



مقایسه روش‌های حل PSO ، $BFGS$ ، FFM و ژنتیک در حل مسائل انتقال حرارت معکوس از روش $Tikhonov$

سیاوش عزیزی * 1، ژاله اژدرزاده 2، مهرداد ناظمیان 3

- 1 آموزشکده فنی و حرفه ای سما سهند، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تبریز، تبریز، ایران.
پست الکترونیکی: syawash70@gmail.com
- 2 آموزشکده فنی و حرفه ای سما سهند، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تبریز، تبریز، ایران.
پست الکترونیکی: zh_azhdarzadeh@yahoo.com
- 3 آموزشکده فنی و حرفه ای سما سهند، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تبریز، تبریز، ایران.
پست الکترونیکی: en.mehrdad_nazemian@yahoo.com

چکیده

روش‌های معکوس، کاربرد بسیار زیادی در شاخه‌های مختلف مهندسی دارند که در میان آن‌ها، روش‌های هدایت حرارتی معکوس، شاخه‌ای جداگانه به خود اختصاص داده است. مسئله هدایت حرارتی مستقیم به مسئله‌ای گفته می‌شود که با معلوم بودن شرایط مرزی، خواص ترموفیزیکی، هندسه جسم و منبع حرارتی درون جسم، معادله هدایت حرارتی درون جسم حل می‌شود و توزیع دمای درون جسم مشخص می‌گردد. در مقابل مسئله هدایت حرارتی معکوس، مسئله‌ای است که در آن شرایط مرزی (مانند شار حرارتی یا دما)، شرایط اولیه و یا خواص ترموفیزیکی مواد مورد استفاده نامعلوم است و با استفاده از دمای اندازه‌گیری شده برخی از نقاط جسم، مجهولات تخمین زده می‌شوند. این مسائل کاربردهای کلیدی و متنوعی در انتقال حرارت دارند. برای مثال دمای سطح خارجی یک محفظه احتراق به صورت مستقیم قابل اندازه‌گیری نیست. در نتیجه برای محاسبه این دما بایستی با استفاده از روش معکوس و با اندازه‌گیری دمای تعدادی از نقاط دیگر دمای سطح محفظه را محاسبه کرد.

از لحاظ ریاضی اثبات شده است که مسئله هدایت حرارتی معکوس یک مسئله بد وضع است؛ یعنی حل این مسائل شروط کلی وجود، یکتایی و پایداری را به ازای تغییرات کوچک در ورودی ارضا نمی‌کند. برای رفع این مشکل روش‌های متعددی برای حل مسائل انتقال حرارت معکوس پیشنهاد شده است. به دست آوردن جواب قابل قبول در مسائل معکوس به انتخاب و به‌کارگیری الگوریتم مناسب برای حل وابسته است.

در روش $FFGI$ نتایج نشان می‌دهد که این روش انعطاف‌پذیری خوبی برای مسائل مختلف دارد و با انتخاب مناسب ثوابت درگیر در این روش می‌توان با دقت خوبی به جواب مسئله در زمان کمتری نسبت به روش‌های دیگر رسید.

در دو روش ژنتیک و PSO نتایج نشان‌دهنده دقت قابل قبول این روش‌ها است. ولی این دو روش در مقایسه با روش $FFGI$ اغلب زمان حل بیشتری را به خود اختصاص می‌دهند.

واژه‌های کلیدی

روش هدایت حرارتی معکوس، بد وضع، پایداری، روش $FFGI$ ، روش ژنتیک، روش PSO



1- مقدمه

برای حل مسائل انتقال حرارت معکوس روش‌های بسیاری پیشنهاد شده است. استولتز یکی از اولین افرادی است که برای حل تحلیلی مسائل خطی انتقال حرارت معکوس روشی ارائه کرده است [1]؛ ولی حل او برای گام زمانی کوچک ناپایدار است. ناپایداری حل مسائل معکوس اساسی‌ترین مشکل در حل این مسائل است و به همین دلیل به دست آوردن روشی مناسب برای حل *IHCP* تاکنون یکی از دغدغه‌های مهندسی است. حل‌های تحلیلی با استفاده از تبدیلات انتگرالی و لاپلاس گسترش یافت. این روش‌ها به داده‌های پیوسته مشتق‌پذیر نیاز دارد در نتیجه ابزاری کاربردی و مفید نیستند.

