Problem Set 1

تمرین های درس ریاضی عمومی
اعداد مختلط

۱) مختصات قطبی هر یک از اعداد مختلطزیر را بنویسید

$a)(۳,۰)$ $b)(-۳,۰)$ $c)(۰,-۸)$ $d)(\pi,-\pi)$
$e)(-\sqrt{۳},۱)$ $f)(۱,\sqrt{۲})$ $g)(-۱,-۱)$ $h)(x,y).$

۲) هر یک از اعداد زیر را به صورت $x+iy$ بنویسید.

$a)(۱+۲i)^{۲}$ $b)\frac{۵}{-۳+۴i}$ $c)(\frac{۲+i}{۳-۲i})^{۲}$ $d)(۱+i)^{n}+(۱-i)^{n}$
$e)(۲-i)^{۴}$ $f)(\frac{-۱+i\sqrt{۳}}{۲})^{۳}$ $g)\frac{(۲-i)^{۲}(۳+۴i)}{۲۵}$ $h)\frac{(۲\overline{z}+۵)(\sqrt{۲}-i)}{۲z+۵}.$

۳) مقادیر زیر را بیابید

$a)\sqrt{i}$ $b)\sqrt{-i}$ $c)\sqrt{۱+i}$ $d)\frac{۱-i\sqrt{۳}}{۲}.$

۴) تمام چهار مقدار $\sqrt[۴]{-۱}$ را بیابید.

۵) مقادیر اعداد $\sqrt[۴]{-i}$ و $\sqrt[۴]{-i}$ را بیابید.

۶) قدرمطلق اعداد $(۱+i)(۲+۴i)(۳+i)-۲i$ و $\frac{(۳+۴i)(-۱+۲i)}{(-۱-i)(۳-i)}$ را بیابید.

۷) در هریک ازموارد زیر مجموعه نقاطی از صفحه را مشخص کنید که در رابطه داده شده صدق می کنند.

$a)\mid z\mid>۱$ $b)argz=\frac{۱۵}{۶}\pi$ $c)\mid z-۱\mid<\mid z+۱\mid$
$d)\mid z\mid^{۲}-۳\mid z\mid+۲<۰$ $e)\mid z-i\mid=۱$ $f)\mid z-۱\mid<۲\mid z+۱\mid.$
$g)\mid z-i\mid+\mid z+i\mid<۴$

۸) اگر $a=\frac{۱}{z^{۲}+۱}$ باشد آنگاه $\mathrm{Re}(a)$ و $\mathrm{Im}(a)$ را بیابید.

۹) مقدار $\left(\frac{۲+i}{۶i-(۱-۲i)^{۲}}\right)^{۳}$ را محاسبه کنید.

۱۰) مکان هندسی نقاطی که $|z-z_{۲}|+|z-z_{۱}|\leq a$ که در آن $z_{۱}$ و $z_{۲}$ اعداد مختلط و ثابت، و a اسکالری نامنفی است را بیابید.

۱۱) ثابت کنید برای $(z_۱, z_۲ \in \mathbb{C})$

$$\sin z_۲ - \sin z_۱ = ۲\cos(\frac{z_۱+z_۲}{۲})\sin(\frac{z_۱-z_۲}{۲}).$$

۱۲) ثابت کنید اگر $z_۱, z_۲$ اعداد مختلط باشند آنگاه

$$||z_۱| - |z_۲|| \leq |z_۱ + z_۲| \leq |z_۱| + |z_۲|$$

۱۳) معادلات زیر را حل کنید.

$$a)z^۳ = -i \qquad b)z^۲ = -۴ \qquad c)z^۲ = \frac{۱-i}{۱+i} \qquad d)z^n = nz.$$

۱۴) معادلات زیر را حل کنید.

$$a)z^۵ = ۳۲ \qquad b)z^۳ + ۳z^۲ + ۳z - ۱ = ۰ \qquad c)z^۳ = -i$$
$$d)z^۲ = ۱ + i \qquad e)z^۲ + (\alpha + i\beta)z + \gamma + i\delta = ۰.$$

۱۵) معادلات زیر را حل کنید.

