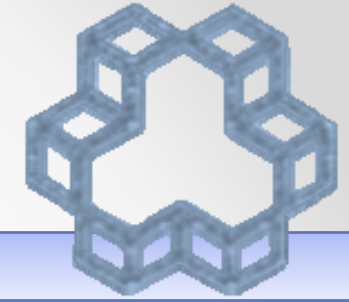


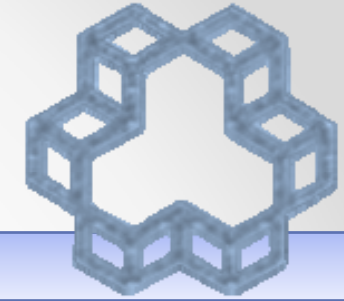
فصل اول

طراحی پیشرفته دال ها



قسمت اول

معادلات پایه



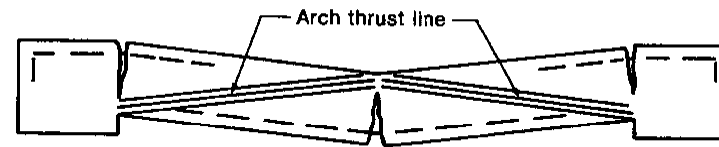
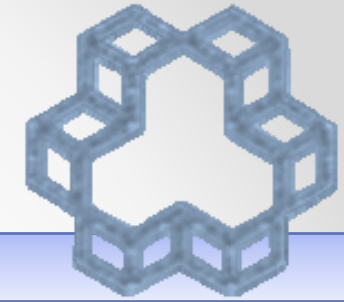
دال ها به دسته های زیر تقسیم می شوند:

- ۱- دال های ضخیم: با ضخامتی بزرگتر از یک دهم دهانه
- ۲- دال های نازک: با ضخامتی کمتر از یک چهارم دهانه
- ۳- دال با ضخامت متوسط

✓ دال های ضخیم بخشی از بارها را بصورت قوسی انتقال می دهند و چون نیروی فشاری داخلی C از نیروی داخلی کششی T بزرگتر است، بارهای فشاری عمده ای در صفحه دارند.

✓ دال های نازک بخشی از بارها را که بصورت غشای کششی عمل می کنند را انتقال می دهند، از اینرو T بزرگتر از C می باشد.

✓ دال های با ضخامت متوسط نه بصورت عملکرد قوسی و نه بصورت عملکرد پوسته ای عمل می کنند و از اینرو $C=T$ و مقطع تحت لنگر خالص است.



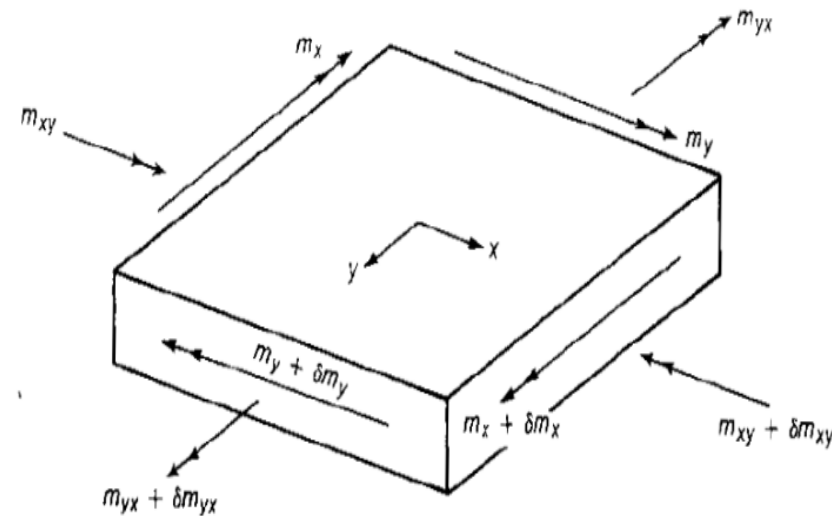
$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = -\frac{w}{D}$$

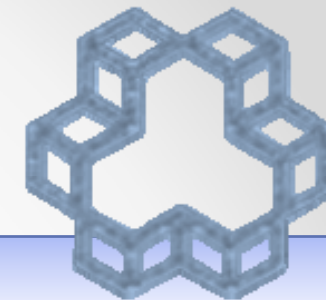
$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)$$

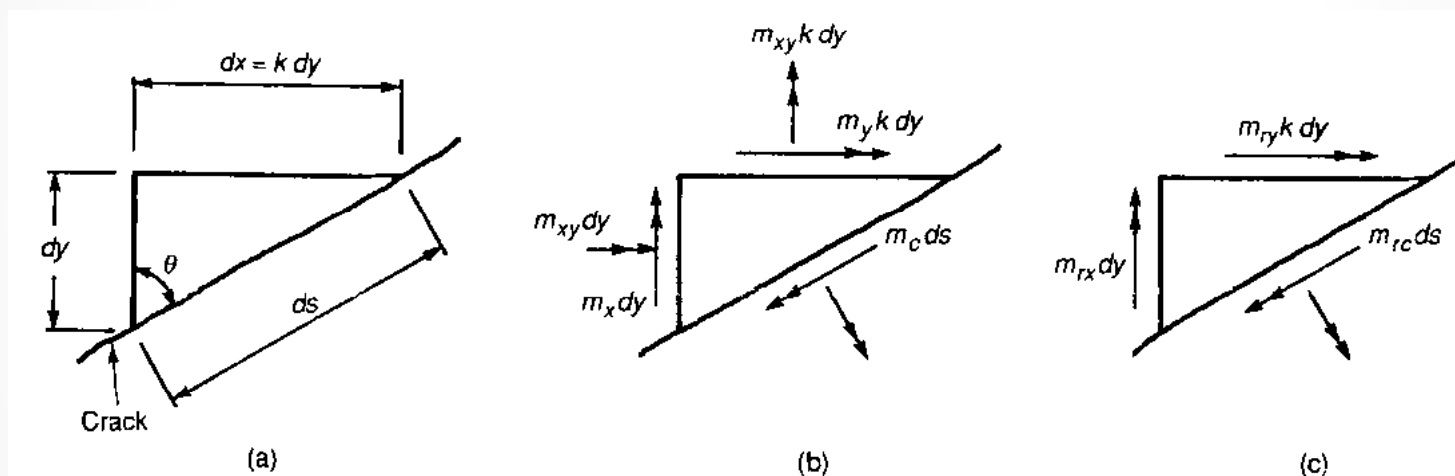
$$m_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$$

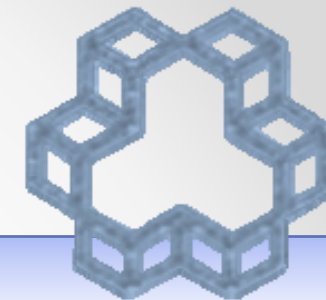




طراحی آرماتورها برای لنگرهای حاصل از تحلیل به روش اجزا محدود:



بخشی از یک المان که با ترک قطری محدود شده است، در شکل بالا نمایش داده شده است. لنگرهای بدست آمده از اجزا محدود در صفحات x و y در شکل (b) نمایش داده شده است. لنگر حول محوری موازی با ترک یعنی M_c بصورت زیر بدست می آید:

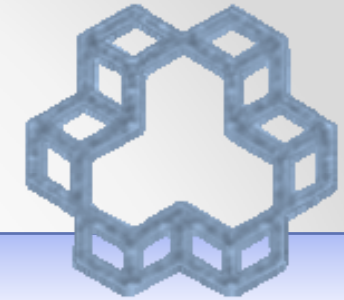


$$m_c ds = (m_x dy + m_{xy} k dy) \cos \theta + (m_y k dy + m_{xy} dy) \sin \theta$$

$$m_c = \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 (m_x + k^2 m_y + 2k m_{xy})$$

این دال باید با میلگرد های در جهت X و y با ظرفیت های لنگر مثبت m_{rx} و m_{ry} در واحد عرض مسلح شوند. ظرفیت لنگر متناظر در ترک فرض شده برابر است با:

$$m_{rc} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 (m_{rx} + k^2 m_{ry})$$



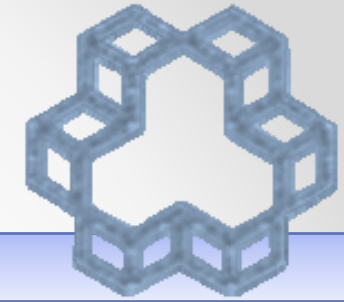
که در آن به منظور فراهم کردن مقاومت مناسب و کافی، بایستی m_{rc} مساوی یا بیشتر از m_c باشد. با معادل کردن این ها و حل کردن با مینیمم، خواهیم داشت:

$$m_{ry} = m_y + \frac{1}{k} m_{xy}$$

از آنجایی که m_{ry} بایستی بزرگتر یا مساوی m_y برای به حساب آوردن اثر m_{xy} باشد:

$$m_{ry} = m_y + \frac{1}{k} |m_{xy}|$$

$$m_{rx} = m_x + k |m_{xy}|$$

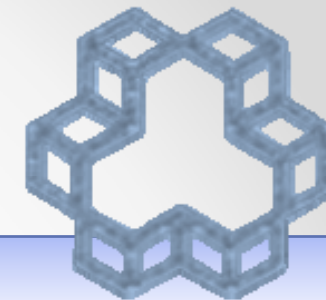


که در آن K یک عدد مثبت است. این موضوع بایستی برای تمامی جهت های ترک ها درست باشد، به عنوان مثال برای تمامی مقادیر K .
اگر K افزایش یابد، m_{ry} کاهش می یابد و m_{rx} افزایش می یابد. کوچکترین جمع دو (کمترین مجموع آرماتور گذاری) بستگی به دال دارد، اما $K=1$ بهترین انتخاب برای سطح وسیعی از لنگرها می باشد. آرماتور های پایین دال در هر دو جهت به منظور فراهم کردن مقاومت های لنگر مثبت زیر طراحی می شوند.

$$m_{ry} = m_y + |m_{xy}|$$

$$m_{rx} = m_x + |m_{xy}|$$

اگر هر کدام از این دو منفی باشند، باید مساوی صفر قرار گیرند.

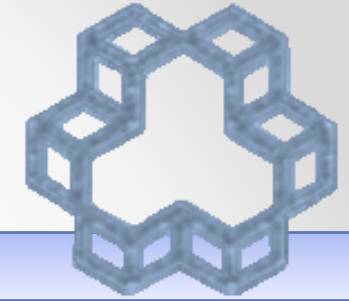


به صورت مشابه، فولاد بالای دال به منظور تامین مقاومت لنگرهای منفی زیر طراحی می شوند:

$$m_{ry} = m_y - |m_{xy}|$$

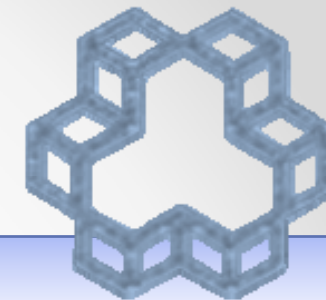
$$m_{rx} = m_x - |m_{xy}|$$

اگر هر کدام از این دو مثبت باشند، باید مساوی صفر قرار گیرند.



قسمت دوم

روش نواری

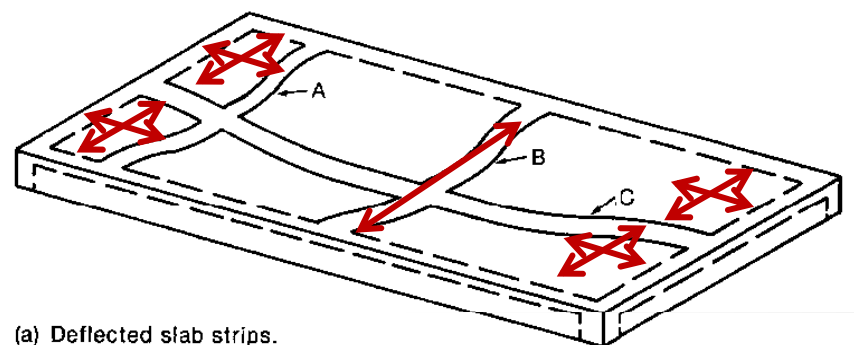


روش نواری ساده: دال های متکی بر لبه

روش نواری که آقای هیلربورگ آن را توسعه داد روشی است برای طراحی دال که حد پایینی برای حل تعادل لنگر ها در دال ارائه می کند. به عنوان مثال، این روش یک تخمین حد پایینی (در جهت اطمینان) برای ظرفیت دال در خمش بیان می کند. اگر آرماتور ها در جهت X و Y تامین شده باشند، یک روش حل احتمالی که معادله را ارضا کند از فرض کردن $m_{xy}=0$ بدست آید و مجموع بار W را در جهات X و Y پخش کند.

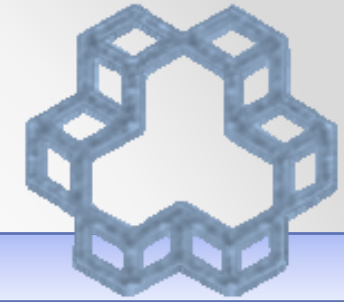
$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -w_x$$

$$\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -w_y$$



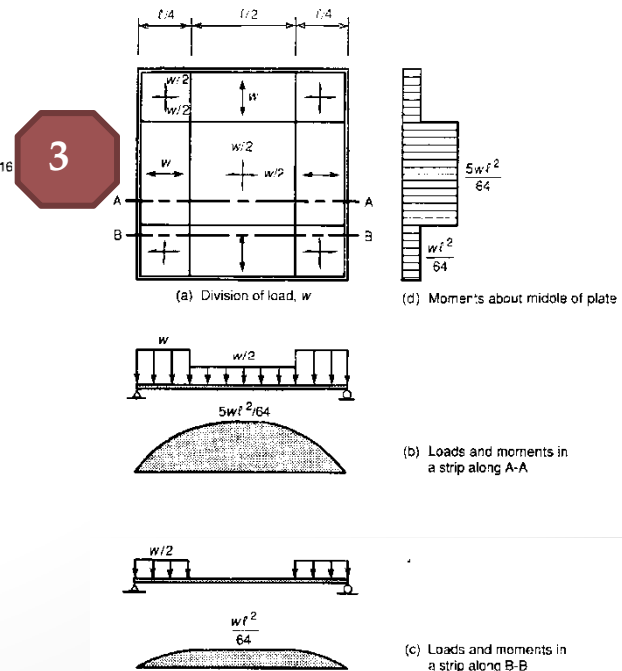
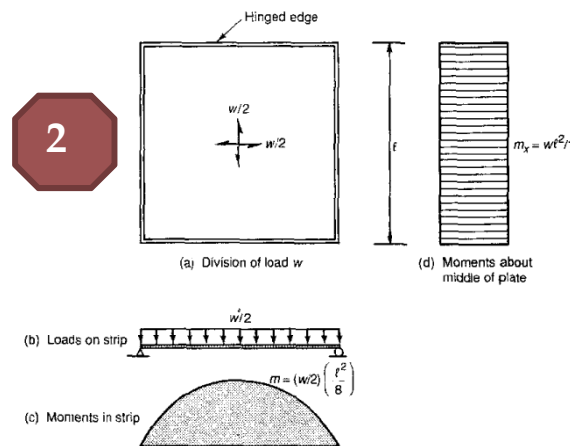
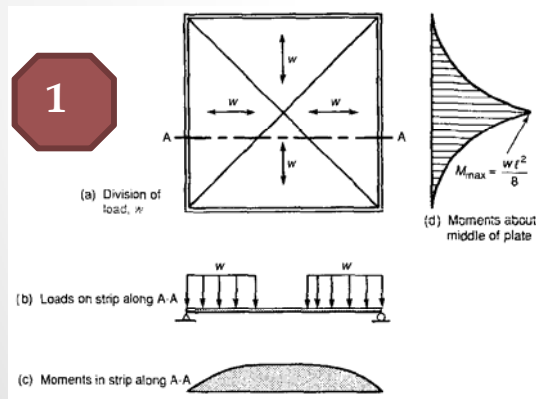
(a) Deflected slab strips.

