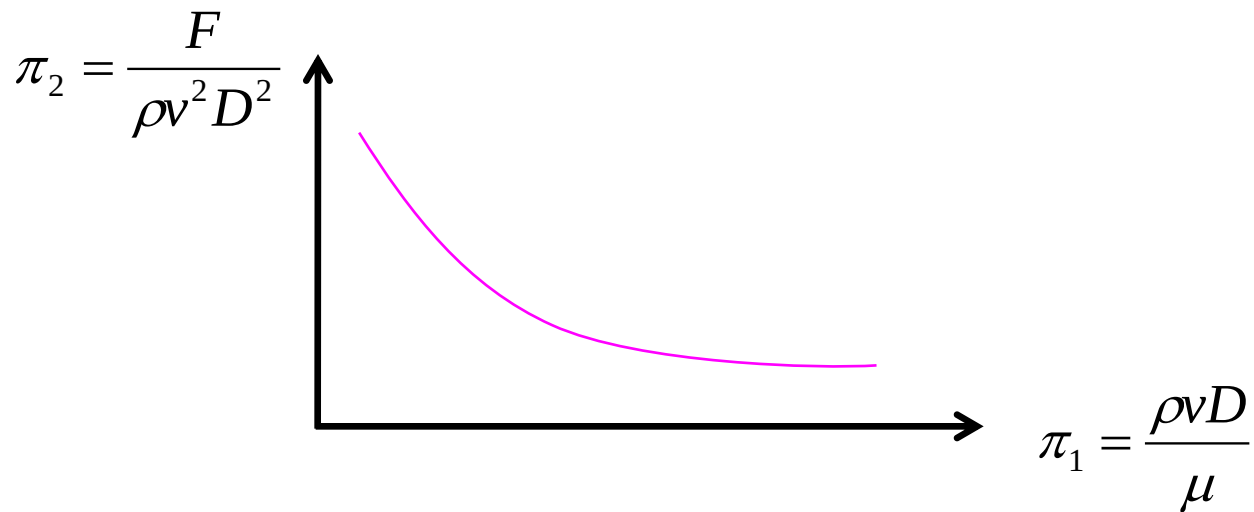
$\rho_m \mu_i$



مشاهده می‌شود که نمودارهای زیادی برای توصیف پدیده مورد نیاز است. ضمناً این روش مستلزم استفاده از تعداد زیادی کره با قطرهای مختلف و سیالات گوناگونی با لزجت و جرم مخصوصهای متفاوت است. با استفاده از آنالیز ابعادی می‌توان **تعداد آزمایشات** را کاهش داد. مثلاً خواهیم دید تعیین نیروی دراگ وارد بر کره در مثال قبل که پدیده‌ای ۴ متغیره است را می‌توان با ۲ گروه بی بعد π_1 و π_2 فرموله کرد:

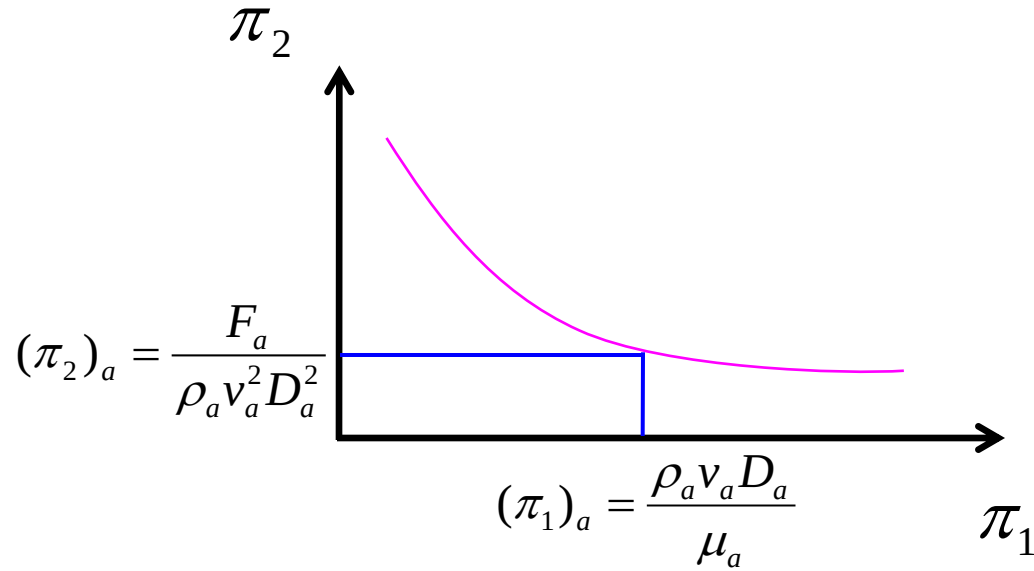
$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{\rho v D}{\mu} \\ \pi_2 = \frac{F}{\rho v^2 D^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{F}{\rho v^2 D^2} = g\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right) \quad \text{یا} \quad \pi_2 = g(\pi_1)$$

در اینجا نیز تابع g نامعلوم است اما صرفاً با یک سری آزمایش و ارائه **یک منحنی بین π ها** می‌توان آن را تعیین کرد:



منحنی فوق که برای هر سیال و هر قطری در محدوده π های آزمایش شده معتبر است با وقت و هزینه‌ای به مراتب کمتر از دسته منحنی‌های قبل بدست می‌آید.

