

## به نام خدا

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

تاریخ: ۹۱/۹/۱۲

مدت: ۲ ساعت

امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۱

رشته مهندسی عمران

(۱) (i) ریشه‌های  $n$ -ام عدد  $2^n$  را به دست آورید. نشان دهید مجموع این ریشه‌ها برابر صفر است.

(ii) اگر

$$A = 1 + x \cos(\theta) + x^2 \cos(2\theta) + \dots + x^n \cos(n\theta), \quad B = x \sin(\theta) + x^2 \sin(2\theta) + \dots + x^n \sin(n\theta)$$

با استفاده از خواص اعداد مختلط، مقادیر  $A$  و  $B$  را به دست آورید.

(۲) با استفاده از تعریف حد نشان دهید اگر  $a + b > 0$ ،  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x + b}{(x - a)^2} = \infty$ .

(۳) فرض کنید  $a_1 = 3$  و برای هر  $n$ ،  $a_{n+1} = \frac{2(1+a_n)}{3+a_n}$ . نشان دهید دنباله  $\{a_n\}$  همگراست و حد آن را بیابید.

(۴) فرض کنید تابع حقیقی  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته و  $f'$  بر  $(a, b)$  موجود باشد و  $a > 0$ . اگر  $a^2 f(a) = b^2 f(b)$ ، نشان دهید عددی مانند  $c$  بین  $a$  و  $b$  وجود دارد که  $2f(c) + cf'(c) = 0$ .

(۵) (i) کوتاهترین فاصله منحنی  $2x - 2y = y^2$  از نقطه  $(2, 1)$  را به دست آورید.

(ii) چندجمله‌ای تیلور درجه ۳ تابع  $f(x) = \arcsin(x)$  حول  $0$  را بنویسید. به کمک این چندجمله‌ای

تقریبی برای  $\pi/6$  به دست آورید. خطای این تقریب را تخمین بزنید.

(۶) منحنی قطبی  $r^2 = 2a^2 \cos(2\theta)$  را رسم کنید.

(۷) تابع  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

(i) نمودار  $f$  را رسم کنید و نقاط پیوستگی و ناپیوستگی  $f$  را (با ذکر دلیل) تعیین کنید.

(ii) ثابت کنید اگر  $x$  گویا باشد، عدد طبیعی مانند  $n$  وجود دارد که  $f^n(x) = 0$  و اگر  $x$  گنگ باشد به ازای هر

عدد طبیعی  $n$ ،  $f^n(x) \neq 0$ . (منظور از  $f^n$  تابع حاصل از  $n$  بار ترکیب  $f$  با خودش است).

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱۶	۸	۱۰	۵	۱۴	۵	۱۲

توزیع نمرات

موفق باشید.