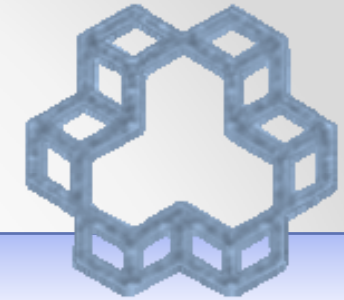
با نادیده گرفتن m_{xy} و m_x و m_y دست بالا خواهند شد.



انتخاب نوارها و پخش بار در دال های متکی بر گوشه:

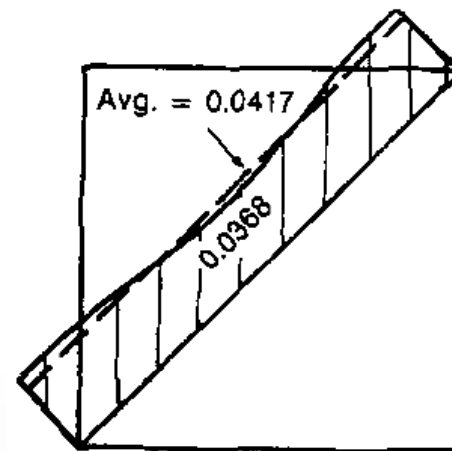
انتخاب نوارها و پخش بار W بین این نوارها کاملا اختیاری است. سه انتخاب ممکن برای دال مربعی با تکیه گاه ساده در شکل زیر نشان داده شده اند:

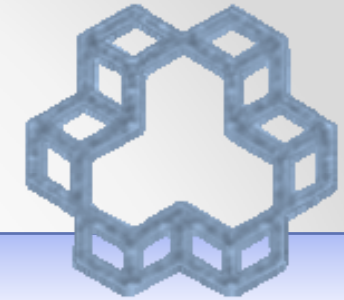




بزرگترین لنگرها در دال حول محوری در طول قطر هستند.

هر سه الگوی بالا مقادیر mx و my را طوری خواهد داد که در جهت اطمینان باشد. (مقادیر قابل اطمینان برای طراحی آرماتورها) الگوی نشان داده شده در شکل ۳ این امتیاز را دارد که فقط دو نوع از نوارها باید در هر دو جهت استفاده شوند. نتیجتاً این روش به صورت گسترده استفاده می شود.



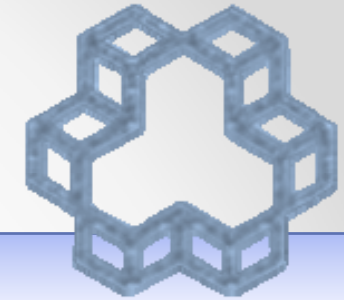


روش نواری پیشرفته: المان های متکی بر گوشه

برای دال به روی تکیه گاه های نقطه ای، دال باید تمام بار را در هر دو جهت منتقل کند، همانطور که در شکل نشان داده شده است. در ساده ترین فرم تقسیم کردن دال به نوارهای ساده متکی بر تیر یا دیوار و المان های متکی بر گوشه در دو جهت است، که در شکل این المان ها (متکی بر گوشه) سایه زده شده اند و با پیکان های با فلش های کامل که نشان می دهند بار در هر دو جهت انتقال داده می شوند، مشخص شده اند.

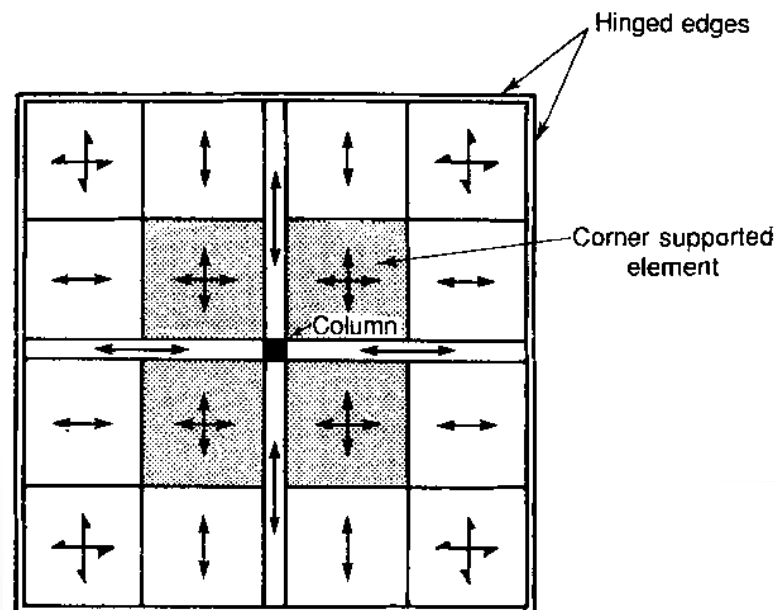
المان های متکی بر گوشه دارای خصوصیات زیر می باشند:

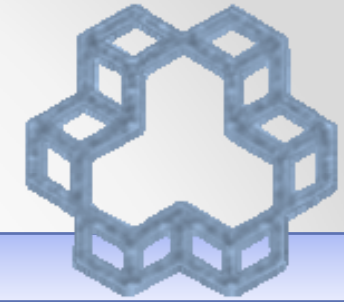
- ✓ لبه ها موازی با جهت آرماتور ها هستند.
- ✓ بار گسترده W را در هر دو جهت منتقل می کنند.
- ✓ این المان ها فقط متکی بر یک گوشه که در محل اتصال به ستون است قرار دارد.
- ✓ هیچ نیروی برشی در طرفین المان وجود ندارند.



- ✓ در اطراف المان ها هیچ گونه لنگر چرخشی (حاصل ضربی) وجود ندارد.
- ✓ کلیه لنگر های خمشی در هر یک از امتداد اضلاع هم علامت می باشند.
- ✓ المان ها مربع یا مستطیل هستند.
- ✓ لنگر خمشی در هر نصف اضلاع ثابت است.

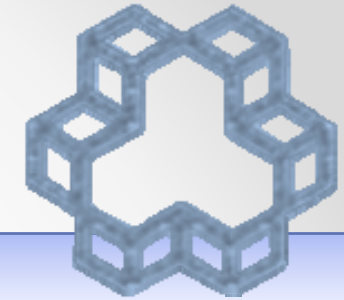
لبه های المان های متکی بر گوشه در نقطه ی ماکزیمم لنگر مثبت در صفحه قرار خواهند گرفت.





قسمت سوم

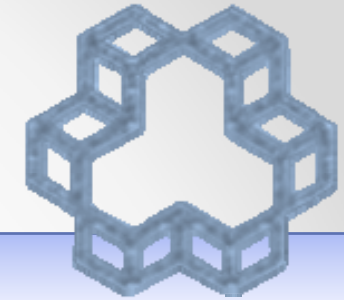
لولاهای گسیختگی



تحت شرایط سربار اضافی در دالی که بصورت خمشی می شکنند، آرماتورها ابتدا در ناحیه ی لنگر ماکزیمم گسیخته خواهند شد. وقتی که این اتفاق می افتد، این بخش دال مانند یک مفصل پلاستیک عمل می کند که قادر به تحمل لنگر مفصلی خود است اما نه بیشتر از آن. وقتی که بار بیشتر می شود، بخش مفصلی بصورت پلاستیک می چرخد و لنگرهای ناشی از بارهای اضافه شده به مقاطع مجاور توزیع می شوند و باعث جاری شدن آنها می شوند، که در شکل زیر نشان داده شده است.

نوارهایی که در آنها جاری شدگی پدید آمده است، همان خطوط گسیختگی هستند و دال را به یکسری صفحات الاستیک تقسیم می کنند. سرانجام خطوط گسیختگی به تعداد کافی، مکانیزم پلاستیک را ایجاد می کنند و باعث می شوند که دال بدون اینکه در بار اعمال شده افزایش رخ دهد، به صورت پلاستیک تغییر شکل دهد.





شکل 14.1.a، یک دال بتنی با تکیه گاه ساده و بار یکنواخت را نشان می دهد. می توان این فولاد را کم فولاد با $\rho < \rho_b$ (همانند اکثر دالها) در نظر گرفت. دیاگرام لنگر الاستیک در شکل 14.1.b نشان داده شده است. وقتی که لنگر اعمال شده مساوی ظرفیت خمشی سطح مقطع دال است، بار افزایش می یابد، فولاد کششی شروع به تسلیم شدن در طول خط عرضی لنگر ماکزیمم می کند. به محض جاری شدن، انحنای دال در مقطع جاری شدگی، به سرعت افزایش می یابد و تغییر شکل (خیز) بصورت نامتناسب افزایش می یابد. انحنای الاستیک در طول دهانه در مقایسه با انحنای ناشی از تغییر شکل پلاستیک در خط گسیختگی کوچک هستند و این قابل قبول است که قطعه های دال بین خط گسیختگی و تکیه گاه، به صورت صلب باقی بمانند. در کل خمیدگی که در خط گسیختگی به وقوع می پیوندد همانگونه که در شکل 14.1.c نشان داده شده است، مفصلی که در خط گسیختگی ایجاد می شود اساسا بصورت ثابت می چرخد.

نکته: در استفاده از تحلیل خط گسیختگی، طراح باید به خاطر داشته باشد که خط گسیختگی هیچ اطلاعاتی را درباره ی ترک خوردن یا تغییر شکل ها تحت بار سرویس ارائه نمی کند.

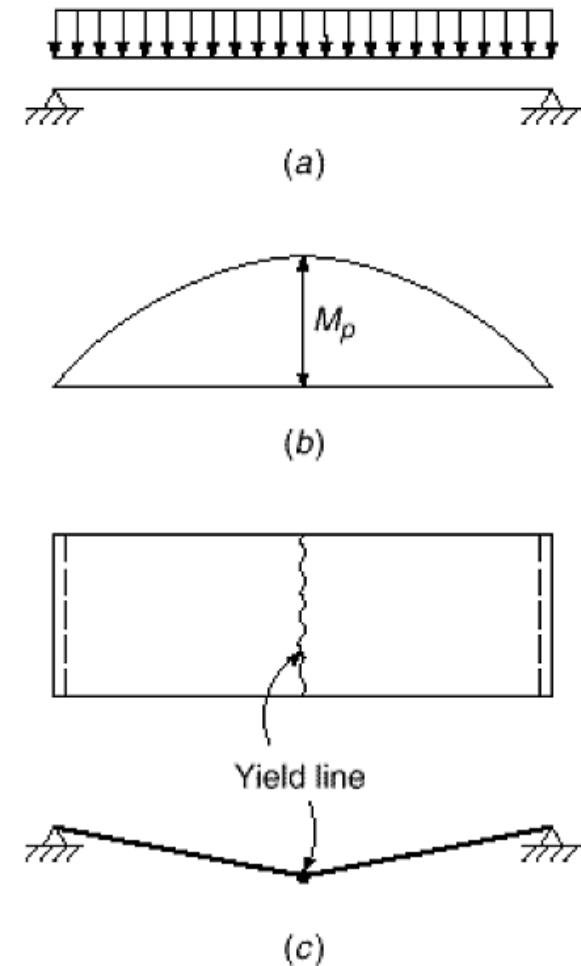
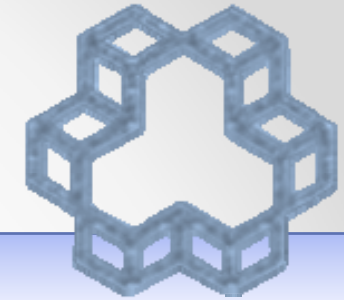


FIGURE 14.1
Simply supported, uniformly
loaded one-way slab.



نکته: تحلیل خط گسیختگی، بارهای گسیختگی متناظر با مقاومت لنگر پلاستیک داده شده در بخش های دال را محاسبه می کند و هیچگونه اطلاعاتی را درباره ی تغییر شکل ها یا بارها در هنگامی که جاری شدن شروع می شود ارائه نمیکنند.

برای دال معین استاتیکی، مانند دالی که در شکل 14.1 است، تشکیل یک خط گسیختگی خرابی را نتیجه می دهد، یک مکانیزم رخ می دهد به عبارتی قطعه های دال بین مفصل و تکیه گاه ها قادرند بدون هیچ افزایشی در بار حرکت کنند. سازه های نامعین، به هر حال معمولاً می توانند بدون فروپاشی حتی پس از تغییر شکل یک یا چند خط گسیختگی تحت بارهای وارده، پایدار بمانند. وقتی این گونه سازه های تحت بارگذاری یکنواخت قرار می گیرند، دال دو طرف گیردار 14.2.a، فرض شده است که به صورت مساوی برای لنگر های منفی و مثبت، آرماتور گذاری شده اند، همانگونه که در شکل 14.2.b نشان داده شده است، توزیع الاستیک از لنگرها خواهند داشت. وقتی که بار بصورت تدریجی افزایش می یابد، مقاطع با تنش های بالا در تکیه گاه، شروع به گسیختگی می کنند.

چرخش ها در لولاهای گسیختگی تکیه گاه اتفاق می افتد، اما لنگرهای تکیه گاهی با مقدار ثابت M_p همچنان اعمال می شوند. بار می تواند بیشتر شود، تا زمانی که لنگر در وسط دهانه مساوی با ظرفیت لنگر در آنجا شود و لولای گسیختگی سوم همانگونه که در شکل 14.2.c نشان داده شده است، تشکیل می شود. حالا دال در حالت مکانیزم است، تغییر شکل های بزرگ اتفاق می افتد و فروپاشی دال اتفاق می افتد.

دیگرام لنگر درست چند لحظه قبل از شکست در شکل 14.2.d نشان داده شده است. توجه کنید که نسبت لنگرهای الاستیک مثبت به منفی ۱ به ۲ دیگر برقرار نیست. به خاطر تغییر شکل غیر الاستیک، نسبت این ممان ها درست قبل از فروپاشی ۱ به ۱ برای این سازه ی خاص می باشد. این نکته قابل ذکر است که نسبت لنگر ها در مرحله ی فروپاشی بستگی به مقدار آرماتورها دارد و نه به نتایج تحلیل الاستیک.