پس از رسم منحنی و تعیین تابع g ، با معلوم بودن ρ_a, D_a, v_a و μ_a جهت تعیین نیروی F کافیت گروه بی بعد $(\pi_1)_a$ را تعیین کرده و گروه بی بعد $(\pi_2)_a$ را از نمودار بدست آوریم:



$$F_a = \rho_a v_a^2 D_a^2 (\pi_2)_a$$

تئوری π باکینگهام (Buckingham π theorem):*

هرگاه مسئله ای فیزیکی شامل n کمیت موثر بوده و r بعد اصلی برای نمایش آن وجود داشته باشد، کمیتها را می توان با $n-r$ گروه بی بعد مستقل نمایش داد.**

در مثال حرکت کره ۵ کمیت F ، D ، v ، ρ و μ وجود داشته و با توجه به ۳ بعد اصلی T ، L و M (و یا T ، L و F)، $n-r=2$ عدد بی بعد وجود دارد. روشن است که دو گروه بی بعد مستقل اند زیرا با عملیات جبری به هم مربوط نمی شوند (F و μ تنها در یکی از آنها ظاهر شده اند). هر گروه بی بعد دیگر را می توان از ترکیب بر روی دو گروه

$$\pi_1 = \frac{\rho v D}{\mu} \quad \text{و} \quad \pi_2 = \frac{F}{\rho v^2 D^2}$$

بی بعد بدست آورد. مثلاً $\frac{F}{\mu v D}$ گروه بی بعدی است که از حاصل ضرب

گروههای فوق بدست می آید.

تعریف r به صورت ابعاد اصلی لازم همواره صحیح نیست. در تعریف دقیقتر r رتبه (rank) ماتریس ابعادی (Dimensional matrix) است که برابر با اولین (بزرگترین) زیر گروه مربعی دارای دترمینان مخالف صفر می باشد.

فرض کنیم متغیرهای α ، β ، γ و δ بر حسب ابعاد اصلی T ، L و M تعریف شده باشند:

$$\alpha = M^1 L^{-1} T^2, \beta = L^{-2} T^1, \gamma = M^3 L^1 T^1, \delta = L^2 T^1$$

اگر روابط قبلی را به شکل جدول زیر مرتب کنیم:

	α	β	γ	δ
M	1	0	3	0
L	-1	-2	1	2
T	2	1	1	1

ماتریس ابعادی برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

رتبه ماتریس فوق ۳ است زیرا می توان ماتریس مربعی با سه سطر و ستون جدا کرد که دترمینان آن **غیر صفر** باشد. مثلاً:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

بنابراین در این مسئله $4-3=1$ عدد بی بعد وجود دارد.

استفاده از تئوری باکینگهام هنگامی که تعداد کمیتها ۴ و یا بیشتر است بدلیل کاهش تعداد متغیرها بسیار مفید است:



تئوری باکینگهام (r بعد اصلی)

$$F(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0$$

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-r}) = 0$$

- هر یک از گروههای π به بیش از $r+1$ پارامتر A بستگی ندارند. نکات زیر در اعداد بی بعد صادق است:
- ۱- کمیات بی بعد خود یک گروه بی بعد π محسوب می شوند.
 - ۲- اگر دو کمیت بعد یکسانی داشته باشند، نسبت آنها خود یک گروه بی بعد π است.
 - ۳- هر گروه بی بعد را می توان با توانی از آن جایگزین کرد (مثلا $\pi^2, \pi^1, \pi^{0.5}, \dots$)
 - ۴- هر گروه بی بعد را می توان در ضریبی ضرب کرد (مثلا $3\pi, \dots$).
 - ۵- هر گروه بی بعد را می توان به صورت تابعی از دیگر گروههای بی بعد نمایش داد. مثلا اگر دو گروه بی بعد وجود داشته باشد $\pi_2 = \emptyset(\pi_1)$.

روش Hunsaker & Rightmire در تعیین اعداد بی بعد :

در این روش کمیتهای تکراری به عنوان متغیرهای اصلی در نظر گرفته شده و سه بعد اصلی L ، T و M (و یا L ، T و F) بر حسب آنها نوشته می شوند. به این ترتیب با تعیین سایر کمیتهای بر حسب کمیتهای تکراری اعداد بی بعد بدست می آیند و دیگر نیازی به حل دستگاه معادلات چند مجهولی وجود ندارد.

گروههای بی بعد مهم:

بدون در نظر گرفتن انتقال حرارت، معمولترین پارامترهای با اهمیت در جریانات عبارتند از:*

1	2	3	4	5	6	7	8
V	ρ	g	μ	σ	K	Δp	L
velocity	density	gravity	viscosity	surface tension	compressibility	pressure change	length

که به $(8-3=5)$ عدد بی بعد اصلی منجر می شوند.