- $z^۳ - ۳z^۲ + ٦z - ۸ = ۰$.
- $z^۳ - ۲z - ۴ = ۰$.
- $z^۳ - ۳\sqrt[۳]{۳z} - ۴ = ۰$.
- $z^۳ + ۳iz + \sqrt{۲}(۱ + i) = ۰$.

۱٦) اگر z و w دو عدد مختلط باشند و $|\frac{z-w}{۱-\bar{z}w}| = ۱$، ثابت کنید $|z| = ۱$ یا $|w| = ۱$.

۱۷) اعداد a و b را طوری بیابید که $z = ۱ + i$ ریشه‌ای از معادلهٔ $z^۵ + az^۳ + b = ۰$ باشد.

۱۸) معادلهٔ $z^۳ = (\frac{۱-\sqrt{۳}i}{۱+\sqrt{۳}i})^{۱۸}$ را در مجموعهٔ اعداد مختلط حل کنید.

۱۹) ثابت کنید $\cos ۵\theta = \cos^۵\theta - ۱۰\cos^۳\theta\sin^۲\theta + ۵\cos\theta\sin^۴\theta$.

۲۰) ثابت کنید

(الف) $\cos\theta + \cos ۲\theta + ... + \cos n\theta = \frac{\cos\frac{n+۱}{۲}\theta\ \sin\frac{n\theta}{۲}}{\sin\frac{\theta}{۲}}$.

(ب) $\sin\theta + \sin ۲\theta + ... + \sin n\theta = \frac{\sin\frac{n+۱}{۲}\theta\ \sin\frac{n\theta}{۲}}{\sin\frac{\theta}{۲}}$.

۲۱) اگر $z + \frac{۱}{z} = ۲\cos\theta$، ثابت کنید $z^n + \frac{۱}{z^n} = ۲\cos n\theta$.

۲۲) ثابت کنید:

$$\left(\frac{۱+i\tan\alpha}{۱-i\tan\alpha}\right)^n = \frac{۱+i\tan\alpha}{۱-i\tan\alpha}$$

۲۳) به کمک اعداد مختلطثابت کنید:$(\theta, \theta_۱, \theta_۲ \in \mathbb{R})$

a)$\sin ۳\theta = ۳\cos^۲\theta\sin\theta - \sin^۳\theta$

b)$\sin ۴\theta = ۴\cos^۳\theta\sin\theta - ۴\cos\theta\sin^۳\theta$

c)$\cos(\theta_۱ + \theta_۲) = \cos(\theta_۱)\cos(\theta_۲) - \sin(\theta_۱)\sin(\theta_۲)$

۲۴) ثابت کنید اگر $z_n, \ldots, z_۲, z_۱$ ریشه‌های nام عدد ۱ − باشند آنگاه:

a)$z_۱ - z_۲ + \ldots + (-۱)^{n+۱} z_n = ۰$

b) $z_۱ z_۲ \ldots z_n = ۱$

۲۵) ثابت کنید اگر $\sin\theta \neq ۰$

a) $\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = ۲^{n-۱}\prod_{k=۱}^{n-۱}\{\cos\theta - \cos(\frac{k\pi}{n})\}$

b) $\frac{\sin(۲n+۱)\theta}{\sin\theta} = (۲n+۱)\prod_{k=۱}^{n}\{۱ - \frac{\sin^۲\theta}{\sin^۲(\frac{k\pi}{۲n+۱})}\}$

c) $\cos ۲n\theta = (-۱)^n\prod_{k=۱}^{n}\{۱ - \frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲(\frac{(۲k-۱)\pi}{۴n})}\}$

موفق و سربلند باشید.

گروه ریاضی دانشگاه صنعتی خواجه نصیر