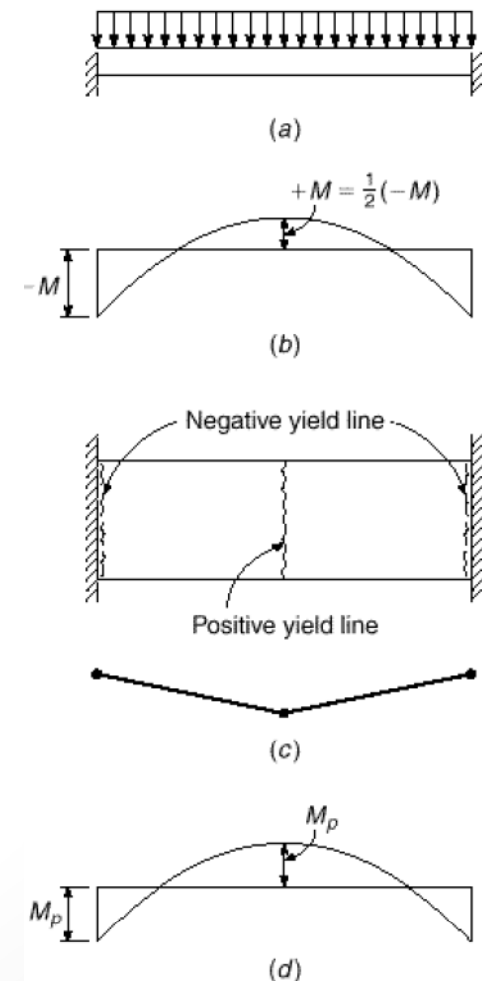
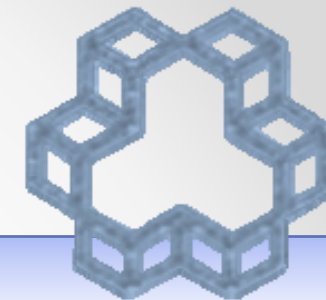


FIGURE 14.2
Fixed-end, uniformly loaded one-way slab.



قوانین لولاهای گسیختگی:

موقعیت و جهت لولای گسیختگی برای دال ساده در شکل ۱۴.۱ آشکار شده است. به صورت مشابه‌ای، لولاهای گسیختگی برای دال یک طرفه نامعین در شکل ۱۴.۲ موجود است. برای حالت‌های دیگر داشتن مجموعه‌ای از خطوط راهنما برای رسم لولاهای گسیختگی و تعیین محورهای چرخش، مفید است. وقتی که دال در حدود خرابی، به دلیل وجود تعداد کافی مفصل‌های پلاستیک یا واقعی برای تشکیل مکانیزم است، محورهای چرخش در طول خطوط تکیه‌گاهی یا ستون‌ها خواهند بود. قطعات دال می‌توانند اینگونه در نظر گرفته شوند که مانند اجسام صلبی در فضا حول این محورهای چرخش، می‌چرخند. لولای گسیختگی بین هر دو قطعه دال مجاور هم یک خط راست است که محل تقاطع دو صفحه‌ی اصلی است، زیرا لولای گسیختگی (مانند خط تقاطع دو صفحه) تمام نقاط مشترک این دو صفحه را شامل می‌شود، آن باید نقطه‌ی تقاطع دو محور چرخش را شامل شود که در واقع مشترک هر دو صفحه است. لولای گسیختگی (یا امتداد لولای گسیختگی) بایستی از محل تقاطع محورهای چرخش دو قطعه دال مجاور بگذرد. اصطلاحات لولای گسیختگی مثبت و لولای گسیختگی منفی، به منظور تمایز قائل شدن بین، به ترتیب آنهایی که همراه با کشش در زیر و کشش در بالای دال می‌باشد، استفاده می‌شود.

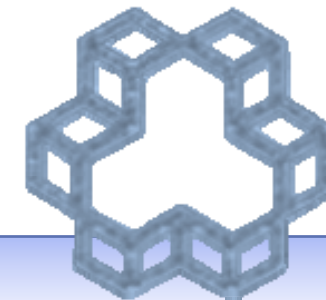


FIGURE 14.4
Typical yield line patterns.

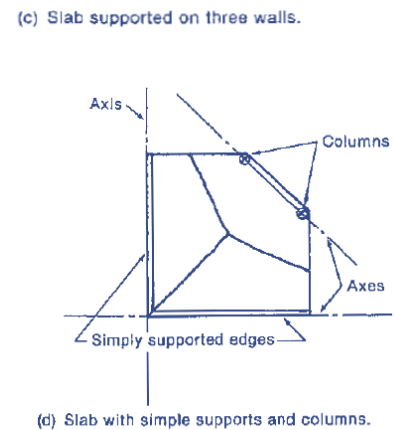
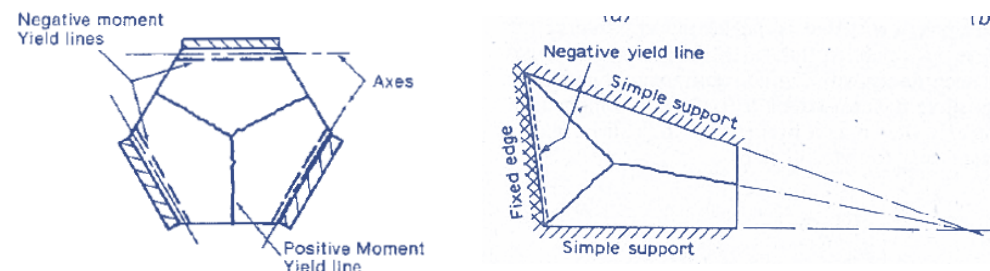
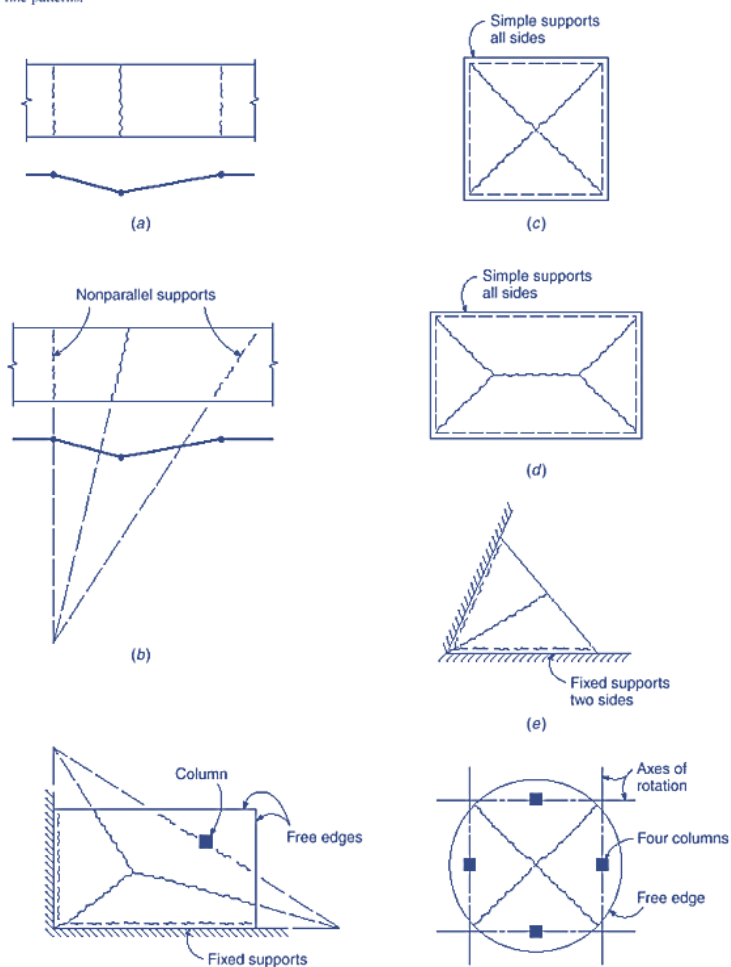
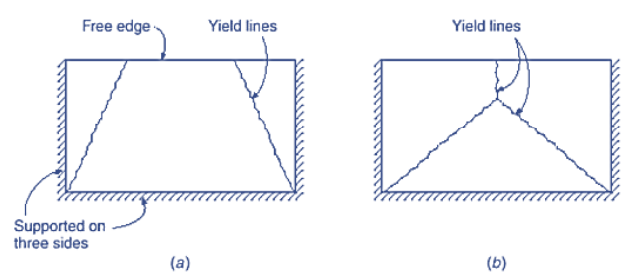
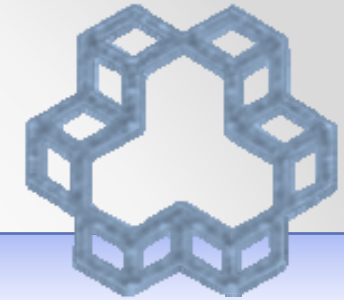


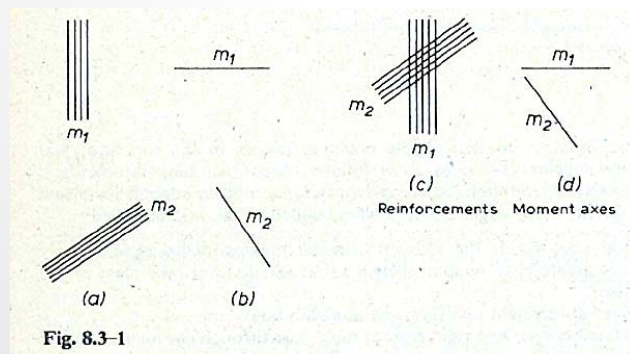
FIGURE 14.5
Alternative mechanisms for a slab supported on three sides.





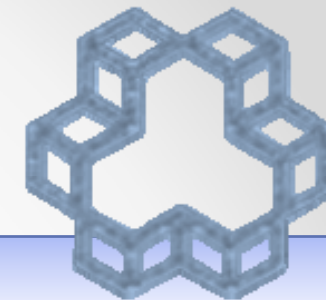
معیار تسلیم پله‌ای ژوهانسن:

قبل از تشریح معیار تسلیم پله‌ای، ما بایستی در ابتدا نماد محور لنگر را توضیح دهیم. فرض کنید که دال با میلگردهایی که لنگر مقاوم گسیختگی‌شان در واحد عرض برای خمش حول محوری عمود بر میلگردها m است، تقویت شده باشد، این گفته ممکن است به اختصار با خطی عمود بر جهت میلگردها و با نام m ، نمایش داده شود؛ بنابراین در شکل (a) - 8.3 - 1، محور همان m_1 نشان می‌دهد که دال به منظور دستیابی به لنگر مقاوم m_1 در واحد عرض برای خمش حول آن (محور m_1) تقویت شده است. به طور مشابه، محور همان m_2 ، لنگر



مقاوم m_2 لنگر مقاوم m_2 واحد در عرض را نشان می‌دهد. جایی که دو محور خمشی برای دال نشان داده شده است. به این معنی که دو گروه از میلگردها وجود دارند؛ بنابراین در شکل (c) - 8.3 - 1، وجود هر دو محور خمش m_1 و m_2 نشان می‌دهد که دسترسی میلگرد m_1 عمود بر محور m_1 و دسته دیگر m_2 عمود بر محور m_2 است. توجه داشته باشید که m_1 به مقاومت لنگر ناشی از میلگردهای m_1 به تنهایی و

بدون در نظر گرفتن اثر میلگردهای m_2 اطلاق می‌شود. به طور مشابه، m_2 به مقاومت لنگر ناشی از میلگردهای m_2 اطلاق می‌شود. طبق قرارداد ما، محور لنگری که با خط توپر مثبت را نشان می‌دهد (مانند میلگردهای نزدیک وجه پایین دال)؛ و محور لنگری که با خط چین کشیده شده است، مقاومت خمشی منفی را نشان می‌دهد (مانند میلگردهای نزدیک وجه بالایی دال)



شکل ۲-۳-۸ بخشی از لولای گسیختگی در دال را که در آن فاصله میلگردها S است را نشان می‌دهد که این S در جهت محور ممان اندازه‌گیری شده است. کمیت $A_s f_y$ نیروی جاری شدن در میلگردهای تقویتی است که در مؤلفه‌های $A_s f_y \cos \phi_1$ و $A_s f_y \sin \phi_1$ به ترتیب سامه و دومت به جرد بپترت به بار $A_s f_y \sin \phi_1$ لولای گسیختگی دارا می‌باشد که در آن ϕ_1 زاویه‌ی بین لولای گسیختگی و محور ممان می‌باشد. نام m_1 روی محور ممان نشان می‌دهد که دال یک دال یک لنگر جاری شدگی m_1 در واحد عرض دارد. یعنی:

$$m_1 s = A_s f_y z$$

که در آن Z بازوی لنگر است.

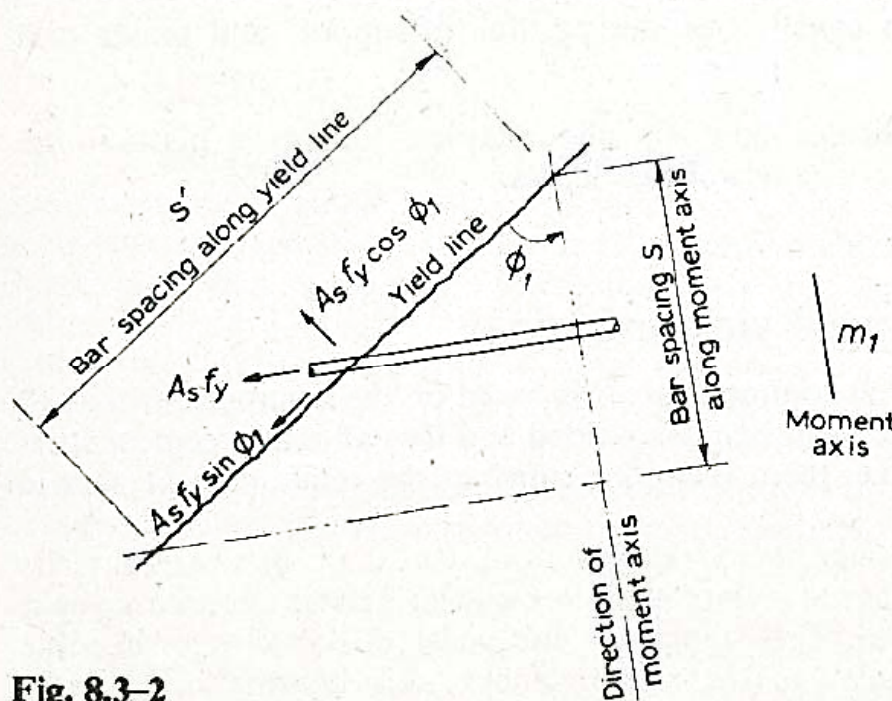
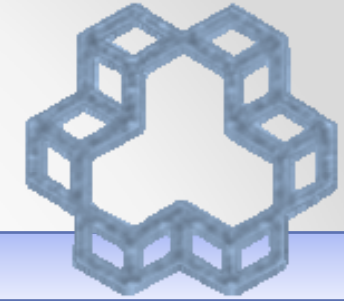


Fig. 8.3-2



اگر ما لنگر جاری شدن نرمال در واحد طول دال در امتداد لولای گسیختگی را با m_n - نشان دهیم (یا لنگر نرمال) و m_{ns} نشان دهنده‌ی لنگر پیچشی در واحد طول دال در امتداد لولای گسیختگی باشد، پس:

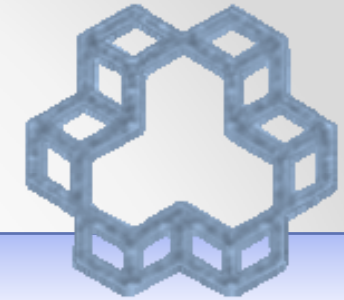
$$\begin{aligned} m_n s' &= (A_s f_y \cos \phi_1) z \\ &= m_1 s \cos \phi_1 \text{ from the expression for } m_1 s \text{ above} \\ m_{ns} s' &= (A_s f_y \sin \phi_1) z \\ &= m_1 s \sin \phi_1 \end{aligned}$$

طبق شکل 2-8.3، $s/s' = \cos \phi_1$ ، این رابطه‌ها ممکن است به صورت زیر نوشته شوند:

$$m_n = m_1 \cos^2 \phi_1$$

$$m_{ns} = m_1 \cos \phi_1 \sin \phi_1$$

توجه داشته باشید که در این رابطه‌ها ϕ_1 ، زاویه‌ی تند است که بین لولای گسیختگی و محور ممان و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری شده است.