۱- عدد رینولدز (Reynolds number)

عدد رینولدز نسبت نیروی اینرسی به نیروی لزجت (یا اصطکاک) است:

$$\frac{Ma}{\tau A} = \frac{Ma}{\mu (dv/dy) A} = \frac{(\rho L^3) L / T^2}{\mu (v/L) L^2} = \frac{\rho L^2 (L^2 / T^2)}{\mu v L} = \frac{\rho v^2 L^2}{\mu v L} = \frac{\rho v L}{\mu} \Rightarrow \boxed{Re_y = \frac{\rho v L}{\mu} \left(\frac{v L}{\nu} \right)}$$

عدد رینولدز بحرانی در رژیمهای مختلف جریان نظیر جریان آشفته و لایه ای در لوله ها، لایه مرزی و یا اطراف اجسام شناور تمایز می گذارد.

۲- عدد اولر (Euler number)

عدد اولر نسبت نیروی فشار به نیروی اینرسی را نشان می دهد:

$$\frac{\Delta P.A}{Ma} = \frac{\Delta P(L^2)}{(\rho L^3) \frac{L}{T^2}} = \frac{\Delta P L^2}{(\rho L^2) \frac{L^2}{T^2}} = \frac{\Delta P L^2}{\rho L^2 v^2} = \frac{\Delta P}{\rho v^2}$$

فشار دینامیکی $\Rightarrow$ $Eu = \frac{\Delta P}{\rho v^2}$

که در آن ΔP فشار محلی منهای فشار جریان آزاد است. در آزمایشات محلی معمولاً از ضریب فشار $\frac{\Delta P}{\frac{1}{2} \rho v^2}$ استفاده می شود که دو برابر عدد اولر است.

۳- عدد ماخ (Mach number)

عدد ماخ نسبت جذر نیروی اینرسی به جذر نیروی ناشی از تراکم پذیری سیال را نشان می دهد:

$$M^2 = \frac{Ma}{K.A} = \frac{\rho L^2 v^2}{K L^2} = \frac{v^2}{K/\rho} = \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \boxed{M = \frac{v}{c}}$$

مدول بالک

که در آن $c = \sqrt{K/\rho}$ سرعت صوت در سیال است. این عدد در جریانهای با سرعت بالا که تغییرات جرم مخصوص در اثر فشار قابل توجه است، اهمیت زیادی پیدا می کند.

۴- عدد فرود (Froude number)

عدد فرود جذر نسبت نیروی اینرسی به جذر نیروی جاذبه را نشان می دهد:

$$Fr^2 = \frac{Ma}{Mg} = \frac{\rho v^2 L^2}{\rho L^3 g} = \frac{v^2}{Lg} \Rightarrow \boxed{Fr = \frac{v}{\sqrt{Lg}}}$$

عدد فرود در جریانهای با تاثیر سطح آزاد (نظیر جریان در یک کانال و یا حرکت امواج) مهم است. تعیین رژیم جریان در یک کانال (فوق بحرانی یا زیر بحرانی) بستگی به بزرگتر بودن یا کوچکتر بودن عدد فرود از یک دارد. عدد فرود در محاسبات پرش هیدرولیکی، طرح سازه های دریایی و طراحی کشتی نیز بکار می رود.

۵- عدد وبر (Weber number)

عدد وبر عبارتست از نسبت نیروی اینرسی به نیروی کشش سطحی:

$$We = \frac{Ma}{\sigma L} = \frac{\rho v^2 L^2}{\sigma L} = \frac{\rho L v^2}{\sigma}$$

در این حالت نیز باید سطح آزاد وجود داشته باشد ولی در حالتی که ابعاد جسم بزرگ است (مثلا قایقی که در آب شناور است) این اثر کوچک است.

در کل معمولاً تاثیر نیروی غالب در نظر گرفته می شود. در اکثر مسائل جریان سیال، ثقل، لزجت و یا نیروی الاستیک غالب هستند. مسائلی که در این بخش تحلیل می شوند عمدتاً مربوط به حالاتی هستند که الگوی جریان تحت تاثیر یک نیروی غالب قرار دارد. اگر چند نیرو توانمند شرایط جریان را تحت تاثیر قرار دهند تحلیل مسائل متفاوت خواهد بود.

تشابه (Similitude)