از آنجایی که روش‌های تحلیلی به صورت کلی برای مسائل خطی کاربرد دارند، برای حل مسائل غیرخطی روش‌های عددی مانند FDM^1 و FEM^2 مورد استفاده قرار می‌گیرند.

لی و همکاران [2] 16 مورد از الگوریتم‌ها و روش‌های تحلیلی و عددی را که تاکنون برای حل مسائل معکوس ارائه شده مورد بررسی قرار داده‌اند و ویژگی‌ها و شرایط استفاده از هر کدام را بیان کرده‌اند. همان‌طور که قبل‌تر نیز ذکر شد اغلب روش‌های تحلیلی مطرح شده فقط برای مسائل خطی کاربرد دارند. پس در شرایط واقعی نمی‌توان از جواب آن‌ها جواب مورد قبولی انتظار داشت. روش‌های عددی بر مبنای تعریف یک تابع هدف و کمینه کردن آن عمل می‌کنند. بدین صورت که اختلاف جواب‌های مسئله معکوس از مقدار اندازه‌گیری شده، به صورت تابعی تعریف می‌شود و این تابع با در نظر گرفتن شرایط مسئله و استفاده از یکی از الگوریتم‌های بهینه‌سازی کمینه می‌شود تا به جواب مطلوب مسئله برسیم. با توجه به تنوع موجود در انتخاب تابع هدف و الگوریتم بهینه‌سازی، روش‌های مختلفی برای حل مسائل انتقال حرارت معکوس وجود دارد. با توجه به اینکه مسائل معکوس از دیدگاه ریاضیات از نوع بد وضع هستند، پایداری حل اهمیت بسیاری دارد. در نتیجه در هر مسئله باید به دنبال روشی باشیم که علاوه بر دقت، پایداری قابل قبولی نیز داشته باشد [3].

لی و همکاران [2] روش تنظیم تیخونوف³ را به عنوان روشی متداول برای حل مسائل انتقال حرارت معکوس معرفی کرده‌اند. این روش نتیجه بالانس بین دقت و پایداری حل است. یکی از دلایل اصلی کاربرد موفقیت‌آمیز این روش، تعریف تابع هدف مناسب است. در این پروژه برای حل مسائل معکوسی که در ادامه مقاله آمده است، ابتدا با استفاده از روش تنظیم تیخونوف تابع هدف تعریف می‌شود؛ سپس به کمک الگوریتم بهینه‌سازی $BFGS^4$ این تابع بهینه‌شده و جواب مورد نظر به دست می‌آید.

2- روش تیخونوف

مطالعات نشان می‌دهند که در این روش ساختار تابع هدف نقش مهمی را در موفقیت‌آمیز بودن حل بازی می‌کند. تاکنون توابع هدف متعددی برای بهبود عملکرد این روش پیشنهاد شده است. بر اساس پارامترهای اصلی این روش، می‌توان یک تابع هدف به صورت زیر تعریف کرد:

$$\min L(x) = E(x) + \alpha R(x) \quad (1)$$

که $E(x)$ دقت حل را اندازه‌گیری می‌کند و $R(x)$ بیانگر پایداری است.

¹ Finite Different Method

² Finite Element Method

³ Tikhonov Regularization Method

⁴ Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno



در کاربردهای واقعی نویزهایی که در داده‌های اندازه‌گیری شده وجود دارند، اجتناب‌ناپذیر و پیچیده هستند. به همین خاطر لی و همکاران [2] تابع زیر را در نظر گرفتند:

$$\min E(x) = \delta \sum_{j=1}^q (r^2)_{j,m} + (1 - \delta) \sum_{j=1}^m f(r_j) \quad (2)$$

که δ مقداری بین صفر و یک است.