در شکل 8.3 – 3(a) با بردارهای ممان دو فلشهای مرسوم نشان داده شده‌اند. جهت فلش با استفاده از قانون دست راست تعیین می‌گردد. حال خوانند باید بررسی کند که اگر لولای گسیختگی یک زاویه‌ی تند ϕ_1 ، که از لولای گسیختگی به سمت محور ممان و در جهت ساعتگرد اندازه‌گیری شده باشد در شکل 8.3 – 3 (b)، رابطه‌های 8.3 – 1 و 2 به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$m_n = m_1 \cos^2 \phi_1 \text{ as in Eqn 8.3-1}$$

$$m_{ns} = -m_1 \cos \phi_1 \sin \phi_1$$

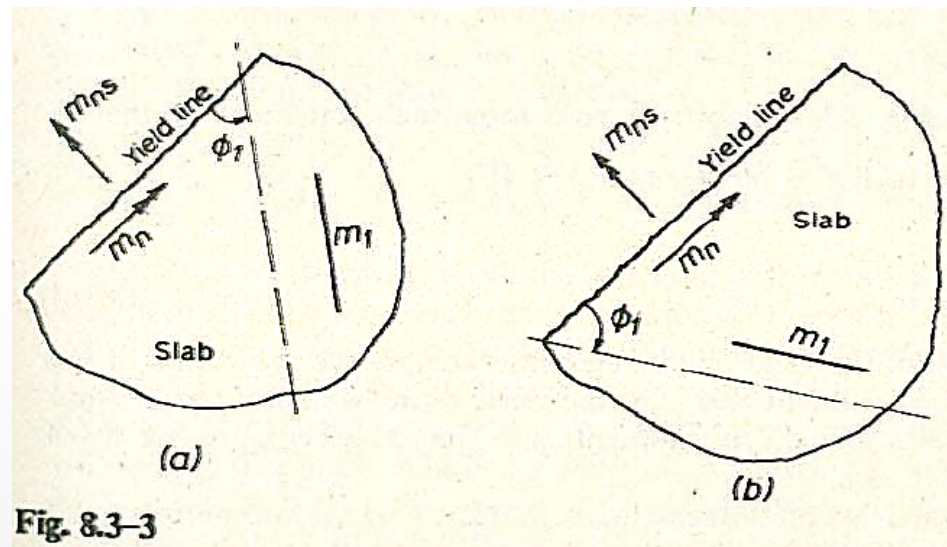
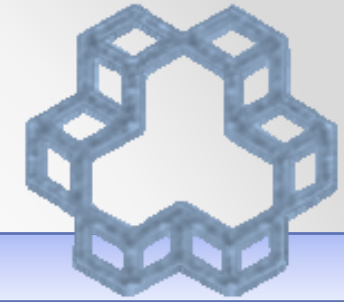


Fig. 8.3-3



حال ما باید به معیار تسلیم پله‌ای ژوهانس برگردیم، که بیان می‌کند:

(آ) لولای گسیختگی ممکن است به بخش‌هایی (پله‌هایی) با لبه‌های به ترتیب موازی و بر میلگردهای کوچکی تقسیم شود. در لبه‌های موازی به میلگردها (آن لبه‌هایی که بر محور همان عمودند، مانند $a'b, b'c, \dots, e'f$ در شکل 4-8.3) هیچ لنگر پیچشی وجود ندارد. در لبه‌های عمود بر میلگردها (یعنی موازی با محور همان، مانند ff', bb', aa' ... در شکل 4-8.3) فقط لنگر نرمال m_1 وجود دارد، که m_1 لنگر جاری شدن در واحد طول برای خمش حول محور ممان است. مقادیر لنگر نرمال m_n و لنگر پیچشی m_{ns} روی لولای گسیختگی باید چنان باشد که تعادل با لنگرهای جاری شدن m_1 روی پله‌های موازی با محور ممان باشند.

(ب) وقتی که چندین دسته از میلگردها را داشته باشیم، لنگرهای m_{ns} و m_n روی لولای گسیختگی ممکن است با در نظر گرفتن هر دو دسته میلگردها بدست آمده باشد برآیند مقادیر m_{ns} و m_n از جمع جبری مقادیر محاسبه شده‌ی جداگانه برای هر دسته از میلگردها حساب می‌شود.

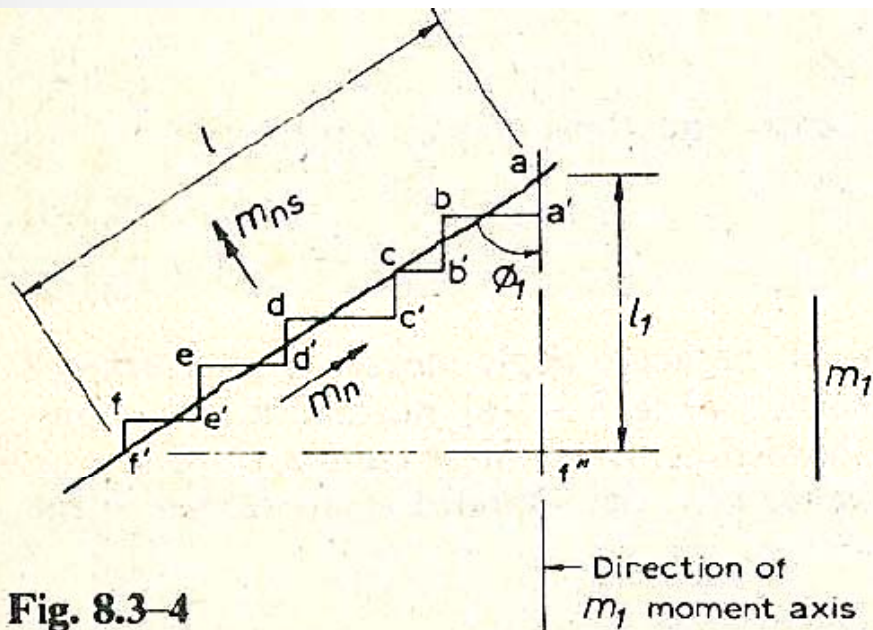
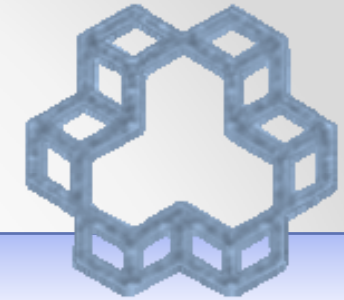


Fig. 8.3-4



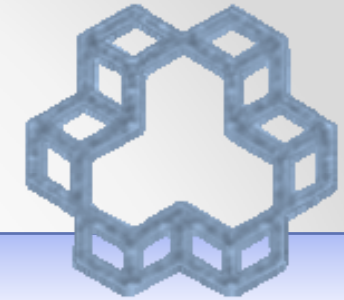
با رجوع به شکل 4 - 8.3 از بیان ژوهانسن بر می آید که:

$$(m_n + m_{ns})l = m_1(aa' + bb' + cc' + \dots + ff')$$

i.e.

$$(m_n + m_{ns})l = m_1 l_1$$

که در آن l طول لولای گسیختگی در نظر گرفته شده است، l_1 تصویر l روی امتداد m_1 و جهت m_1 مؤلفه‌ی m_n در جهت محور ممان m_1 می‌باشد. با رجوع به شکل 4 - 8.3 جهت m_1 از f'' به a می‌باشد.



اگر دو باند از میلگردها موجود باشد، همان گونه که با دو محور ممان در شکل 5 - 8.3 نشان داده شده است، پس از بیان ژوهانسن (b):

$$(m_n + m_{ns})l = m_1 l_1 \quad \text{if } m_1 \text{ alone exists}$$

$$(m_n + m_{ns})l = m_2 l_2 \quad \text{if } m_2 \text{ alone exists}$$

Adding,

$$(m_n + m_{ns})l = m_1 l_1 + m_2 l_2$$

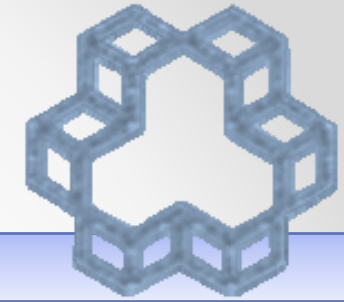
$$m_n = m_1 \cos^2 \phi_1 + m_2 \cos^2 \phi_2$$

$$m_{ns} = m_1 \sin \phi_1 \cos \phi_1 - m_2 \sin \phi_2 \cos \phi_2$$

اگر دو دسته میلگردها عمود بر هم باشند، دال به اصطلاح تقویت شده‌ی عمود بر هم گفته می‌شود. در این حالت محورهای ممان m_1 و m_2 متقابلاً عمود بر هم و زاویه‌ی ϕ_1 و ϕ_2 متمم هم هستند. از این رو، رابطه‌های 8.3 - 9 و 8.3 - 10 خلاصه‌تر می‌شوند به:

$$m_n = m_1 \cos^2 \phi_1 + m_2 \sin^2 \phi_1$$

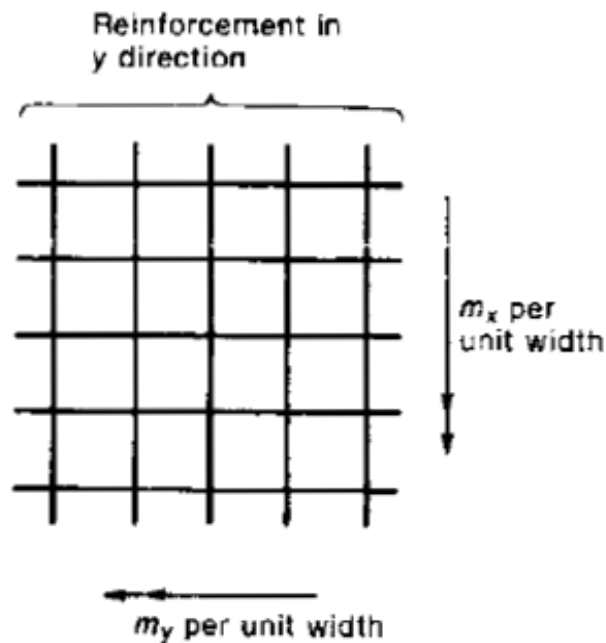
$$m_{ns} = (m_1 - m_2) \sin \phi_1 \cos \phi_1$$



همچنین اگر در این دال $m_2 = m_1$ باشد، دال به اصطلاح تقویت شده‌ی ایزوتروپیک گفته می‌شود؛ و رابطه $8.3 - 9$ و $8.3 - 10$ خلاصه‌تر می‌شوند:

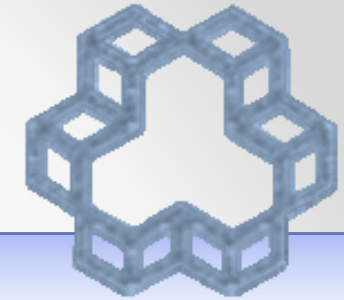
$$m_n = m$$

$$m_{ns} = 0$$



(a) Reinforcement pattern.

در دالی که بصورت ایزوتروپیک تقویت شده است، مقدار لنگر m_n روی لولای گسیختگی، همان مقداری خواهد داشت که لولای گسیختگی به اندازه‌ی دلخواه بچرخد؛ و لنگر پیچشی m_{ns} همیشه صفر خواهد بود. توجه شود که تعریف دال تقویت شده‌ی ایزوتروپیک بر این اساس است که لنگرهای جاری شدگی m_1 و m_2 برابر باشند.



روشهای حل:

ابتدا لولاهای گسیختگی انتخاب می‌شوند، این امکان‌پذیر است که m مورد نیاز برای تحمل مجموعه‌ی بارهای داده شده را حساب کنیم یا برعکس عمل کنیم. حل می‌تواند با روش تعادل انجام گیرد. در حالتی که معادلات تعادل برای هر قطعه‌ی صفحه نوشته شوند یا با روش کار مجازی در حالتی که بر برخی از بخش‌های دال یک تغییر مکان مجازی بدهیم و کار حاصل از آن را در نظر بگیریم.

وقتی که از روش تعادل استفاده شود، بایستی دستگاه‌های قابل ملاحظه‌ای برای نشان دادن تمام نیروهای عمل‌کننده روی هر المان به کار رود. شامل لنگرهای پیچشی به خصوص وقتی چندین لولای گسیختگی هم دیگر را قطع کنند یا وقتی که لولاهای گسیختگی لبه‌های آزاد را قطع می‌کنند. به همین دلیل، بعضی از آیین‌نامه‌های ساختمانی، الزام می‌کنند که محاسبات لولاهای گسیختگی بایستی با روش کار مجازی انجام پذیرد.

در اینجا مقدمه‌ای از حل با استفاده از روش کار مجازی آمده است.