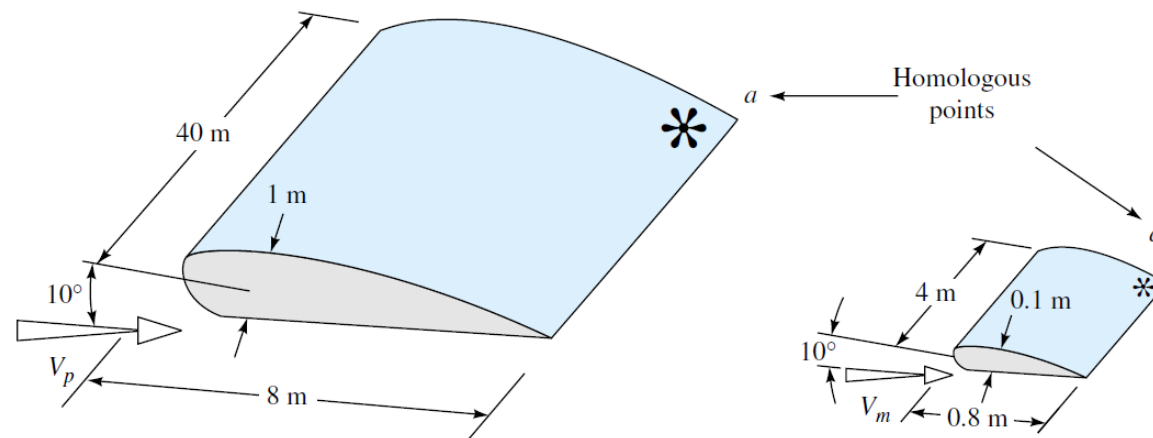
تشابه در مکانیک سیالات بیانگر ارتباط بین یک جریان با اندازه واقعی (نمونه اصلی - prototype) و جریانی با مرزهای کوچکتر ولی از نظر هندسی مشابه با آن (مدل - model) است. به تعبیر دیگر تشابه تئوری و هنر پیش بینی عملکرد نمونه اصلی با استفاده از مشاهدات مدل است. البته در حالتی که مرزها غیر مشابه می باشند نیز قوانینی وجود دارد که در اینجا مورد بحث قرار نمی گیرند. مثلا در هیدرولوژی از مدلی در رودخانه استفاده می شود که از نمای پلان با رودخانه مشابه است ولی غالبا از نظر عمق با آن مشابه نیست (Distorted model).

تشابه هندسی (Gometric similarity)

در اینجا فقط جریانهای مشابه هندسی (Geometrically similar flows) که نسبت کلیه ابعاد در مدل و نمونه اصلی (prototype) یکسان است بررسی می شود:

$$\frac{L_m}{L_p} = L_r \implies \left(\frac{A_m}{A_p} = L_r^2, \frac{V_m}{V_p} = L_r^3, \dots \right)$$

مدل و نمونه اصلی مشابه هندسی هستند اگر و فقط اگر تمام ابعاد جسم در هر سه جهت مختصاتی نسبت خطی یکسانی داشته باشند. در تشابه هندسی تمامی زوایا نظیر به نظیر برابر بوده و جهت مدل و نمونه اصلی نسبت به محیط اطراف یکسانست. به بیان فنی نقاط متناظر (homologous)، یعنی نقاطی که موقعیت نسبی یکسانی دارند، در تشابه هندسی با نسبت خطی یکسانی مرتبط هستند. در شکل یک بال هواپیما و مدل ۱/۱۰ آن نشان داده شده است.



اصطلاح سینماتیک به معنی حرکت نسبت به زمان است. این حرکت می‌تواند حرکت یک جسم جامد یا حرکت ذرات سیال باشد. حرکت با مشتق نسبت به زمان (در هر مرتبه) مشخص می‌شود.

وقتی **خطوط جریان** مربوط به دو جریان با هم مشابه باشند، آن دو جریان **تشابه سینماتیکی** (Kinematic similarity) دارند. شرط **یکی بودن مسیر ذرات متناظر** و **یکی بودن نسبت سرعتها** در مدل و نمونه اصلی را نیز میتوان برای تشابه سینماتیکی بیان کرد. به تعبیر دیگر دو جریان تشابه سینماتیکی دارند اگر ذرات **متناظر** (که موقعیتهای نسبی یکسانی دارند) در زمانهای **متناظر** در محلهای **متناظر** قرار گیرند (طول و زمان در تمام زمانها و محلها مشابه باشند).*