با در نظر گرفتن طبیعت بد وضع مسئله، با ترکیب دو رابطه قبل خواهیم داشت:

$$\min L(x) = \delta \sum_{j=1}^q (r^2)_{j,m} + (1 - \delta) \sum_{j=1}^m f(r_j) + \alpha \Omega(x) \quad (3)$$

لی و همکاران تابع $f(r_j)$ و $\Omega(x)$ را به گونه‌ای در نظر گرفتند که با جایگذاری آن‌ها در رابطه بالا به رابطه نهایی می‌رسیم:

$$\min L(x) = \delta \sum_{j=1}^q (r^2)_{j,m} + (1 - \delta) \sum_{j=1}^m \beta^2 \left[\frac{1}{\beta} (r_j^2 + \xi)^{1/2} - \ln \left(1 + \frac{1}{\beta} (r_j^2 + \xi)^{1/2} \right) \right] + \alpha \sum_{i=1}^n (x_i^2 + \xi)^{p_i/2} \quad (4)$$

با توجه به روش تیخونوف تابع هدف مسئله تعریف شد. حال برای حل این تابع هدف از روش FFM^1 و الگوریتم $BFGS$ استفاده می‌شود.

3- روش FFM

گام 1: کمینه کردن تابع هدف $J(x)$ با استفاده از یک الگوریتم مناسب از یک نقطه اولیه x^0 و رسیدن به یک مینیمم محلی x_1

گام 2: بر اساس اطلاعات حل x_1 یک تابع 2 به نام $P(x)$ به دست می‌آید به صورتی که در آن یک مقدار ماکزیمم x_1 وجود دارد. در هر ناحیه‌ای که از x_1 بزرگ‌تر است تابع مقدار مینیمم ندارد و در بعضی از ناحیه‌هایی که بزرگ‌تر از x_1 هستند یک مقدار مینیمم \hat{x} دارد که با کمینه کردن تابع $P(x)$ مقدار \hat{x} به دست می‌آید.

¹ Filled function method

² filled function



گام 3: با در نظر گرفتن \hat{x} به عنوان نقطه شروع $J(x)$ مقدار مینیمم این تابع مجدداً محاسبه می‌شود تا به نقطه x_2 برسیم که این مقدار در شرط $J(x_2) \leq J(x_1)$ صدق می‌کند.

گام 4: جایگزینی x_2 به جای x_1 و تکرار فرایند بالا تا اینکه شرطی که از قبل برای همگرایی تعیین شده است ارضا شود.

3- الگوریتم BFGS

گام 1: تعیین نقطه شروع $x^{(0)}$ و تلورانس همگرایی ε

گام 2: $H_0 = I_n$ قرار می‌دهیم و گرادیان را حساب می‌کنیم:

$$g_0 = \nabla J(x^0) \quad (5)$$

گام 3: جهت جستجو را محاسبه می‌کنیم:

$$d^{(k)} = -H_k g_k \quad (6)$$

گام 4: محاسبات را انجام می‌دهیم:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \gamma_k d^{(k)} \quad (7)$$

$$g_{k+1} = \nabla J(x^{(k+1)}) \quad (8)$$

که γ_k از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$J(x^{(k)} + \gamma_k d^{(k)}) = \min J(x^{(k)} + \gamma d^{(k)}) \quad (9)$$

گام 5: اگر $\|g_{k+1}\| \leq \varepsilon$ محاسبات تمام و جواب مسئله گزارش می‌شود، در غیر این صورت به گام 6 می‌رویم.

گام 6: قرار می‌دهیم:

$$\phi^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)} \quad (10)$$

و

$$\varphi^{(k)} = g^{(k+1)} - g^{(k)} \quad (11)$$

و H_{k+1} را محاسبه می‌کنیم و سپس به گام 3 می‌رویم.



$$H_{k+1} = H_k + \left(1 + \frac{\varphi^{(k)T} H_k \varphi^{(k)}}{\phi^{(k)T} \varphi^{(k)}} \right) \frac{\phi^{(k)} \phi^{(k)T}}{\phi^{(k)T} \varphi^{(k)}} - \frac{\phi^{(k)} \varphi^{(k)T} H_k + H_k \varphi^{(k)} \phi^{(k)T}}{\phi^{(k)T} \varphi^{(k)}} \quad (12)$$

4- شبیه‌سازی عددی

بر اساس تحلیل‌های بالا در روش تعریف شده یک تابع هدف طبق روش تیخونوف تعریف می‌شود و این تابع با استفاده از روش *FFM* به همراه الگوریتم *BFGS* حل می‌شود که به این روش *FFGI*¹ می‌گوییم. در این بخش شبیه‌سازی‌های عددی برای امکان‌سنجی کاربرد این روش و بررسی بازده آن در چند مورد مختلف انجام می‌شود. برای مقایسه بهتر این روش، هر مسئله توسط روش *SA*² نیز حل می‌شود و نتایج با یکدیگر مقایسه می‌شوند [4]

