

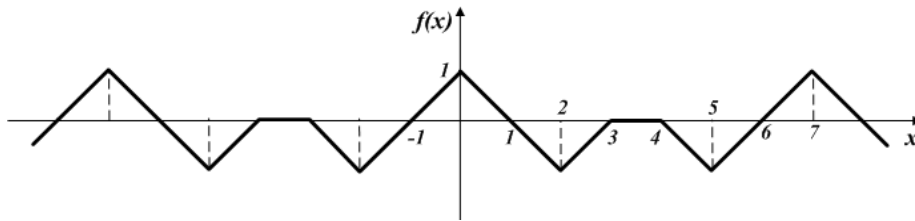


دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی مکانیک
نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۸-۹۹

سری اول تمرین های درس ریاضیات مهندسی

مهلت تحویل: یکشنبه ۳۱ فروردین ماه ۹۹

۱. سری فوریه سیگنال زیر را بدست آورید.



۲. اگر α یک عدد غیر صحیح باشد و برای $x \in [0, \pi]$ ، $f(x) = \cos \alpha x$ ثابت کنید:

$$f(x) = \frac{2\alpha}{\pi} \sin \alpha \pi \left\{ \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\cos x}{1 - \alpha^2} - \frac{\cos 2x}{2^2 - \alpha^2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n^2 - \alpha^2} + \dots \right\}$$

و سپس نشان دهید که: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$. راهنمایی: ابتدا گزاره زیر را بدست آورید.

$$\cot \alpha \pi = \frac{2\alpha}{\pi} \left\{ \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{1}{1 - \alpha^2} - \frac{1}{2^2 - \alpha^2} + \dots - \frac{1}{n^2 - \alpha^2} + \dots \right\}$$

۳. در یک سیستم جرم و فنر، ضریب سختی فنر به علت شرایط محیطی بر حسب زمان افت می کند. اگر $y(t)$ جابجایی جرم باشد و

$$\ddot{y} + e^{-at+b} y = 0$$

ثابت کنید که با تغییر متغیر $u = \frac{2}{a} e^{-\frac{1}{2}(at-b)}$ معادله سیستم به صورت اشتورم لیوویل قابل بازنویسی است.

(راهنمایی: $Y(u) = y(t)$, $\frac{dy}{dt} = -\frac{a}{2} u \frac{dY}{du}$)

۴. تبدیل فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ را بدست آورده و به کمک آن $\int_0^{\infty} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} dx$ را محاسبه کنید.

۵. نشان دهید تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$ برابر است با:

$$F_s(\lambda) = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$$

سپس نشان دهید که:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}, \quad m > 0$$

۶. با استفاده از اتحاد پارسوال و بسط فوریه کسینوسی تابع $f(x) = \sin x$ در $x \in [0, \pi]$ حد همگرایی مجموع زیر را بدست آورید.

$$\frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \frac{1}{5^2 \times 7^2} + \dots$$

۷. اگر $f(x)$ تابعی زوج و انتگرال فوریه آن موجود باشد، با توجه به اینکه $A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos wx \, dx$ نشان دهید:

$$x^2 f(x) = \int_0^{\infty} -\frac{d^2 A(w)}{dw^2} \cos wx \, dw$$

۸. معادله انتگرالی زیر را حل کنید. (راهنمایی: $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(u) y(x-u) du = e^{-x^2}$$

۹. برابری زیر را ثابت کنید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(wt)}{w^2 + a^2} dw = \frac{\pi}{2a} e^{-a|t|}$$

۱۰. نشان دهید در بازه $(-\pi, \pi)$:

$$x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + 2 \left\{ \frac{2}{1 \times 3} \sin 2x - \frac{3}{2 \times 4} \sin 3x + \frac{4}{3 \times 5} \sin 4x - \dots \right\}$$

و با استفاده از آن نشان دهید:

$$x \sin x = 1 - \frac{1}{2} \cos x - 2 \left\{ \frac{1}{1 \times 3} \cos 2x - \frac{1}{2 \times 4} \cos 3x + \frac{1}{3 \times 5} \cos 4x - \dots \right\}$$

(راهنمایی: برای بدست آوردن رابطه دوم از دو طرف رابطه اول انتگرال بگیرید.)

۱۱. سری فوریه تابع دلتای دیراک را در بازه $(-\pi, \pi)$ بدست آورید و نشان دهید.

$$\delta(x) \cong \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}}$$

موفق باشید