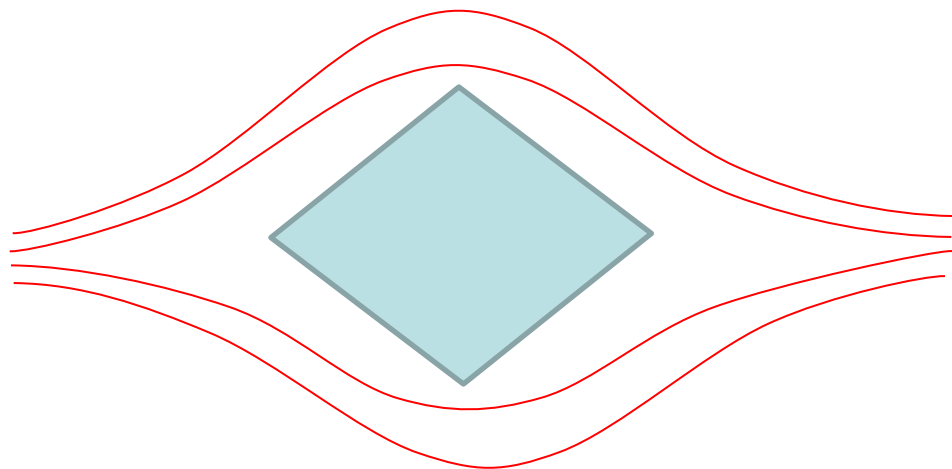
$$\frac{L_m}{L_p} = L_r$$

$$\frac{T_m}{T_p} = T_r$$

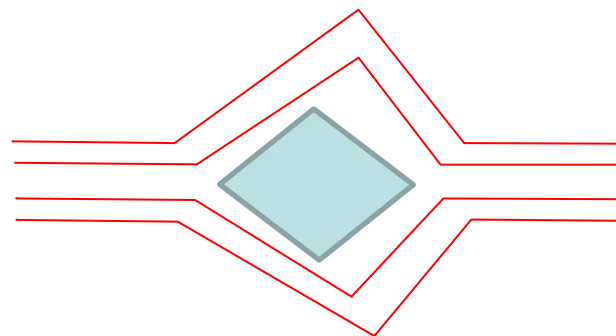


$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_m}{v_p} = \frac{L_m / T_m}{L_p / T_p} = \frac{L_m / L_p}{T_m / T_p} = \frac{L_r}{T_r} \quad \text{سرعت} \\ \frac{a_m}{a_p} = \frac{L_m / T_m^2}{L_p / T_p^2} = \frac{L_m / L_p}{T_m^2 / T_p^2} = \frac{L_r}{T_r^2} \quad \text{شتاب} \\ \frac{Q_m}{Q_p} = \frac{L_m^3 / T_m}{L_p^3 / T_p} = \frac{L_m^3 / L_p^3}{T_m / T_p} = \frac{L_r^3}{T_r} \quad \text{دبی} \end{array} \right.$$

با توجه به اینکه مرزهای جریان خود خطوط جریان هستند، جریانهای مشابه سینماتیکی تشابه هندسی نیز دارند اما عکس این مطلب صحیح نیست، به عنوان نمونه در جریان زیر در حالت «ب» سرعت جریان بالا بوده و خطوط جریان تغییر می‌کند:



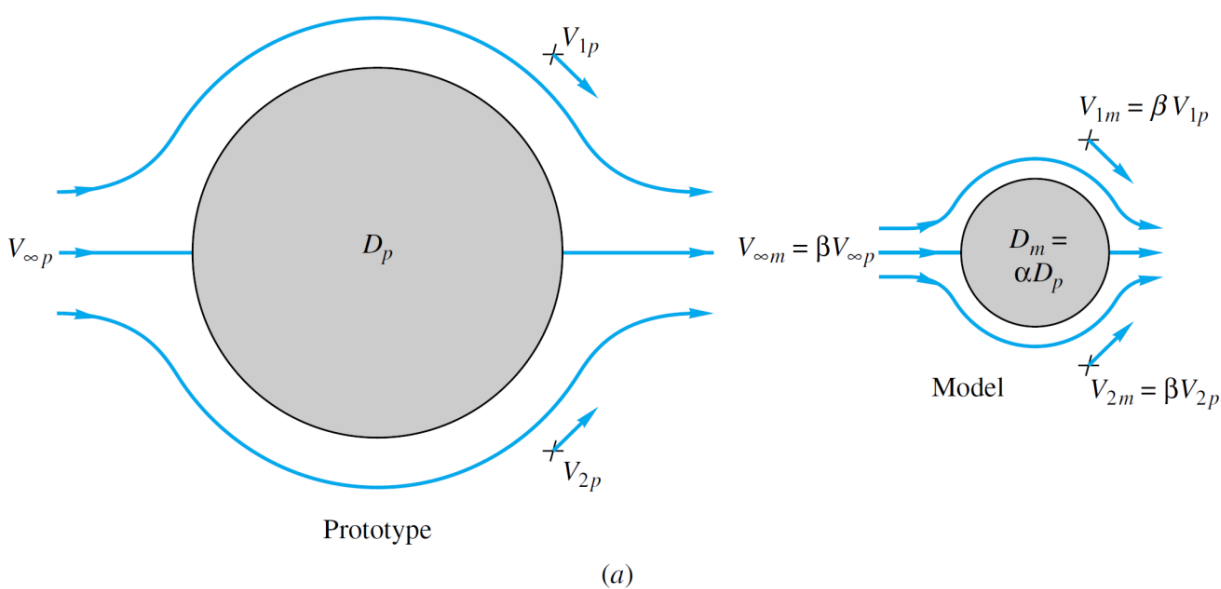
الف- (جریان مادون صوت) $M < 1$



ب- (جریان مافوق صوت) $M > 1$

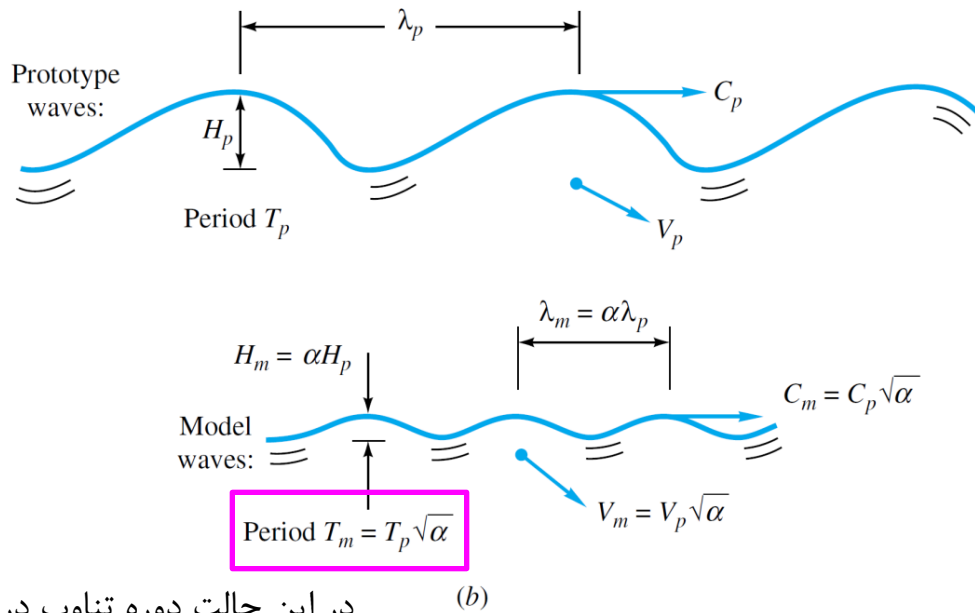
بنابراین جهت تشابه زمانهای متناظر (T_r یکسان) ممکن است تنها تشابه سینماتیکی کافی نبوده و ملاحظات دینامیکی دیگری (نظیر برابری اعداد ماخ و رینولدز) نیز ضروری باشد.*

