دانشکدهٔ ریاضی

به‌نام خدا

امتحان میان‌ترم
ریاضی‌عمومی ۱

تاریخ: ۹۲/۹/۳
مدت: ۱۲۰ دقیقه

---

۱. فرض کنید $x_1 > 1$ و $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$. نشان دهید دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگراست.

۲. (i) نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1 + (2\sin x)^{2n}}$ را تعیین کنید.

(ii) حاصل $\lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$ را بیابید.

۳. اگر f''' بر بازه باز I شامل نقاط a, b موجود باشد و $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$، نشان دهید cی بین a و b موجود است که $f'''(c) = 0$.

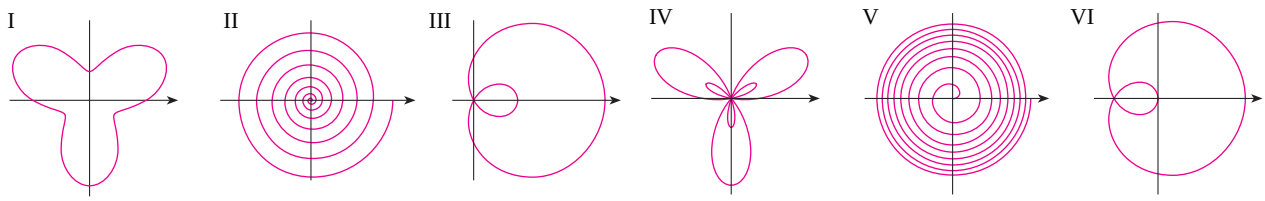
۴. فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر است که نمودار آن در نقطهٔ (a, a) بر خط $y = x$ مماس است. نشان دهید به‌ازای هر عدد طبیعی n، نمودار $f^n(x)$ نیز در (a, a) بر $y = x$ مماس است. (منظور از f^n تابع حاصل از n بار ترکیب f با خودش است.)

۵. (i) فرض کنید n عددی صحیح است. چندجمله‌ای تیلور درجه ۳ تابع $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{n}}$ حول ۰ را بنویسید.

(ii) نشان دهید خطای تقریب $\sqrt[2]{1/1} \approx 1 + \frac{1}{30} - \frac{1}{900}$ کمتر از 10^{-4} است.

۶. (i) ثابت کنید $\tanh^{-1}(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

(ii) مشخص کنید کدام یک از منحنی‌های قطبی زیر مربوط به توابع $r = \sqrt{\theta}$، $r = \theta^2$، $r = 1 + 2\cos(\theta)$، و $r = 2 + \sin(3\theta)$ است. (نیازی به استدلال نیست.)



۷. (i) ریشه‌های ششم عدد مختلط $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ را تعیین کنید.

(ii) با استفاده از خواص اعداد مختلط، اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\binom{n}{1}\sin(\theta) + \binom{n}{2}\sin(2\theta) + \cdots + \binom{n}{n}\sin(n\theta) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

توزیع نمرات

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۸	۱۴	۸	۸	۱۲	۱۲	۱۸

موفق باشید.