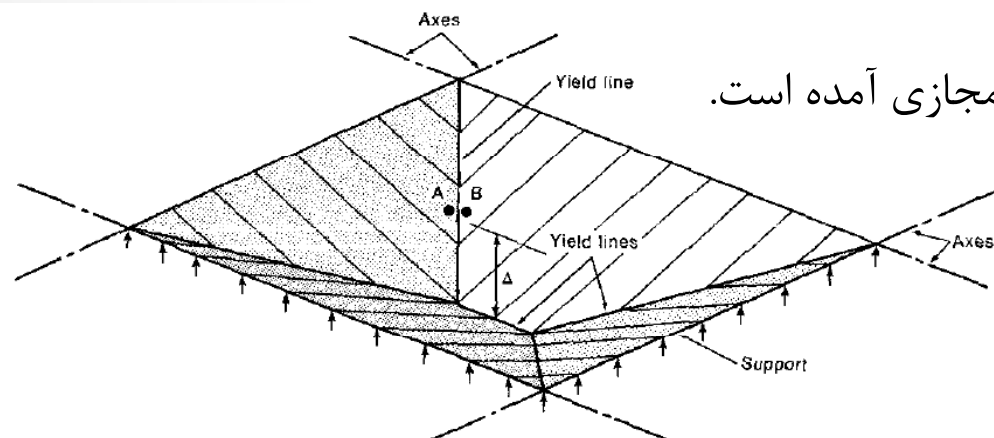
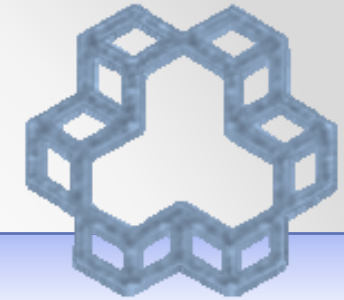


Fig. 15-4
Deformations of a slab with yield lines.



روش کار مجازی:

ابتدا لولاهای گسیختگی انتخاب می‌شوند، به برخی نقاط دال یک تغییر مکان مجازی δ اعمال می‌شود. همانگونه که در شکل 7c - 15 نشان داده شده است، کار خارجی انجام شده توسط نیروها وقتی به این مقدار جابجا می‌شود، برابر است:

$$\begin{aligned} \text{کار خارجی} &= \sum \int \int w \delta dx dy \\ &= \sum (w \Delta c) \end{aligned}$$

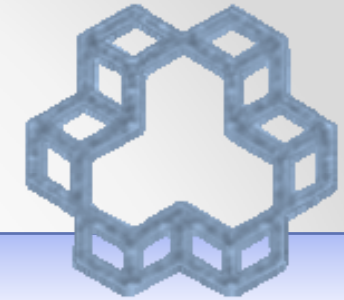
که در آن:

W = نیرو روی یک المان سطحی.

δ = تغییر شکل آن المان.

Δc = تغییر شکل مرکز آن قطعه.

کل کار خارجی برابر است با مجموع کار برای هر صفحه.



کار داخلی انجام شده توسط چرخاندن لولاهای گسیختگی برابر است با:

$$\text{کار داخلی} = \sum (m_b l \phi)$$

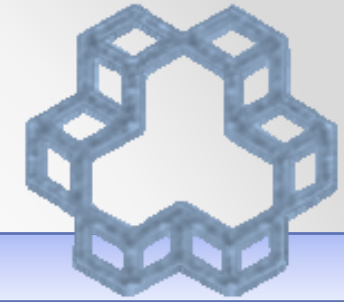
که در آن:

m_b = لنگر خمشی در واحد طول لولای گسیختگی.

l = طول لولای گسیختگی.

θ = تغییر زاویه در لولای گسیختگی.

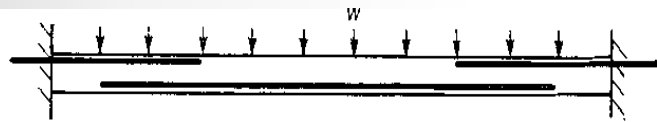
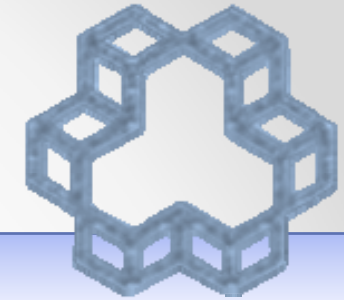
مجموع کار داخلی انجام شده در طی تغییر مکان مجازی برابر است با مجموع کار داخل انجام شده در هر لولای گسیختگی، از آن جایی که فرض شده است لولاهای گسیختگی قبل از اعمال تغییر مکان مجازی تشکیل شده‌اند، هیچ تغییر شکل الاستیکی در طی تغییر مکان مجازی اتفاق نمی‌افتد.



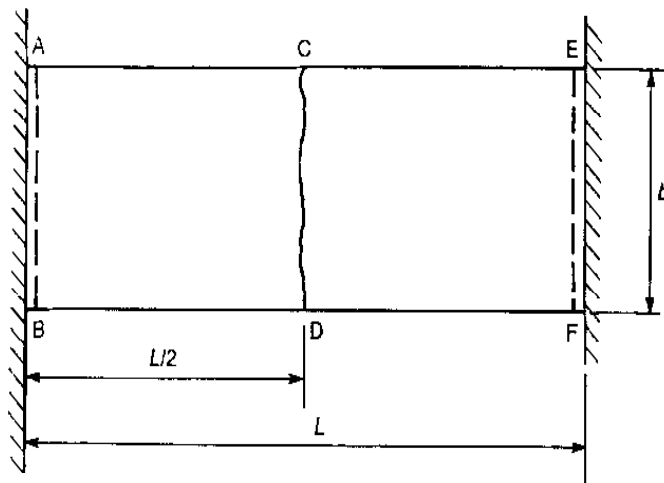
اصل کار مجازی بیان می کند که:

کار خارجی = کار داخلی

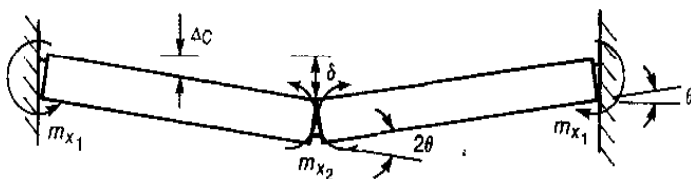
حلّ مسئله، با استفاده از روش کار مجازی یک راه حل دست بالا است. به بیان دیگر، نیروی W بزرگتر یا مساوی با نیروی گسیختگی واقعی است. اگر لولاهای گسیختگی ناصحیحی انتخاب شوند، W بسیار بزرگی برای m داده شده، بدست می آید و برعکس، مقدار m برای W داده شده، بسیار کوچک خواهد بود.



(a) Cross section.



(b) Plan.



(c) Deformed shape.

تحلیل لولای گسیختگی دال یک طرفه با استفاده از کار مجازی:

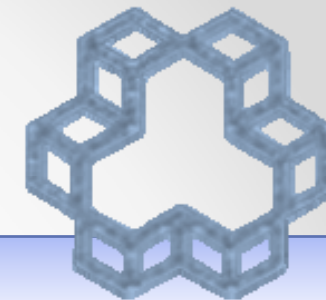
دال یک طرفه‌ی نشان داده شده در شکل 15.7 دارای میلگردهای در بالای دو انتهای دال با ظرفیت لنگر m_{x1} در واحد عرض و میلگردهای در میانه‌ی پایین دال با ظرفیت m_{x2} در واحد عرض می‌باشد. این دال با بار یکنواخت W در واحد سطح بارگذاری شده است. محاسبه‌ی ظرفیت لنگر نیازمند جوابگویی نسبت به W است:

۱- انتخاب محورها و لولاهای گسیختگی:

محورها و لولاهای گسیختگی منفی در طول تکیه‌گاه‌ها و لولاهای گسیختگی مثبت در وسط دهانه تشکیل خواهند شد که این دو با خط تیره و خط ممتوج در شکل 15.7.b نشان داده شده‌اند.

۲- اعمال تغییر مکان مجازی به دال:

بعضی از نقاط دال تغییر شکلی به اندازه‌ی δ به سمت پایین می‌دهند. در شکل 15.7.c، خط C-D، تغییر شکلی به اندازه‌ی δ داده است.



۳- محاسبه کار خارجی:

کل نیرو روی قطعه‌ی A - B - C - D برابر است با $W = w(bL/2)$ تغییر مکان با برآیند w : $\Delta_c = \frac{\delta}{2}$
 بنابراین کار خارجی انجام شده روی صفحه A-B-C-D برابر است با:

$$W\Delta_c = w \left(\frac{bL}{2} \right) \frac{\delta}{2}$$

جمع کل خارجی برابر است با:

$$\text{external work} = 2 \left(\frac{wbL\delta}{4} \right)$$

۴- محاسبه‌ی کار داخلی:

لولای گسیختگی منفی در A-B با زاویه‌ی θ می‌چرخد، که $\theta = \frac{\delta}{(L/2)}$ کار داخلی انجام شده با چرخش این زاویه برابر است با $m_{x1} b \left(\frac{2\delta}{L} \right)$ ، مجموع کار نیروهای داخلی هر سه لولای گسیختگی برابر است با:

$$\text{internal work} = 2 \left[m_{x1} b \left(\frac{2\delta}{L} \right) \right] + m_{x2} b \left(\frac{4\delta}{L} \right)$$

۵- مساوی قرار دادن کار داخلی و خارجی:

$$2 \left(\frac{wbL\delta}{4} \right) = 4(m_{x1} + m_{x2})b \frac{\delta}{L}$$

$$m_{x1} + m_{x2} = \frac{wL^2}{8}$$

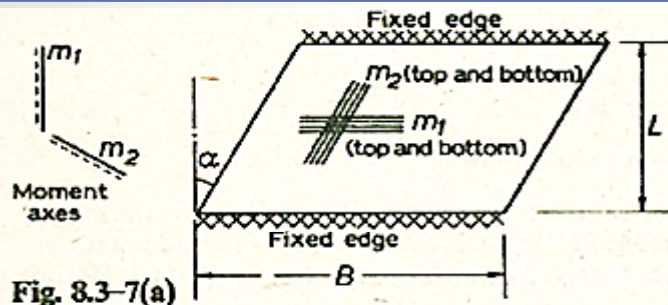
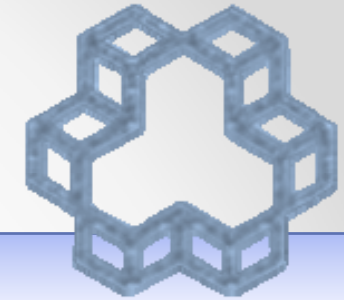


Fig. 8.3-7(a)

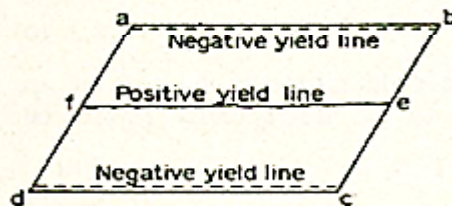


Fig. 8.3-7(b)

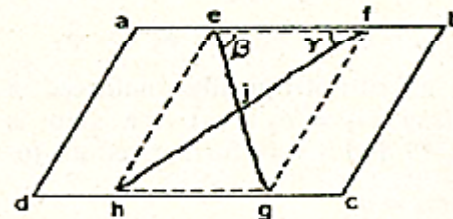


Fig. 8.3-7(c)

SOLUTION

For yield-line pattern in Fig. 8.3-7 (b)

$$(m_n)_{ab} = (m_n)_{ce} = \underline{m_2 \cos^2 \alpha} \text{ from Fig. 8.3-8(a) and Eqn 8.3-7}$$

For yield-line pattern in Fig. 8.3-7 (c)

$$(m_n)_{ef} = \underline{m_2 \cos^2 \alpha} \text{ as for } (m_n)_{ab} \text{ above}$$

$$(m_n)_{ch} = \underline{m_1 \cos^2 \alpha} \text{ from Fig. 8.3-8(b) and Eqn 8.3-7}$$

$$(m_n)_{ej} = \underline{m_1 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) + m_2 \cos^2 (\beta - \alpha)}$$

(from Fig. 8.3-8(c) and Eqn 8.3-7)

مثال 8.3-1: دال کجی در دو لبهٔ مقابل دارای تکیه‌گاه گیردار هستند و در دو لبه‌ی دیگر بدون تکیه‌گاه اند. (شکل 8.3-7(a)) میلگردهای بالا و پایین متشکل از دو سری میلگردهایی نامساوی هستند که به ترتیب با لبه‌های با تکیه‌گاه و لبه‌های بدون تکیه‌گاه موازی‌اند. تعیین کنید، لنگرهای نرمال روی لولاهای گسیختگی برای الگوی فرض شده در شکل 8.3-7.(b)&(c).

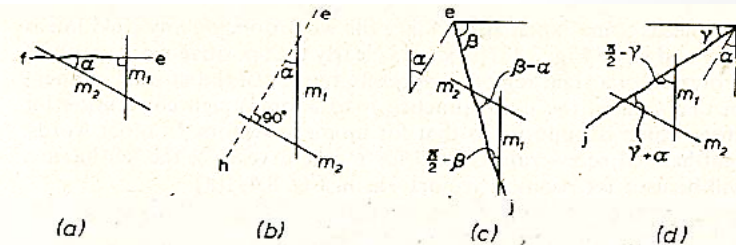


Fig. 8.3-8 Angles between yield line and moment axes

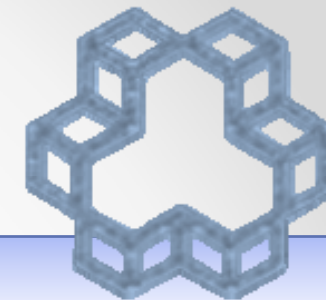
$$= \underline{m_1 \sin^2 \beta + m_2 \cos^2 (\beta - \alpha)}$$

$$(m_n)_{ij} = \underline{m_1 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) + m_2 \cos^2 (\gamma + \alpha)}$$

(from Fig. 8.3-8(d) and Eqn 8.3-7)

$$= \underline{m_1 \sin^2 \gamma + m_2 \cos^2 (\gamma + \alpha)}$$

This worked example demonstrates the usefulness of the concept of moment axes.



اتلاف انرژی در لولای گسیختگی کج:

شکل 8.4-1(a) یک لولای گسیختگی مثبت ab به طول L که زاویه α_A ، α_B را به ترتیب با دو محور eg و df می سازد و پیرامون نواحی صلب A ، B که با زوایای θ_A ، θ_B می چرخند را نشان می دهد. شکل 8.4-1(b) یک سطح مقطع عمود بر لولای گسیختگی را نشان می دهد. زاویه بین نواحی صلب $\theta_{nA} + \theta_{nB}$ می باشد؛ که در آن θ_{nA} مؤلفه‌ی چرخش واقعی بخش صلب A (θ_A) در جهت لولای گسیختگی و θ_{nB} مؤلفه‌ی θ_B می باشد که در دیاگرام‌های برداری در شکل 8.4-1(a) نشان داده شده‌اند.