یک حالت خاص جریانات بدون اصطکاک بدون سطح آزاد دارای سرعت کم می باشد که در آنها تشابه هندسی جهت برقراری تشابه سینماتیکی کافیت.* یعنی در صورت یکسان بودن L_r و کم بودن سرعتها در هر دو جریان مدل و نمونه اصلی، نسبت سرعتها (و یا نسبت زمانها T_r) نیز مستقل از نسبت مقادیر عددی سرعتها در مدل و نمونه اصلی در تمام نقاط یکسان خواهد بود (شکل a اسلاید بعد). در این جریانات نسبتهای طول و زمان مستقل بوده یعنی L_r و T_r به هم ارتباطی ندارند (α و β در شکل a).



در جریانات بدون اصطکاک با سطح آزاد دارای سرعت کم تشابه هندسی جهت برقراری تشابه سینماتیکی کافی نبوده و تنها در صورت وجود نسبت سرعت خاصی بین مدل و نمونه اصلی تشابه سینماتیکی برقرار می شود (شکل b).

در این جریانات نسبتهای طول و زمان در مدل و نمونه اصلی مستقل نبوده و تنها در حالات خاصی از L_r و T_r تشابه سینماتیکی برقرار می گردد. تساوی عدد فرود در مدل و نمونه اصلی شرط تشابه سینماتیکی این جریانات است:



در این حالت دوره تناوب در مدل نمی تواند آزادانه انتخاب شود.

$$(Fr)_m = (Fr)_p$$

$$\frac{v_m}{\sqrt{gL_m}} = \frac{v_p}{\sqrt{gL_p}}$$

$$\frac{v_m}{v_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} = \sqrt{L_r}^*$$

$$\frac{T_m}{T_p} = \frac{L_m / v_m}{L_p / v_p} = \frac{L_m / L_p}{v_m / v_p} = \frac{L_r}{\sqrt{L_r}} = \sqrt{L_r}$$

$$\Rightarrow T_r = \sqrt{L_r}$$

بنابراین در جریان‌ات بدون اصطکاک با سطح آزاد دارای سرعت کم، L_r و T_r مستقل نبوده و جهت برقراری تشابه سینماتیکی ضروری است رابطه $T_r = \sqrt{L_r}$ مابین آنها برقرار باشد.* لازم به ذکر است که عدد فرود تنها شامل ابعاد طول و زمان بوده و لذا کمیتی سینماتیکی است و تساوی عدد فرود در مدل و نمونه اصلی در واقع ارتباط طول نسبی L_r و زمان نسبی T_r در مدل و نمونه اصلی را در تمام مکانها و زمانها ثابت نگه می‌دارد.

تشابه دینامیکی (Dynamic similarity)

هر گاه توزیع نیرو در دو جریان چنان باشد که در نقاط متناظر آن دو جریان، نیروهای هم نوع (نیروی برشی، فشاری، ...) نظیر به نظیر با هم موازی بوده و متناسب باشند، دو جریان تشابه دینامیکی (Dynamic similarity) دارند. همین نسبت در نقاط متناظر واقع بر مرزها نیز برقرار است.**

برای برقراری تشابه دینامیکی باید جریانها تشابه سینماتیکی داشته و تشابه جرمی نیز داشته باشند یعنی توزیع جرم به گونه ای باشد که نسبت جرم مخصوص برای تمام جفت نقاط متناظر یکسان باشد***.

با توجه به اینکه در تشابه سینماتیکی شتابها در نقاط متناظر موازی و دارای نسبت یکسانی هستند، برآیند نیروهای وارد بر ذرات متناظر موازی بوده و بدلیل تشابه جرمی نسبت یکسانی در تمام نقاط جریان دارند.

اهمیت وجود تشابه دینامیکی اینست که اگر در سرتاسر جریان نسبت بین نیروهای متناظر دو جریان یکسان باشد انتگرال توزیع این نیروها (که می تواند مثلا نیروی دراگ، شناوری، ... را بدست دهد) نیز برای جریان مدل و نمونه اصلی دارای همان نسبت بوده و می توان از نتایج حاصل از آزمایش استفاده کرد.