- مسئله 1:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (13)$$

$$T(x,y) = 1500, \text{ when } x = -0.5 \text{ and } -0.5 \leq y \leq 0.5$$

$$T(x,y) = 600, \text{ when } y = -0.5 \text{ and } -0.5 \leq x \leq 0.5$$

$$T(x,y) = 1000, \text{ when } x = 0.5 \text{ and } -0.5 \leq y \leq 0.5$$

$$T(x,y) = 500, \text{ when } y = 0.5 \text{ and } -0.5 \leq x \leq 0.5$$

$$T(x,y) = 800, \text{ when } x^2 + y^2 = 0.2^2$$

در مسئله معکوس هر 4 شرایط مرزی را به‌عنوان مجهولات مسئله در نظر می‌گیریم و آن‌ها را با به‌کارگیری روش *FFGI* به دست می‌آوریم. همچنین در این مسئله پارامترهای حل را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} p_1 = p_2 = \dots = p_n &= 1 \\ q &= m \\ \delta &= 0.5 \\ \beta &= 1 \\ \alpha &= 0.03 \end{aligned} \quad (14)$$

مقادیر اولیه مجهولات را 900 کلون در نظر می‌گیریم.
نتایج حل در جدول 1 آمده است.

جدول 1: نتایج حل برای مثال اول با الگوریتم *SA* و *EFGI*

پارامتر	<i>SA</i> الگوریتم	<i>EFGI</i> الگوریتم
---------	--------------------	----------------------

¹ Filled Function Generalized Inversion

² Simulated Annealing



1000.1	1000.2	A
600.0	599.9	B
500.0	500.0	C
799.8	799.8	D
0.000149	0.0004	خطا
374	16440	زمان

مشاهده می‌شود که مقادیر به‌دست‌آمده از دو روش بسیار به جواب مسئله نزدیک هستند با این تفاوت که زمان حل روش SA بسیار بیشتر است.
- مسئله 2:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = h \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (15)$$

$$T(x, y) = 1500, \text{ when } x = -1.6 \text{ and } -0.2 \leq y \leq 0.2$$

$$T(x, y) = 700, \text{ when } y = -0.2 \text{ and } -1.6 \leq x \leq 1.2$$

$$T(x, y) = 1000, \text{ when } y = 0.2 \text{ and } -1.6 \leq x \leq 1.2$$

$$T(x, y) = 500, \text{ when } x = 1.2 \text{ and } -0.2 \leq y \leq 0.2$$

$$T(x, y, 0) = 350$$

$$\rho = 7600 \text{ kg/m}^3, c_p = 390 \text{ J/kgK}, h = 340 \text{ W/mK}$$

در این مسئله مجهولات a ، b و c را به ترتیب ضریب h ، دمای شرط مرزی اول و دمای شرط مرزی سوم در نظر می‌گیریم. در این مسئله نیز مقادیر پارامترهای حل مانند مسئله قبلی فرض می‌شود با این تفاوت که در این مسئله ضریب α برابر 0.003 در نظر گرفته می‌شود.
جواب‌های به‌دست‌آمده در جدول 2 گزارش شده است:

جدول 2: نتایج حل برای مثال اول با الگوریتم SA و EFGI

پارامتر	SA الگوریتم	EFGI الگوریتم
A	340.8	341.0
B	1497.2	1498.4
C	1003.5	1003.1
خطا	0.00248	0.00198
زمان	10826	2232

