Problem Set 3

تمرین های درس ریاضی عمومی

مشتق پذیری، قضیه مقدار میانگین، و کاربرد های آن

۱) تمام توابع f را بیابید که در تساوی های زیر صدق می کنند.

- $f'(x) = \sin x$
- $f''(x) = x^3$
- $f'''(x) = x + x^2$

۲) درستی قضیه مقدار میانگین را در مورد هریک از تابع های زیر روی بازه داده شده بررسی کنید.

- (الف) $f(x) = x^2 - 3x + 1$ روی $[0, 1]$.
- (ب) $f(x) = \frac{1-x}{2x-5}$ روی $[-2, 1]$.
- (پ) $f(x) = \sin x + \cos x$ روی $[0, \pi]$.

۳) نشان دهید دقیقاً به ازای دومقدار حقیقی از x رابطه $x^2 = x \sin x + \cos x$ برقرار است.

۴) با استفاده از قضیه مقدار میانگین نامساوی های زیر را ثابت کنید

- (الف) $| \sin x - \sin y | \leq | x - y |$.
- (ب) اگر $0 < y \leq x$ و $n = 1, 2, \ldots$ آنگاه .

$$ny^{n-1}(x - y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x - y).$$

۵) نشان دهید در میان تمام مربع مستطیل هایی که محیط ثابت p دارند، مربع بیشترین محیطرا دارد.

۶) یک مخزن آب به شکل مخروط مستدیر قائم است که راس آن به سمت پائین است. ارتفاع آن ۱۰ متر و شعاع قاعده‌اش ۱۵ متر است. آب به میزان ثابت ۱ متر مکعب در ثانیه از ته مخزن خارج می شود و به میزان ثابت c متر مکعب در ثانیه وارد آن می شود. c را طوری تعیین کنید که سطح آب در لحظا یکه عمق آن ۲ متر است به میزان ۴ متر در ثانیه در حال بالا آمدن باشد.

۷) می خواهیم پنجره‌ای به شکل یک مستطیل و یک نیم دایره در بالای آن بسازیم به طوری که قطر نیمدایره مساوی قاعده مستطیل باشد و بخش مستطیلی شکل از شیشه سفید و بخش نیمدایره از شیشه رنگی باشد، به گونه‌ای که در هر فوت مربع فقط به اندازه نصف شیشه سفید نور عبوردهد. محیط کل پنجره برابر مقدار ثابت P است. ابعاد پنجره را برحسب P طوری تعیین کنید که حداکثر نور را از خود عبور دهد.

۸) فرض کنید $x > 0$. نشان دهید نامساوی $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2$ همواره برقرار است.

۹) فرض کنید تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = 5x^2 + Ax^{-5} \ , \ x > 0$، که در آن A ثابت مثبتی است، داده شده است. کوچکترین A یی را بیابید که به ازای هر $x > 0$، $f(x) \geq 24$.

۱۰) اعداد حقیقی a و b داده شده اند. با استفاده از مشتق ثابت کنید تابع $f(x) = x^2 + ax + b$ به ازای $x = a/2$ مینیمم دارد. نتیجه بگیرید که شرط لازم و کافی برای این که معادله $f(x) = 0$ ریشه حقیقی داشته باشد این است که $a^2 \geq 4b$.

۱۱) اعداد حقیقی p, q داده شده اند. معادله $x^3 + px + q = 0$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید شرط لازم وکافی برای این که این معادله فقط یک ریشه داشته باشد این است که $4p^3 + 27q^2 > 0$.

۱۲) فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد به طوری که $f'(x) = (x^2 \sin x)/(1 + x^4)$. ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی مانند a, b نابرابری زیر درست است.

$$| f(a) - f(b) | \leq | a - b | /2$$

۱۳) فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر است و $f(0) = f(1) = 0$ و $f'(0) > 0$ و $f'(1) > 0$. نشان دهید معادله $f'(x) = 0$ در بازه $]0, 1[$ لااقل دو ریشه دارد.

۱۴) به کمک $\lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos\theta}{\theta} = 0$ و قضیه مقدار میانگین ثابت کنید

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta - \theta}{\theta^2} = 0$$

۱۵) نشان دهید تابع زیر همه جا مشتق پذیر است و دستور مشتق آن را بیابید.

$$S(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

۱۶) تابع چندجمله‌ای $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ را با ضرایب حقیقی در نظربگیرید. نشان دهید اگر به ازای هر عدد حقیقی مانند x،

$$a_0 + 2a_1 x + 3a_2 x^2 + \cdots + (n + 1) a_n x^n > 0$$

آنگاه معادله $p(x) = 0$ ریشه حقیقی ندارد. (راهنمایی: ثابت کنید $x = 0$ تنها ریشه معادله $xp(x) = 0$ است).

۱۷) نشان دهید اگر $\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ آنگاه

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0.$$

دارای یک ریشه در $[0, 1]$ است.