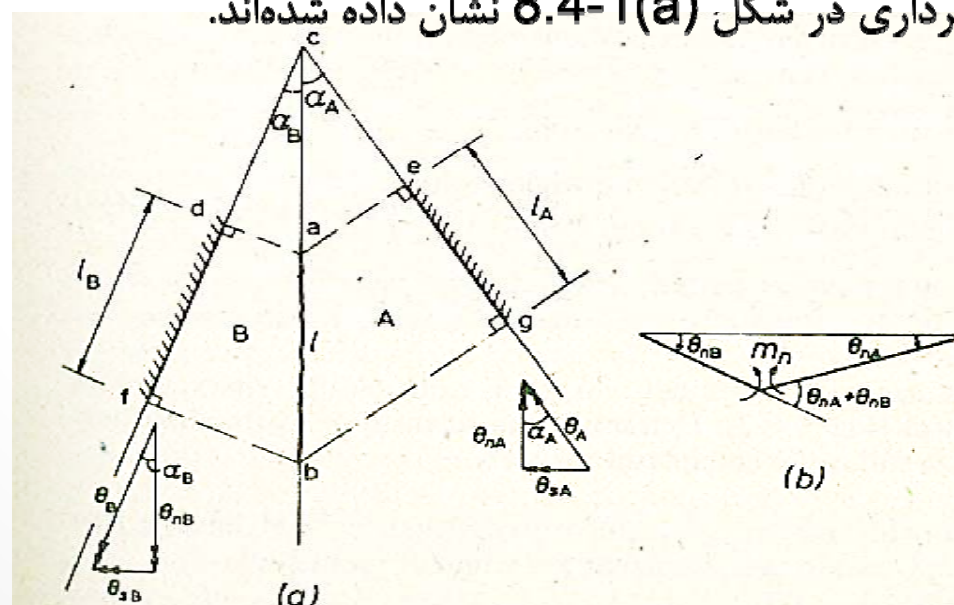
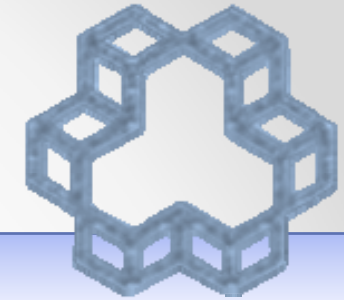


Fig. 8.4-1



علامت قراردادی که برای بردارهای چرخشی به کار رفته، نیاز به برخی توضیحات دارند. از آنجایی که کار انجام شده روی هر لولای گسیختگی همیشه مثبت است و از آنجایی که شکل (a) 8.4-1 به طور واضح نشان می‌دهد که کار مثبت وقتی منتج می‌شود که چرخش ناحیه‌ی صلب برعکس لنگر نرمال m_n که بر آن ناحیه عمل می‌کند. تلاش معمول ما وفق دادن علامت قراردادی برای بردارهای چرخشی‌ای که مخالف جهت بردارهای ممان هستند می‌باشد. به عبارت دیگر تا زمانی که قانون دست راست برای بردارهای ممان استفاده می‌شود، قانون دست چپ برای بردارهای چرخشی استفاده خواهد شد، همان گونه که در شکل (a) 8.4-1 نشان داده شده است.

طبق شکل:

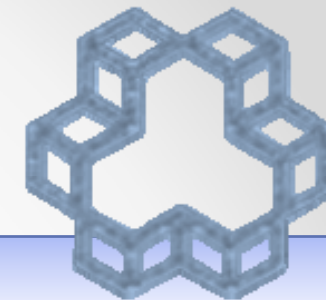
اتلاف انرژی در واحد طول لولای گسیختگی

$$= m_n(\theta_{nA} + \theta_{nB})$$

$$= m_n \theta_A \cos \alpha_A + m_n \theta_B \cos \alpha_B$$

بنابراین اتلاف انرژی برای طول l

$$= m_n \theta_A l \cos \alpha_A + m_n \theta_B l \cos \alpha_B$$



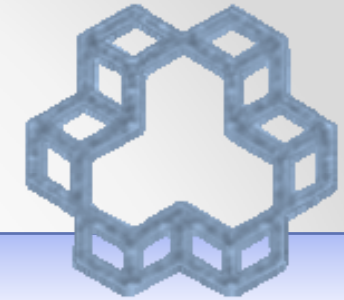
$$= m_n \theta_A l_A + m_n \theta_B l_B$$

که در آن L_A , L_B به ترتیب تصویر ا روی محورهای چرخش نواحی صلب A , B می باشند.

$$= m_n \sum \begin{bmatrix} \text{تصویر } l \\ \text{روی یک محور} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{چرخش ناحیه‌ی} \\ \text{جلسه آن محور} \end{bmatrix}$$

اتلاف به انرژی برای طول l از لولای گسیختگی

که در آن m_n لنگر نرمال در واحد طول روی لولای گسیختگی می باشد.

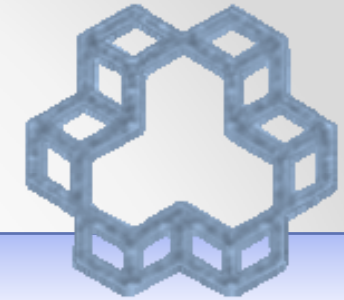


تئوری‌های حد بالا و پایین:

روش‌های تحلیل پلاستیک، مانند تئوری لولای گسیختگی، از تئوری عمومی پلاستیسیته‌ی پایین نیروی خرابی واقعی این حدود می‌توانند استفاده از روش‌های برقرار شده‌ی مناسب بدست آیند. یک حل کامل با تئوری پلاستیسیته، باعث همگرا شدن حد بالا و پایین و رسیدن به یک جواب صحیح خواهد شد. تئوری‌های حد پایین و حد بالا وقتی به دال‌ها اعمال می‌شوند، می‌توانند به صورت زیر بیان شوند:

تئوری حد پایین: اگر برای بار خارجی داده شده این امر امکان‌پذیر باشد که توزیعی از لنگرها که تعادل را ارضا کند و هیچ لنگری از لنگر جاری شدگی، در هیچ نقطه‌ی تجاوز نکند و اگر شرایط مرزی ارضا شوند، بنابراین این نیرو یک حد پایین برای ظرفیت تحمل واقعی است.

تئوری حد بالا: اگر برای یک افزایش کوچک تغییر مکان، کار داخلی انجام شده‌ی دال، فرض شود که لنگر در هر مفصل پلاستیک، مساوی با لنگر جاری شدگی باشد و آن شرایط مرزی ارضا شوند، با کار خارجی نیروی داده شده برای همان افزایش کوچک تغییر مکان مساوی باشد، پس آن بار یک بار حد بالا برای ظرفیت تحمل واقعی است.



اگر شرایط حد پایین ارضا شوند، دال قطعاً بار داده شده را تحمل خواهد کرد، گرچه ممکن است بار بیشتری هم به نسبت باز پخش لنگرها به وجود آید. اگر شرایط حد بالا ارضا شوند، باری بیشتر از بار موجود، قطعاً باعث شکست خواهد شد. اگرچه ممکن است باری کمتر باعث فروپاشی شود در صورتی که مکانیزم شکست انتخاب شده، ناصحیح باشد.

در عمل، در تحلیل پلاستیک سازه‌ها، از تئوری حد پایین یا تئوری حد بالا و نه هردوی آنها استفاده می‌شود و تذکرات برای اینکه بار خرابی بدست آمده به مقادیر اصلی آنها نزدیک است اعمال می‌شوند.

روش خط گسیختگی برای تحلیل دال یک روش حد بالا است و نتیجتاً بار شکست محاسبه شده برای دال با مقاومت خمشی مشخص. ممکن است بیشتر از بار واقعی باشد. این در حقیقت یک نگرانی است زیرا طراح به طور طبیعی ترجیح می‌دهد که جواب صحیح باشد یا حداقل جواب در جهت اطمینانی را به دست آورد. به هر حال فرآیندهایی می‌توانند در تحلیل لولای گسیختگی دخیل شوند، این اطمینان را حاصل کند که ظرفیت محاسبه شده، صحیح باشد. چنین فرآیندهایی با مثال‌هایی در بخش‌های 4.14 و 5.14 تشریح خواهند شد.

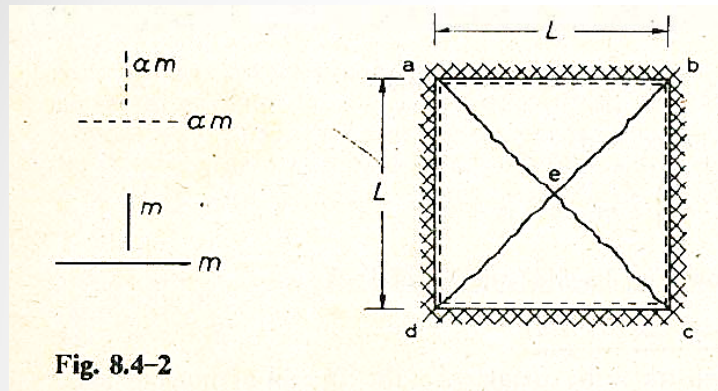
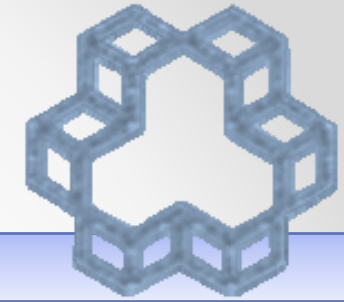


Fig. 8.4-2

مثال 8.4-1: دال مربعی به طور ایزوتروپیک فولادگذاری شده است. بار گسترده ی q را که باعث خرابی دال می گردد پیدا نمایید.

SOLUTION A reasonable pattern of positive and negative yield lines is that shown in Fig. 8.4-2. Consider a unit virtual deflection at point e

$$\text{external work done by the loading} = \frac{1}{3}qL^2$$

(where $\frac{1}{3}$ unit is the deflection at the centroid of the total load). From Eqn 8.4-1,

energy dissipation on the positive yield line ac

$$= m_n \left[(ae) \cos 45^\circ \times \frac{1}{L/2} + (ae) \cos 45^\circ \times \frac{1}{L/2} \right]$$

$$= 2m \text{ since } (ae) = \frac{L}{2} / \cos 45^\circ \text{ and,}$$

from Eqn 8.3-11,

$$m_n = m$$

energy dissipation on the negative yield line ab

$$m_n L \frac{1}{L/2} = 2m_n$$

$$= 2\alpha m \text{ since, from Eqn 8.3-11, } m_n = \alpha m$$

Therefore total energy dissipation on all the positive and negative yield lines

$$= 4[2m + 2\alpha m] = 8m(1 + \alpha)$$

Equating this to the work done by the loading,

$$\frac{1}{3}qL^2 = 8m(1 + \alpha)$$

Therefore

$$q = \frac{24(1 + \alpha)m}{L^2}$$

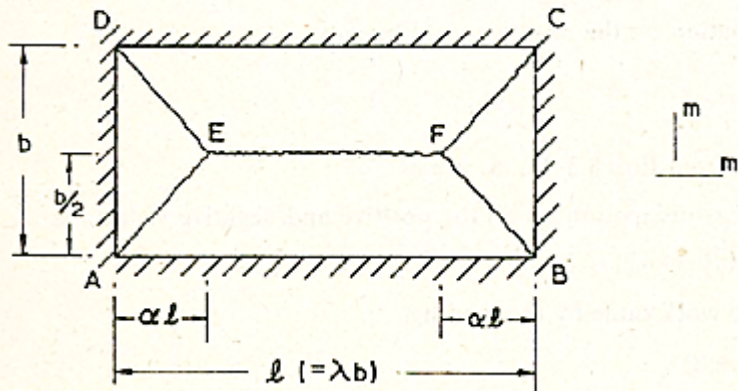
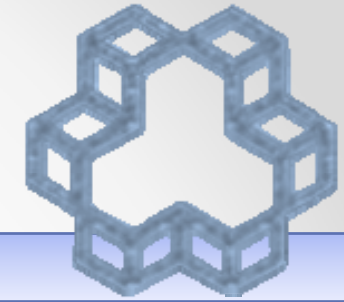


Fig. 8.4-3

مثال 8.4-2: دال با تکیه گاه ساده نشان داده شده در شکل با فولاد پایین ایزوتروپیک فولادگذاری شده است و مقاومت خمشی میلگردها حول هر محوری m می باشد. مقدار مجاز m را وقتی که تحمل بار q توسط دال مد نظر است بدست آورید.

SOLUTION

A reasonable yield-line pattern, defined by the parameter α , is shown in Fig. 8.4-3. Consider unit virtual deflection along EF.

External work done by the load

$$\begin{aligned}
 &= \int qz dA \quad \text{where } z \text{ is the deflection of the elementary area } dA \\
 &= q \times (\text{Volume swept by the slab as EF undergoes unit deflection}) \\
 &= q \left[2 \times \underbrace{\frac{1}{2} b \alpha l}_{\text{end pyramids}} + \underbrace{\frac{1}{2} b (1 - 2\alpha) l}_{\text{central prism}} \right] \\
 &= \frac{qbl}{6} (3 - 2\alpha) \quad (8.4-2)
 \end{aligned}$$

From Eqn 8.4-1,

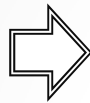
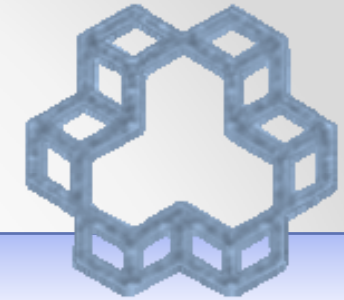
energy dissipation for yield line AE

$$= m \left[\frac{\alpha l}{b/2} + \frac{b/2}{\alpha l} \right]$$

energy dissipation for yield line EF

$$= m \left[2 \times \frac{(1 - 2\alpha)l}{b/2} \right]$$





Therefore, total energy dissipation for yield lines AE, DE, BF, CF and EF

$$= 4m \left[\frac{\alpha l}{b/2} + \frac{b/2}{\alpha l} \right] + 2m \frac{(1-2\alpha)l}{b/2}$$

$$= \frac{2m(1+2\lambda^2\alpha)}{\lambda\alpha} \quad \text{where } \lambda = \frac{l}{b}$$

The work equation is therefore:

$$\frac{2m(1+2\lambda^2\alpha)}{\lambda\alpha} = \frac{qbl}{6} (3-2\alpha)$$

$$m = \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{(3-2\alpha)\alpha}{1+2\lambda^2\alpha} \quad \text{where } \lambda = \frac{l}{b} \quad (8.4-3)$$

The minimum required value of m is the maximum as given by the above work equation.

$$\frac{dm}{d\alpha} = 0 \text{ gives}$$

$$\alpha = \frac{1}{2\lambda^2} (+\sqrt{1+3\lambda^2} - 1) \quad (8.4-4)$$

On substitution of this value of α into the work equation,

$$m = \frac{ql^2}{24} \cdot \frac{(\sqrt{1+3\lambda^2} - 1)^2}{\lambda^4} \quad \text{Ans.}$$

Recognizing that $\alpha^2 = (\sqrt{1+3\lambda^2} - 1)^2/4\lambda^4$, the answer may also be expressed as

$$m = \frac{ql^2}{6} \alpha^2 \quad \text{where } \alpha \text{ has the value determined by Eqn 8.4-4}$$

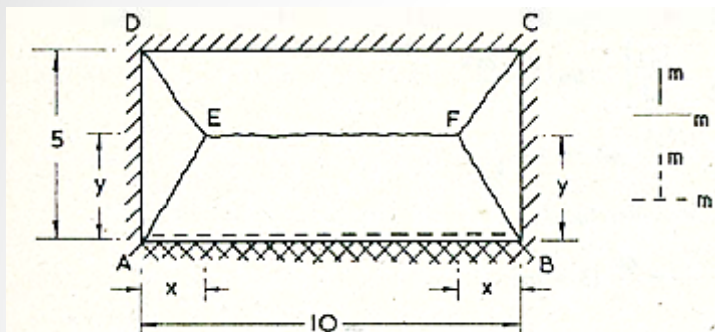
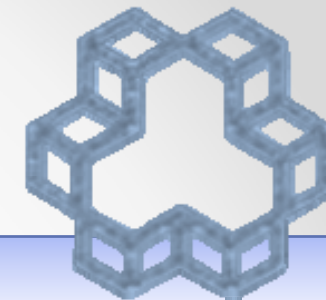


Fig. 8.4-4

مثال 8.4-3: یک دال با ابعاد ۵ در ۱۰ متر که در بالا و پایین با ظرفیت m فولادگذاری شده است و این دال در سه تکیه گاه مفصلی و در تکیه گاه چهارم گیردار می باشد، با در نظر گرفتن شمای مناسب گسیختگی بار گسترده q را که باعث خرابی دال می شود بدست آورید.