تشابه هندسی	←	طول متناسب
تشابه سینماتیکی	←	طول و زمان متناسب (سرعتها در نقاط متناظر موازی و متناسب)
تشابه دینامیکی	←	طول، زمان و جرم/یا نیرو متناسب (نیروها در نقاط متناظر موازی و متناسب)

با توجه به قانون نیوتن در هر ذره سیال جمع نیروهای فشاری، جاذبه و اصطکاک برابر نیروی اینرسی (حاصلضرب شتاب در جرم) است:*

$$\vec{F}_P + \vec{F}_g + \vec{F}_f = \vec{F}_i$$

تشابه دینامیکی در واقع نشان دهنده موازی و متناسب بودن این نیروها در نقاط متناظر است. شکل اسلاید بعدی مثالی از جریان عبوری از زیر یک دریچه قطاعی را نشان می‌دهد.

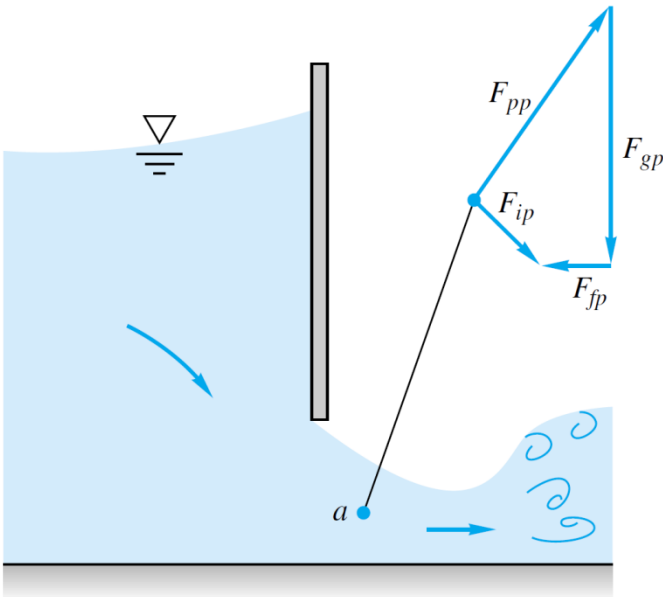
$$(\vec{F}_P)_m + (\vec{F}_g)_m + (\vec{F}_f)_m = (m \frac{d\vec{v}}{dt})_m$$

$$(\vec{F}_P)_m + (\vec{F}_g)_m + (\vec{F}_f)_m = (\vec{F}_i)_m$$

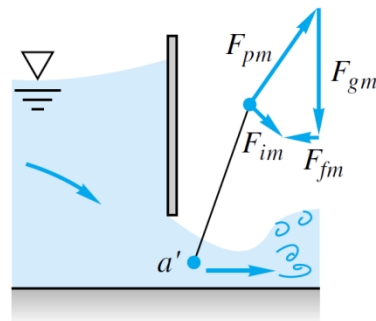
با تقسیم طرفین بر مقدار نیروی اینرسی ($\vec{e}$ بردار واحد است):

$$(\vec{F}_P)_m / (F_i)_m + (\vec{F}_g)_m / (F_i)_m + (\vec{F}_f)_m / (F_i)_m = \vec{e}$$

$$(\overline{Eu})_m + 1 / \overline{(Fr^2)}_m + 1 / \overline{(Re)}_m = \vec{e}$$



(a)



(b)

چنانچه پارامترهای بی بعد مربوطه (در این حالت اعداد فرود، رینولدز و اولر) در مدل و نمونه اصلی برابر باشند:

$$\begin{cases} (Eu)_m = (Eu)_p \\ (Fr)_m = (Fr)_p \\ (Re)_m = (Re)_p \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & \frac{(\vec{Eu})_p}{1} + \frac{1}{(Fr^2)_p} + \frac{1}{(Re)_p} = \vec{e} \\ & \frac{(\vec{F}_P)_p}{(F_i)_p} + \frac{(\vec{F}_g)_p}{(F_i)_p} + \frac{(\vec{F}_f)_p}{(F_i)_p} = \vec{e} \end{aligned}$$

$$(\vec{F}_P)_p + (\vec{F}_g)_p + (\vec{F}_f)_p = (\vec{F}_i)_p$$

و با ضرب کردن طرفین در مقدار نیروی اینرسی نمونه اصلی $(F_i)_p$:

یعنی به شرط تساوی اعداد رینولدز، اولر و فرود و با صرفنظر کردن از کشش سطحی، کاویتاسیون و ... چند ضلعی‌های نیرو در مدل و نمونه اصل کاملاً معادل خواهند بود.

با انجام آزمایشات متعدد و تحلیل داده‌های حاصل از آزمایشات می‌توان رابطه بین اعداد بی بعد مدل را بدست آورد:

$$\pi_{1m} = f(\pi_{2m}, \pi_{3m}, \dots, \pi_{im})$$

حال چنانچه تمام پارامترهای بی بعد مربوط در مدل و نمونه اصلی برابر باشند،*

$$\pi_{i,m} = \pi_{i,p} \quad i = 1, \dots, n-r$$

می‌توان نتیجه گرفت:

$$\Rightarrow \pi_{1p} = f(\pi_{2p}, \pi_{3p}, \dots, \pi_{ip})$$

بنابراین در این حالت بدلیل برابری پارامترهای بی بعد مرتبط در مدل و نمونه اصلی، شرایط جریان در مدل و نمونه اصلی کاملاً یکسان بوده و **تشابه کامل** وجود دارد.**

