تمرین های درس ریاضی عمومی
پیوستگی، قضیه مقدار میانی و کاربرد های آن

۱) نقاط‌پیو ستگی و نا پیوستگی تابع های زیر را بیابید.

- $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1/q & x = p/q \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases} \qquad x \in [0,1]$.
- $f(x) = \begin{cases} 1 & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -1/q & x = p/q \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases} \qquad x \in [0,1]$.
- $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & x = p/q \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases} \qquad x \in [0,1]$.

۲) برای هریک از چندجمله‌ای های زیر عدد صحیحی مانند n بیابید که برای یک عدد حقیقی x بین n و $n+1$، $f(x) = 0$.

- $f(x) = x^3 - x + 3$؛
- $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$؛
- $f(x) = x^5 + x + 1$.

۳) به کمک قضیه مقدار میانی ثابت کنید معادلات زیر دارای لااقل یک جواب است.

- $x^{179} + \frac{163}{1+x^2+\sin^2 x} = 110$؛
- $\sin x = x - 1$.

۴) فرض کنید تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد. فرض کنید f همواره مقادیر گویا می گیرد. درباره f چه می توان گفت؟

۵) فرض کنید f تابعی پیوسته روی $[0,1]$ باشد و برای هر $x \in [0,1]$، $f(x) \in [0,1]$. نشان دهید یک x در $[0,1]$ وجود دارد به طوری که $f(x) = x$.

۶) فرض کنید $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که در هیچ نقطه‌ای از $[a,b]$ صفر نمی شود. نشان دهید برای هر $x \in [a,b]$ فقط $f(x) > 0$ و یا فقط $f(x) < 0$.

۷) فرض کنید $f_۱, f_۲$ دو تابع تابع پیوسته روی بازه $[a, b]$ باشند. اگر $f_۱(a) < f_۲(a)$ و $f_۱(b) > f_۲(b)$، نشان دهید یک c در $[a, b]$ وجود دارد به طوری که $f_۱(c) = f_۲(c)$.

۸) تابع $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{۱}{x} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$ از $[-۱, ۱]$ به $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.
الف: آیا این تابع پیوسته است؟
ب: فرض کنید $a, b \in [-۱, ۱]$ و c عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد. نشان دهید یک c' در $[-۱, ۱]$ وجود دارد به طوری که $f(c') = c$.
از این تمرین چه نتیجه ای می گیرید؟

۹) فرض کنید f تابعی اکیداً صعودی باشد. نشان دهید تابع وارون f نیز اکیداً صعودی است. اگر به جای اکیداً صعودی اکیداً نزولی قرادهیم آیا باز هم حکم برقرار است؟

۱۰) چندجمله‌ای $p(x) = a_۰ + a_۱x + \ldots + a_nx^n$ را که همه a_i ها در $\mathbb{R}$ هستند را در نظر بگیرید.

- (الف): اگر n عددی فرد باشد آنگاه معادله $p(x) = ۰$ دست کم یک ریشه دارد.
- (ب): اگر $a_۰a_n < ۰$ آنگاه معادله $p(x) = ۰$ دست کم یک ریشه‌مثبت دارد.
- (پ): اگر $a_۰a_n < ۰$ و n عددی زوج باشد آنگاه معادله $p(x) = ۰$ دست کم یک ریشه منفی دارد.
- (ت): اگر $a_۰a_n > ۰$ و n عددی فرد باشد آنگاه معادله $p(x) = ۰$ دست کم یک ریشه منفی دارد.

۱۱) نشان دهید اگر تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد آنگاه $f \circ f$ نمی تواند تابعی اکیداً نزولی باشد.

۱۲) نشان دهید اگر تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و نزولی باشد آنگاه نقطه‌ای مانند c وجود دارد به طوری که $f(c) = c$.