SOLUTION The yield-line pattern in Fig. 8.4-4 is defined by the parameters x and y . Consider a unit virtual deflection along EF .

External work done by the load (see Eqn 8.4-2 of Example 8.4-2)

$$\begin{aligned} &= q \times \text{Volume swept} \\ &= q[(2)(\frac{1}{2})(5x) + (\frac{1}{2})(5)(10 - 2x)] \\ &= (25 - 1.667x)q \end{aligned}$$

From Eqn 8.4-1,

energy dissipation for yield lines AE and BF

$$= 2m\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

energy dissipation for yield lines DE and CF

$$= 2m\left(\frac{x}{5-y} + \frac{5-y}{x}\right)$$

energy dissipation for yield line EF

$$= m\left(\frac{10-2x}{y} + \frac{10-2x}{5-y}\right)$$

energy dissipation for negative yield line AB

$$= m\left(\frac{10}{y}\right)$$

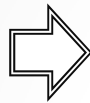
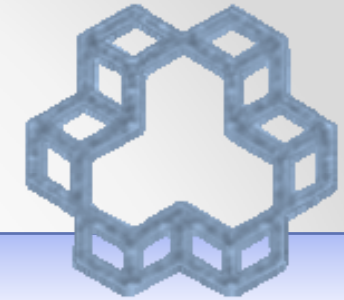
Total energy dissipation

$$= 10m\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{5-y}\right)$$

Therefore the work equation is

$$10m\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{5-y}\right) = (25 - 1.667x)q$$





$$\frac{q}{m} = \frac{10\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{5-y}\right)}{25 - 1.667x} \quad (8.4-5)$$

The worst layout of the yield line pattern satisfies the conditions

$$\frac{\partial(q/m)}{\partial y} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial(q/m)}{\partial x} = 0$$

Now

$$\frac{\partial(q/m)}{\partial y} = 0 \quad \text{when} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{5-y}\right) = 0$$

i.e.

$$\frac{2}{y^2} - \frac{(-1)}{(5-y)^2} = 0 \quad \text{giving } y = 2.93$$

That is q/m is a maximum when $y = 2.93$, irrespective of the value of x . (As expected $y > 2.5$ because of the hogging moment of resistance along the edge AB.)

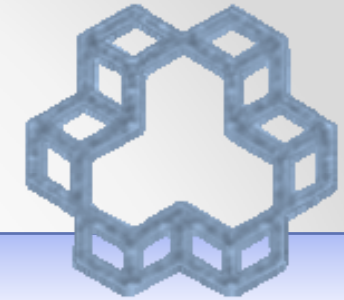
For $y = 2.93$, the Eqn 8.4-5 reduces to

$$\frac{q}{m} = \frac{\frac{10}{x} + 11.657}{25 - 1.667x} \quad (8.4-6)$$

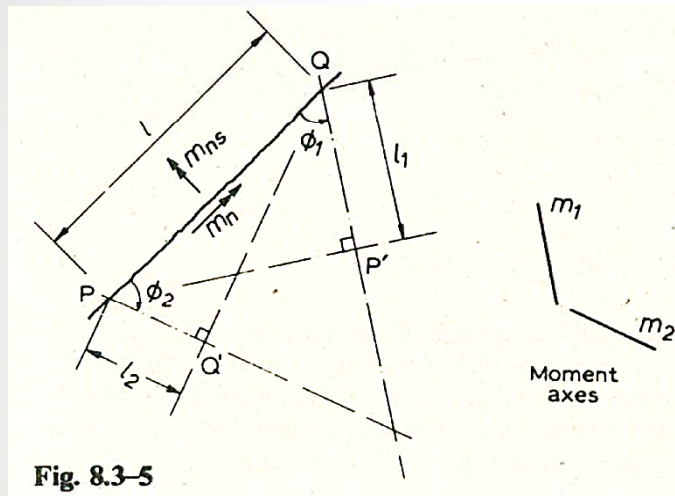
$$\frac{\partial(q/m)}{\partial x} = 0 \quad \text{gives } x = 2.82$$

Substituting $x = 2.82$ into Eqn 8.4-6, or $x = 2.82$ and $y = 2.93$ into Eqn 8.4-5,

$$q = \underline{0.75m}$$



توزیع انرژی در نواحی صلب:



در استفاده از معادله ی ۸.۴-۱ محاسبه ی ممان های عمودی M_n وارد بر هر خط گسیختگی نیاز می باشد که اگر فولاد های خم در مصالح کردن دال ها به کار رود این محاسبات سنگین و طاقت فرسا خواهند شد. در این از روشی به نام روش مولفه برداری استفاده می کنیم که در محاسبه ی آن کلیه ی کار های درونی جمع شده و باعث جداسازی چرخش های وارده بر هر ناحیه ی صلب می گردد. اجازه بدید بازگشتی مختصر به شکل ۸.۳-۵ و معادله ی ۸.۳-۶ که برای یک خط گسیختگی به طول l تنظیم شده است؛ داشته باشیم.

$$(m_n + m_{ns})l = m_1 l_1 + m_2 l_2 \quad (8.5-1)$$

که در آن مقدار بردار l_1 از تصویر l بر روی محور مومنت m_1 تعیین می شود که همان مولفه ی ممان M_n در جهت محور m_1 است؛ و در شکل ۸.۳-۵ جهت l_1 در صورت مثبت بودن خط گسیختگی از \bar{P} به Q بوده و در صورت منفی بودن برعکس آن است (Q به \bar{P}). بردار l_2 به صورتی مشابه از جهت محور مومنت m_2 بدست می آید.

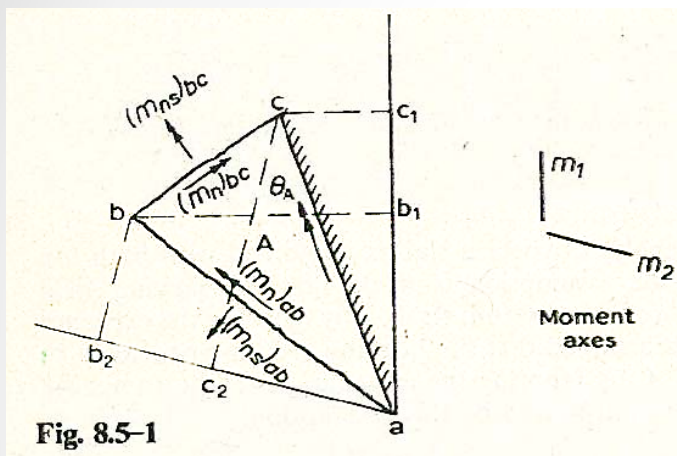
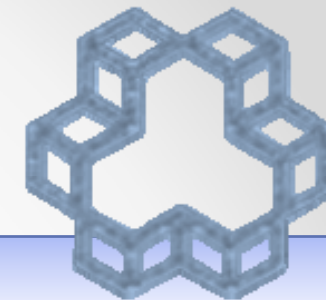


Fig. 8.5-1

یک ناحیه ی صلب مانند A را در نظر بگیرید که با خطوط گسیختگی ab و bc محدود شده و روی تکیه گاه مفصلی ac قرار گرفته باشد. (شکل ۸.۵-۱) معادله ی ۸.۵-۱ را به خط گسیختگی ab اعمال کرده و معادله ی زیر را می یابیم:

$$(m_n l + m_{ns} l)_{ab} = (m_1 l_1 + m_2 l_2)_{ab}$$

به طوری که l_1 همان بردار ab_1 و l_2 همان بردار ab_2 می باشد. برای خط گسیختگی bc داریم:

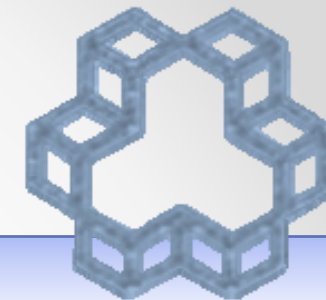
$$(m_n l + m_{ns} l)_{bc} = (m_1 l_1 + m_2 l_2)_{bc}$$

که:

$$l_1 = b_1 c_1 \quad \text{and} \quad l_2 = b_2 c_2$$

و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (m_n l + m_{ns} l)_{ab \text{ and } bc} &= m_1 [(l_1)_{ab} + (l_1)_{bc}] \\ &+ m_2 [(l_2)_{ab} + (l_2)_{bc}] \\ &= m_1 a c_1 + m_2 a c_2 \end{aligned}$$

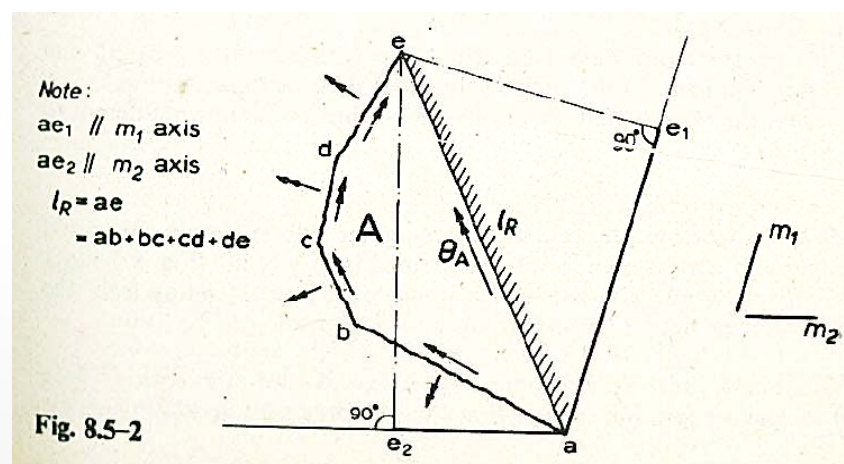


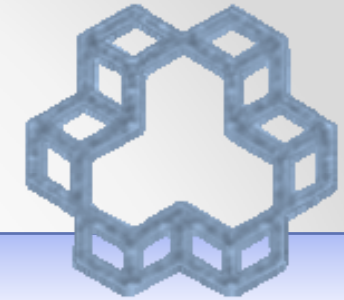
$$\sum (m_n l + m_{ns} l) = m_1 \times \text{projection of } l_R \text{ on } m_1 \text{ moment axis} \\ + m_2 \times \text{projection of } l_R \text{ on } m_2 \text{ moment axis} \quad (8.5-4)$$

$$l_R = l_{ab} + l_{bc} \text{ (i.e. } l_R = ac) \quad \text{که:}$$

معادله ی ۴-۸.۵ را می توان بسادگی به ناحیه ای مانند A که توسط خطوط گسیختگی بیشماری محدود شده است (شکل ۲-۸.۵) تعمیم داد.

$$\sum (m_n l + m_{ns} l) = m_1(ae_1) + m_2(ae_2) \quad (8.5-5)$$



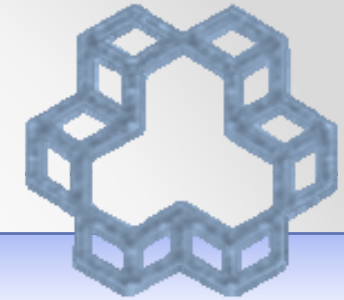


حال اگر در شکل ۸.۵-۲ ناحیه ی صلب A تحت چرخش حول محور ae قرار گیرد، آنگاه بار انجام شده توسط لنگر نرمال m_n و لنگر چرخشی m_{ns} روی خطوط مختلف گسیختگی با ضرب داخلی بدست می آید.

$$\sum (m_n l + m_{ns} l) \cdot \theta_A = m_1 (ae_1 \cdot \theta_A) + m_2 (ae_2 \cdot \theta_A) \quad (8.5-6)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\text{for region A}} \text{energy dissipation} &= m_1 [\text{projection of } l_R \text{ on } m_1 \text{ moment axis}] \times \\ &\quad [\text{projection of } \theta_A \text{ on } m_1 \text{ moment axis}] \\ &+ m_2 [\text{projection of } l_R \text{ on } m_2 \text{ moment axis}] \times \\ &\quad [\text{projection of } \theta_A \text{ on } m_2 \text{ moment axis}] \quad (8.5-7) \end{aligned}$$

بطوریکه علامت هر کدام از جملات سمت راست هنگامیکه تصویر l_R روی محوری لنگر نسبی همان اثرات θ_A را داشته باشد، دارای علامت مثبت می باشد. معادله ۸.۵-۷ را می توان برای دال های با چند لایه آرماتور تعمیم داد، اگرچه طراحان به ندرت از بیش از دو لایه آرماتور در پایین و دو لایه آرماتور در بالای دال استفاده می کنند.



Example 8.5-1. With reference to Eqn 8.5-7, explain how the projection of θ_A on a moment axis may be found.

SOLUTION Consider the typical rigid region A in Fig. 8.5-3, bounded by the positive yield lines ab, bc, cd, de and by the axis of rotation ae. Consider a unit virtual deflection at, say, point d. Then

$$\theta_A = \frac{1}{dd'}$$

where dd' is measured in a direction normal to the axis of rotation

The magnitude of the projection of θ_A on the m_1 moment axis is

$\theta_A \cos \alpha$ where α is the angle between the m_1 axis and the axis of rotation

Therefore

$$\theta_A \cos \alpha = \left(\frac{1}{dd'}\right) \left(\frac{dd'}{dd_1}\right) = \frac{1}{dd_1}$$

That is, considering a unit deflection at any typical point d on the rigid region A, the magnitude of the projection of θ_A on the m_1 moment axis is $1/dd_1$, where dd_1 is the distance from d to the axis of rotation measured in a direction perpendicular to the m_1 moment axis.