در عمل حصول شرایط فوق (تشابه کامل) اغلب ممکن نیست و لذا اغلب باید مهمترین عدد بی بعد (اولر، فرود، رینولدز،...) را انتخاب کرده و بقیه را در بهترین حالت بکار برد. مثلاً حالتی را فرض کنید که مدلی با سطح آزاد در آب قرار داشته و برقراری تشابه با تساوی اعداد رینولدز و فرود مد نظر باشد (نظیر مثال قبل در خصوص جریان عبوری از یک دریچه قطاعی یا تعیین نیروی دراگ وارد بر کشتی که نیروهای ثقل و اصطکاک مهم هستند):

$$\left\{ \begin{array}{l} (Fr)_m = (Fr)_p \quad \frac{v_m}{\sqrt{gL_m}} = \frac{v_p}{\sqrt{gL_p}} \quad \frac{v_m}{v_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} = \sqrt{L_r} \\ (Re)_m = (Re)_p \quad \frac{v_m L_m}{\nu_m} = \frac{v_p L_p}{\nu_p} \quad \frac{v_m}{v_p} = \frac{\nu_m}{\nu_p} \times \frac{L_m}{L_p} = \sqrt{L_r} \times L_r = L_r^{3/2} \end{array} \right.$$

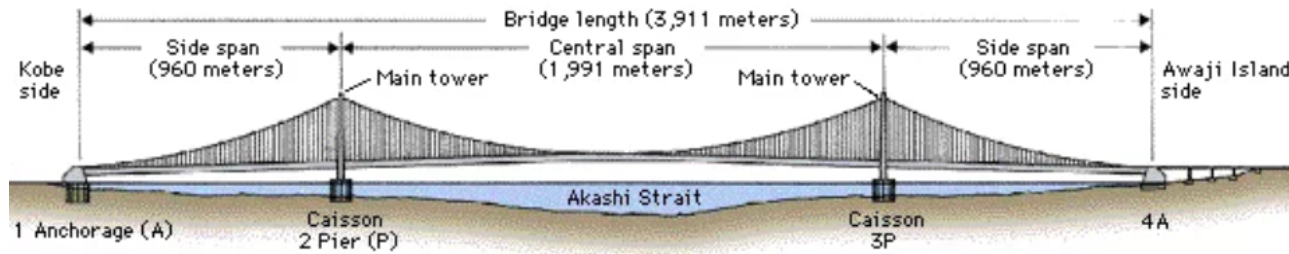
با در نظر گرفتن لزجت آب در دمای ۲۰ درجه ($\nu_p = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) و نسبت هندسی $L_r = 1/10$:

$$\nu_m = 1 \times 10^{-6} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{1.5} = 3.16 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$$

اما سیالی با لزجت فوق وجود ندارد ($\nu_{Hg} = 1.2 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$) و نمی توان تساوی هر دو عدد را بکار برد و بناچار باید تنها یک عدد بکار رود.

Akashi Kaikyō Bridge

Diagram of
the Akashi Kaikyō Bridge



Akashi Kaikyō Bridge
model in a wind tunnel

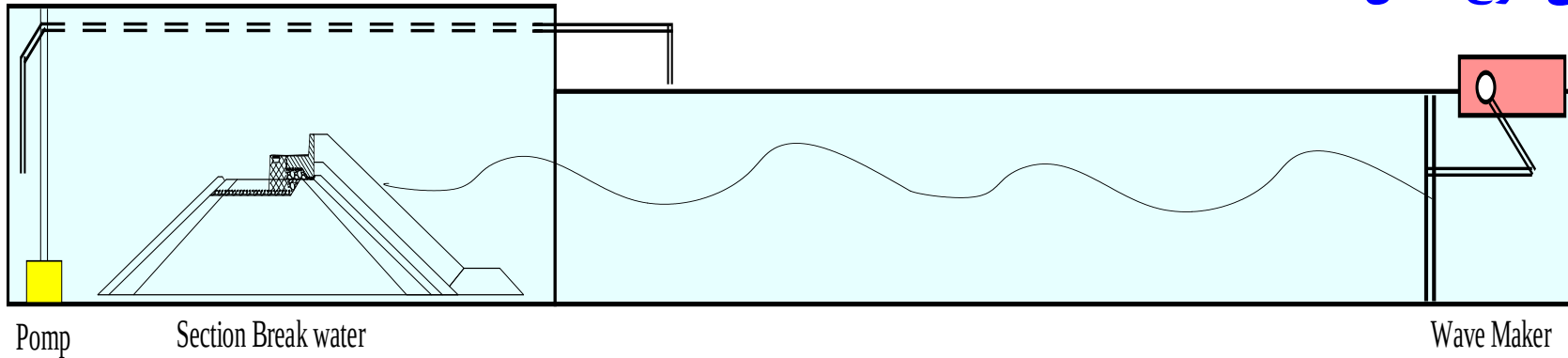


Tacoma Bridge



بلوکهای آنتی فر در موج شکن بندر پتروشیمی پارس





Longitudinal Section of WRI Flume

Length	42.0 m
Width	1.0 m
Depth	1.0 m