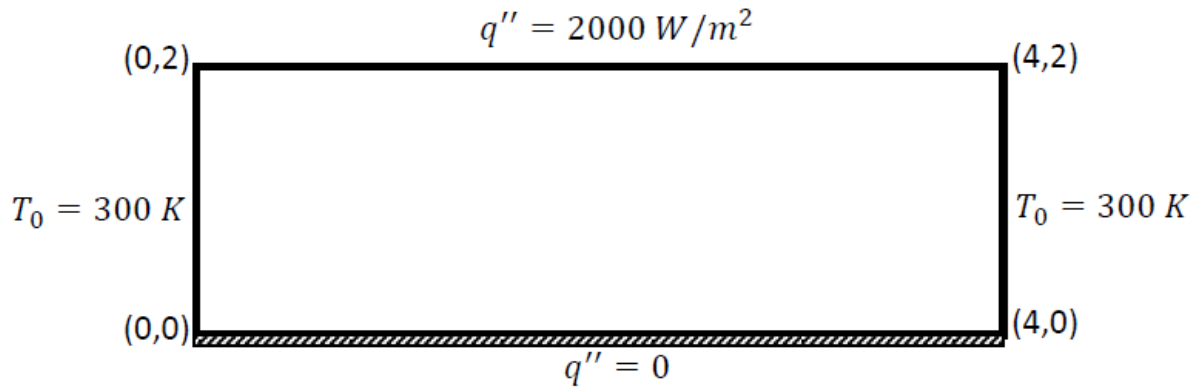
در این مثال نیز مشاهده می‌شود که دقت حل هر دو روش تقریباً یکسان است ولی زمان حل روش SA بسیار بیشتر است که این موضوع بیانگر بهینه بودن روش FFGI است.



5- حل یک IHCP به دو روش ژنتیک و PSO¹

در این بخش از مقاله یک مسئله انتقال حرارت معکوس را تعریف می‌کنیم و آن را با استفاده از دو روش ژنتیک و PSO حل می‌کنیم.

شرایط مرزی و هندسه مسئله در شکل 1 مشخص شده است



شکل 1: شرایط مرزی و هندسه مسئله سوم (ابعاد داده شده در شکل بر اساس سانتیمتر هستند).

در این مسئله دمای 10 نقطه مشخص از جسم به صورت زیر به ما داده شده است:

جدول 3: اطلاعات نقاط اندازه‌گیری شده دمایی

شماره نقطه	X-مختصات (cm)	Y-مختصات (cm)	دما (K)
1	2	0	307.2403564
2	2	2	316.5416870
3	2.5	0	306.7135620
4	2.5	2	315.8090515
5	3	0	305.1870117
6	3	2	313.5054016
7	3.5	0	302.8994225
8	3.5	2	309.1667786
9	4	0	300.0367126
10	4	2	300.2997437

ضریب هدایت ماده مصرف شده به صورت غیرخطی و به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$K = C_0 + C_1 \left(\frac{T}{T_0} \right) + C_2 \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 \quad (16)$$

هدف از حل این مسئله محاسبه 3 ثابت موجود در رابطه بالا است.

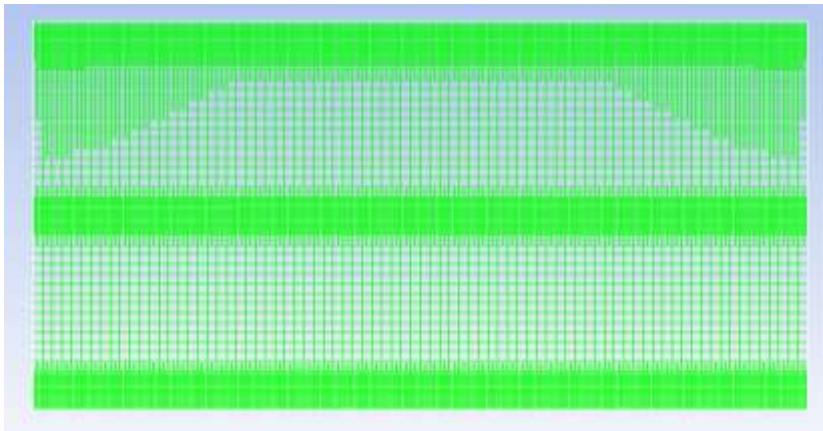
¹ Particle Swarm Optimization



6- روش حل

برای حل این مسئله از دو نرم افزار متلب و فلوئنت به صورت همزمان استفاده می کنیم. بدین صورت که ابتدا با در نظر گرفتن یک حدس اولیه برای هر سه ثابت موردنظر مسئله را توسط نرم افزار فلوئنت حل شده و این نرم افزار مقدار دمای محاسبه شده برای 10 نقطه موردنظر را به نرم افزار متلب گزارش می دهد. سپس متلب با در نظر گرفتن تابع هدف به صورت مربعات مانده ها و با استفاده از کد بهینه سازی که در آن نوشته شده است، مقدار جدیدی برای ثوابت مجهول پیشنهاد می کند و در مرحله بعد نرم افزار فلوئنت با این ثابت های جدید اجرا شده و همین روند تا جایی ادامه پیدا می کند تا شرط همگرایی موردنظر ارضا شود [5].