Similarly, for the same unit deflection at d, the magnitude of the projection of θ_A on the m_2 moment axis is $1/dd_2$, where the point d_2 is as shown in Fig. 8.5-3. (Note: for clarity, the m_2 moment axis in Fig. 8.5-3 has been shown different to that in Fig. 8.5-2.)

Note:

$ae_1 \parallel m_1$ axis

$ae_2 \parallel m_2$ axis

$l_R = ae$

$= ab + bc + cd + de$

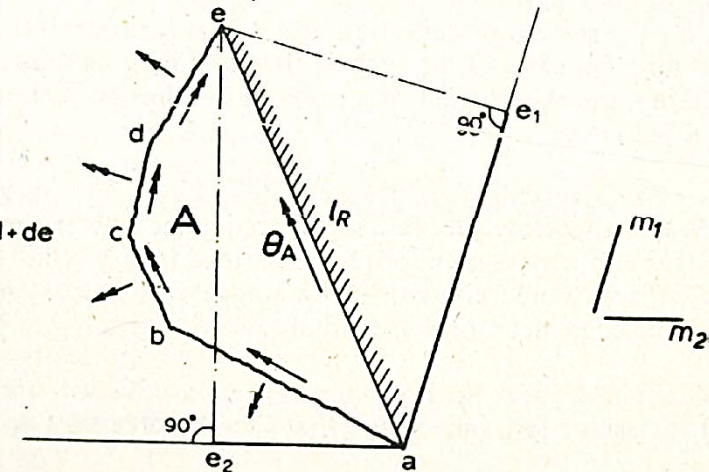


Fig. 8.5-2

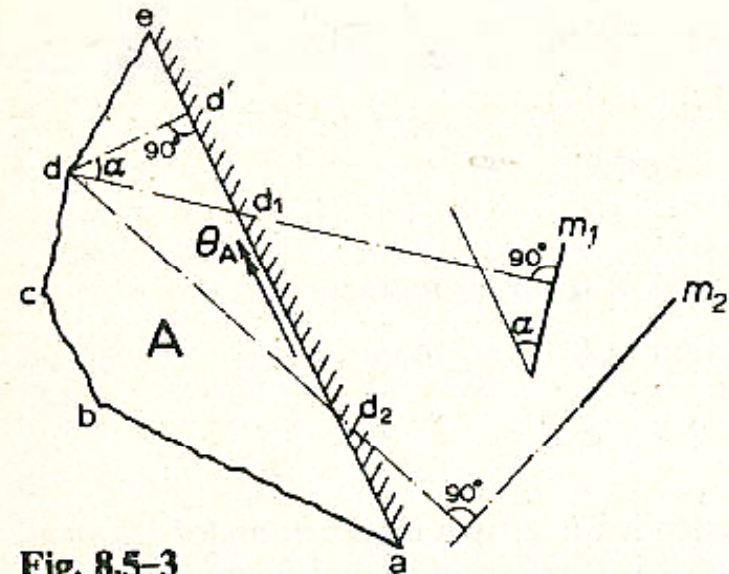


Fig. 8.5-3

Example 8.5-2. An isotropically reinforced triangular slab is simply supported along two edges and carries a uniformly distributed load q N/m² (Fig. 8.5-4(a)). Assuming a collapse mode consisting of a single yield line extending from the vertex to the free edge, determine the collapse load.

SOLUTION Since the slab is isotropically reinforced, we are entitled (see Eqn 8.3-11) to assume for convenience that the reinforcement arrangements on

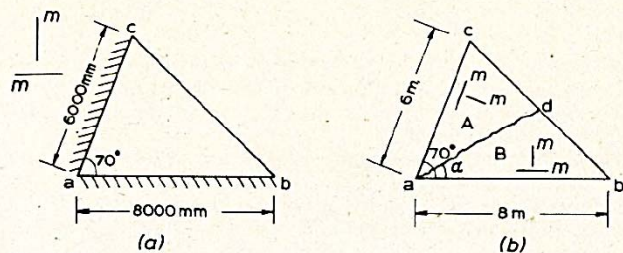


Fig. 8.5-4

the two sides of the yield line are as shown in Fig. 8.5-4(b). Consider unit deflection at d .

$$\text{External work} = \left(\frac{1}{2}\right)(q)\left(\frac{1}{2} \times 8 \times 6 \sin 70^\circ\right) = 8q \sin 70^\circ \text{ newton-metres}$$

From Eqn 8.5-7,

energy dissipation for region A

$$= m \left[(ad) \cos (70^\circ - \alpha) \frac{1}{(ad) \sin (70^\circ - \alpha)} + 0 \right] \text{ newton-metres}$$

(where the zero within the brackets occurs because the rotation vector has a zero projection on one of the moment axes)

$$= m \cot (70^\circ - \alpha) \text{ newton-metres}$$

energy dissipation for region B

$$= m \left[(ad) \cos \alpha \frac{1}{(ad) \sin \alpha} + 0 \right] \text{ newton-metres}$$

$$= m \cot \alpha \text{ newton-metres}$$

The work equation is therefore

$$m \cot (70^\circ - \alpha) + m \cot \alpha = 8q \sin 70^\circ$$

which simplifies to

$$\frac{m}{q} = 8 \sin \alpha \sin (70^\circ - \alpha)$$

The worst layout for the assumed yield-line pattern is when

$$\frac{d(m/q)}{d\alpha} = 0 = -\sin \alpha \cos (70^\circ - \alpha) + \sin (70^\circ - \alpha) \cos \alpha$$

or

$$\sin(70^\circ - 2\alpha) = 0 \quad \text{therefore } \alpha = 35^\circ$$

The work equation then becomes

$$\frac{m}{q} = 8 \sin^2 35^\circ \quad \text{or } q = 0.38m \text{ N/m}^2$$

Example 8.5-4. The skew slab in Fig. 8.3-7(a) is subjected to a central point load Q and a uniformly distributed load q . Considering a yield-line pattern as shown in Fig. 8.3-7(c), where the length hg is l , determine the algebraic relation between Q , q , and l .

SOLUTION For clarity, Fig. 8.3-7(c) is redrawn in Fig. 8.5-7.

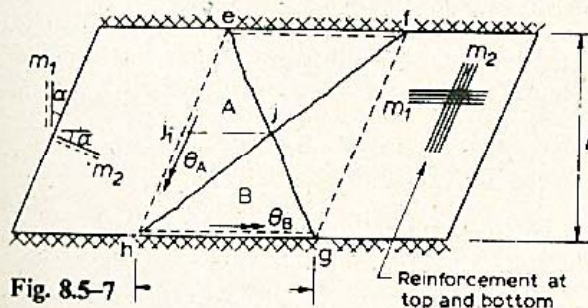


Fig. 8.5-7

Consider a unit deflection at the central point j .

$$\text{external work done} = \frac{1}{2}qlL + Q$$

energy dissipation in region A (using Eqn 8.5-7):

(1) Positive yield lines ej and jh :

$$m_1 [\text{projection of } eh \text{ on } m_1 \text{ moment axis}] \times [\text{projection of } \theta_A \text{ on } m_1 \text{ moment axis}] \\ + m_2 [\text{projection of } eh \text{ on } m_2 \text{ moment axis}] \times [\text{projection of } \theta_A \text{ on } m_2 \text{ moment axis}]$$

$$= m_1 L \frac{1}{jj_1} + 0 \quad (\text{since } \theta_A \text{ has zero projection on } m_2 \text{ moment axis})$$

$$= 2m_1 L/l$$

(2) Negative yield line eh :

$$2m_1 L/l \text{ as for } ej \text{ plus } jh$$

Therefore the total energy dissipation for region A = $4m_1 L/l$

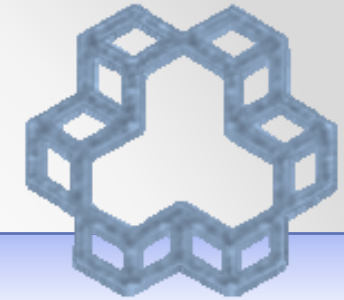
Similarly, the reader should verify that the total energy dissipation for region B = $4m_2 l \cos^2 \alpha/L$

Therefore the total energy dissipation for the four rigid regions is

$$2[4m_1 L/l + 4m_2 l \cos^2 \alpha/L]$$

The required algebraic relation between (Q, q) and l is given by the work equation:

$$\frac{1}{2}qlL + Q = 8[m_1 L/l + m_2 l \cos^2 \alpha/L]$$



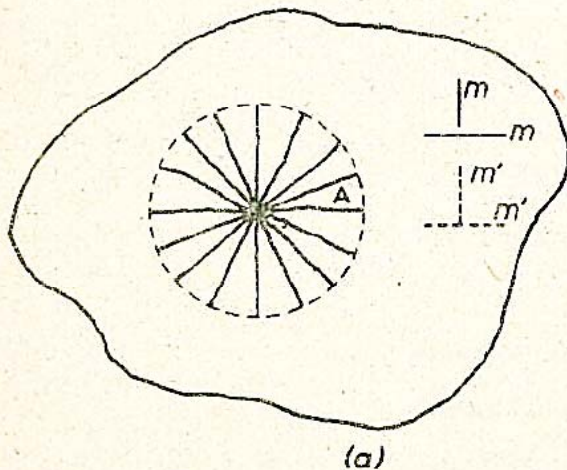
Comments

(a) The main purpose of Example 8.5-4 is to demonstrate the powerfulness of Eqn 8.5-7 in dealing with a fairly complicated problem. The reader should attempt a solution using Eqn 8.4-1; he will immediately realize how cumbersome the solution becomes.

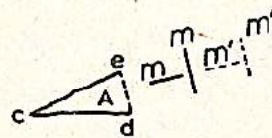
(b) In practice, the designer would first investigate some simpler patterns, such as that in Fig. 8.3-7(b). Also, where a heavy concentrated load is present, a slab may fail by the so called **fan mechanism**. Figure 8.5-8(a) shows part of a slab which is isotropically reinforced with top and bottom steel. Suppose the slab supports a uniformly distributed load q and a rather heavy point load Q . Considering the circular fan mechanism with a unit deflection at the centre,

$$\text{external work done} = \frac{1}{3}qr^2 + Q$$

(where r is the radius of the fan mechanism)



(a)



(b)

Fig. 8.5-3 Fan mechanism

To determine the internal energy dissipation, consider the typical rigid region A in Fig. 8.5-8(b). Since the slab is isotropically reinforced, we are entitled to assume that, locally, the moment axes are as shown.

Using Eqn 8.5-7,

$$\begin{aligned} \text{energy dissipation for region A} \\ &= m[ed][1/r] + m'[ed][1/r] \\ &= \frac{(m + m')}{r} [ed] \end{aligned}$$

Therefore, the total energy dissipation for entire fan mechanism

$$\begin{aligned} &= \frac{m + m'}{r} \sum(ed) = \frac{m + m'}{r} 2\pi r \\ &= 2\pi(m + m') \end{aligned}$$

The work equation is therefore

$$\frac{\pi}{3}qr^2 + Q = 2\pi(m + m')$$

Therefore, if the distributed load is absent,

$$Q = 2\pi(m + m') \text{ and is independent of the radius of the fan}$$

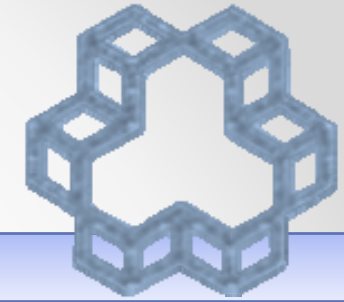
Conversely, if the point load is absent,

$$\frac{\pi}{3}qr^2 = 2\pi(m + m')$$

or

$$q = \frac{6(m + m')}{r^2} \text{ which reduces as } r \text{ increases.}$$

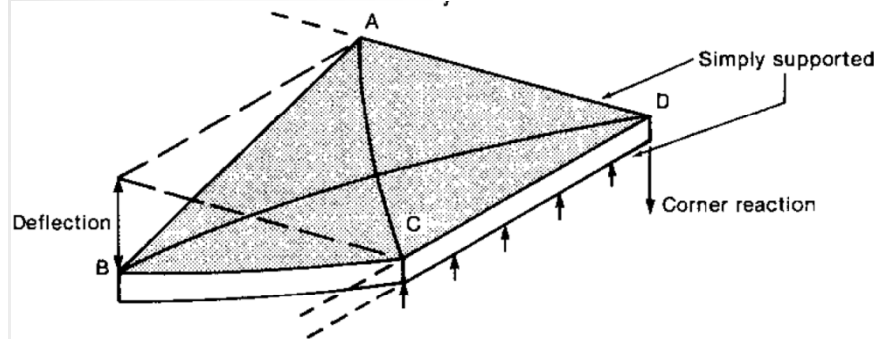
In other words, where a slab supports a distributed load, a fan mechanism always extends to a slab boundary; where a slab supports a point load only, the fan mechanism gives a constant value for the collapse load which is independent of the radius of the mechanism.



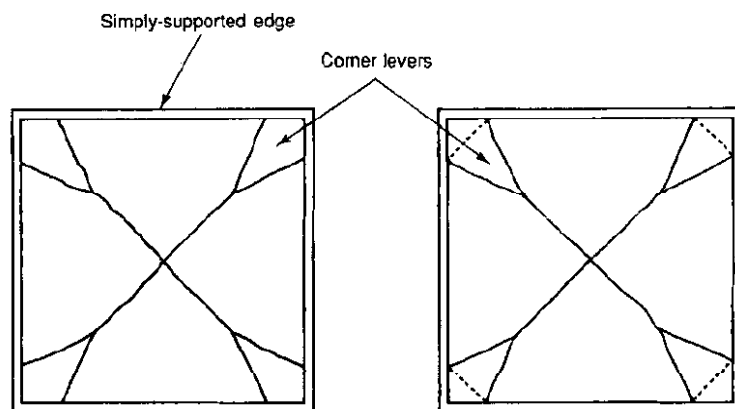
الگوی خط گسیختگی در گوشه های ناپیوسته:

در عمل خطوط گسیختگی که به صورت قطری تا گوشه های دال ادامه می یابند در شکل ۱۳-۶۲، تحت اثر خمش قرار می گیرند. در اثر این خمش الگوی خطوط گسیختگی در گوشه ها در چنین دال هایی همانند شکل ۱۵-۱۱ به سمت گوشه ها شاخه می شود. اگر گوشه های دال بتوانند بالا بیایند این چنین می شود؛ ولی اگر گوشه های ثابت باشند در دال ترک یا خط گسیختگی در طول گوشه ها ایجاد می گردد. همانند شکل ۱۵-۱۱b.

در نظر گرفتن اثرات المان های گوشه ای باعث کاهش ظرفیت بار یکنواخت در دال های روی تکیه گاه مفصلی به میزان ۹ درصد در مقایسه با در نظر نگرفتن آنها می شود. در دال های واقعی این کاهش ظرفیت با افزایش ظرفیت توسط پدیده ی کرنش سختی فولاد ها و عملکرد غشائی دال جبران می شود.



(a) Deformations of corner of simply supported slab.



(a) Corners free to lift

(b) Corners held down