مش بندی که در نرم افزار *Gambit* برای این مسئله انجام شده است به صورت شکل 2 است:



شکل 2: مش بندی مسئله در نرم افزار *Gambit*

پس از حل مسئله به روش ژنتیک مقدار دماهای به دست آمده در آن 10 نقطه (θ) در مقایسه با دماهای داده شده (C) به صورت جدول 4 است.

جدول 4: مقایسه دماهای ژنتیک و دمای داده شده

$C(K)$	$\theta(K)$
302.8391	302.8765
300.0367	300.0367
300.2997	300.2634
309.1668	309.2205
313.5054	313.5823
316.5417	316.6279
315.8091	315.9013
307.2404	307.2689
306.7136	306.7512
305.187	305.2263

که ثوابت به دست آمده از این روش به صورت زیر گزارش می شود:

$$K = 0.9453 + 0.4517 \left(\frac{T}{T_0} \right) + 0.5263 \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 \quad (17)$$



حال همین مسئله را به روش *PSO* حل می‌کنیم. پس از حل دماهای 10 نقطه موردنظر به صورت جدول 5 است.

جدول 5: مقایسه دماهای *PSO* و دمای داده شده

$C(K)$	$\theta(K)$
302.8391	302.8587
300.0367	300.0365
300.2997	300.2618
309.1668	309.1668
313.5054	313.5066
316.5417	316.538
315.8091	315.8147
307.2404	307.2257
306.7136	306.7109
305.187	305.1947

و ثوابت موردنظر نیز برابر است با:

$$K = 0.8748 + 0.5740 \left(\frac{T}{T_0} \right) + 0.4742 \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 \quad (18)$$

7- نتیجه‌گیری

در این مقاله چهار روش در حل مسائل انتقال حرارت معکوس مورد بحث و بررسی قرار گرفت. در بخش اول روش *FFGI* که تلفیقی از چند روش دیگر است و روش و *FEM* پیشنهاد شد و برای حل چند مسئله مورد استفاده قرار گرفتند. نتایج نشان می‌دهد که این روش انعطاف‌پذیری خوبی برای مسائل مختلف دارد و با انتخاب مناسب ثوابت درگیر در این روش می‌توان با دقت خوبی به جواب مسئله در زمان کمتری نسبت به روش‌های دیگر رسید. در بخش دوم مقاله دو روش عددی مدرن بهینه‌سازی ژنتیک و *PSO* برای حل مسائل معکوس معرفی شد. سپس با تعریف یک مسئله انتقال حرارت معکوس با استفاده از دو نرم‌افزار متلب و فلونت و با به‌کارگیری دو روش ژنتیک و *PSO* این مسئله حل شد. نتایج نشان‌دهنده دقت قابل قبول این روش‌ها است. ولی این دو روش در مقایسه با روش پیشنهادی در بخش اول اغلب زمان حل بیشتری را به خود اختصاص می‌دهند.

تشکر و قدردانی

از کلیه کارکنان دانشکده فنی و حرفه ای سما سپهند که در پیشبرد این مقاله به ما کمک فراوان کردند، تشکر نموده و آرزوی موفقیت در کار و زندگی آنان را از خداوند منان خواستاریم. از آقای دکتر مجید قاسمی نیز به دلیل کمک‌های شایان‌شان در انجام این مقاله صمیمانه تشکر می‌کنیم.



مراجع

- [1] *M. Necati Ozisik, "Heat Conduction" Second ed. Wiley, New York , 1993.*
- [2] *H. Li, J. Lei and Q. Liu, "An inversion approach for the inverse heat conduction problems", International journal of heat and mass transfer, 2012.*
- [3] *O.M. Alifanov, Inverse Heat Transfer Problems, Springer-Verlag, New York, 1994. pp. 150–191.*
- [4] *J.V. Beck, B. Blackwell, C.R. Clair, Inverse Heat Conduction: Ill-posed Problems, Wiley, New York, 1985. pp. 119–134.*
- [5] *M.N. Ozisik, H.R.B. Orlande, Inverse Heat Transfer, Taylor & Francis, New York, 2000. pp. 3–112.*