# تمرین های درس ریاضی عمومی
# رسم منحنی در دستگاه مختصات قطبی

## دستگاه مختصات قطبی [1]

ابتدا لازم است مطالب مختصری درباره دستگاه مختصات قطبی بیان کرد.
نخست یک مبداء $O$ و یک نیم خط جهت دار ثابت را در صفحه $\mathbb{R}^2$ در نظر می گیریم. سپس هر نقطه $P$ را می توان با انتساب یک زوج $(r,\theta)$، که $r$ فاصله جهت دار از $O$ تا $P$ و $\theta$ زاویه جهت دار بین محور ثابت و پاره خط $\overrightarrow{OP}$ است، مشخص نمود. از مثلثات به یاد داریم $\theta$ مثبت است اگر در جهت خلاف عقربه های ساعت باشد در غیر این صورت $\theta$ منفی است. باید توجه داشت که زاویه متناظر به یک نقطه یکتا نیست.
مثلاً نقطه به فاصله ۲ واحد از مبداء و روی پرتو $\theta = ۳۰^\circ$ دارای مختصات قطبی $(r,\theta) = (۲,۳۰^\circ)$ است. این نقطه همچنین دارای مختصات $(r,\theta) = (۲,-۳۳۰^\circ)$ یا $(r,\theta) = (۲,۳۹۰^\circ)$ نیز می باشد.

### مقادیر منفی $r$

در مواردی لازم است $r$ مقادیر منفی نیز اختیار کند. به همین دلیل است که در بالا از فاصله جهت دار استفاده کردیم. در واقع چون نیم خط $\theta = \theta_۰$ که $۰ \le \theta_۰ \le \pi/۲$ و نیم خط $\theta + \pi$ هردو با هم یک خط مستقیم را می سازند که از نقطه مبداء $O$ می گذرد می توان نقطه $(r,\pi+\theta)$ را روی پرتوی که از $O$ رسم می شود و زاویه $\theta + \pi$ با نیم خط ثابت می سازد به فاصله دو واحد از مبداء انتخاب کرد و یا روی خطی که زاویه $\theta_۰$ با نیم خط ثابت می سازد ۲ واحد از مبداء به عقب رفت. در این صورت می گوئیم نقطه دارای مختصات قطبی $r = -۲$ و $\theta_۰$ می باشد.
هر گاه زاویه بین نیم خط ها $\pi$ باشد، آنها یک خط راست می سازند. در این صورت می گوئیم هر نیم خط مقابل نیم خط دیگر است. نقاطی که روی نیم خط $\theta = \theta_۰$ قراردارند دارای مختصات قطبی $(r,\theta_۰)$ و نقاطی که روی نیم خط مقابل قرار دارند دارای مختصات $(r,\pi+\theta_۰)$ با $r > ۰$ و یا $(r,\theta_۰)$ با $r < ۰$ می باشند.
مثال: نقاطی که دارای مختصات $(r,\theta)$ با $\theta = \pi/۶$ و $r \in \mathbb{R}$ هستند در شکل زیر نمایش داده شده اند.

### معادلات ویا نامعادلات در دستگاه مختصات قطبی

در دستگاه مختصات قطبی می توان نقاطی که در نامعادلات و یا معادلات صدق می کنند مشخص کرد.
به عنوان مثال
الف):همان طور که در شکل زیر مشاهده می شود دستگاه نامعادلات $۲\pi/۳ \le \theta \le ۳\pi/۲$ ناحیه ای از صفحه را مشخص می سازد که بین دو خط با زاویه های $۲\pi/۳$ و $۳\pi/۲$ با محور ثابت می سازند.

[1] متاسفانه به علت مشکلات نرم افزاری امکان درج نمودار برخی منحنی ها در این متن میسر نشد اما سعی می شود در اسرع وقت این مشکل برطرف و متن جدیدی همراه با برخی تصاویر آماده گردد.

ب): نقاطی که درنامعادله $1 < r < 2$ و $0 < \theta < \pi/2$ صدق می کنند را در صفحه قطبی در شکل زیر نمایش داده شده اند.

**نمایش نقاطی که در $F(r,\theta) = 0$ صدق می کنند**

نمودار معادله $F(r,\theta) = 0$ مرکب از نقاطی از صفحه است که صورتی از مختصات قطبی آنها در این معادله صدق کند. روش معمول برای رسم نمودار این نوع معادلات، نقطه یابی است، اما با بررسی متقارن بودن نمودار تابع نسبت به محوز ها می توان سرعت رسم نمودار را افزایش داد.
سه نوع تقارن را می توان به آسانی در نمودار معادله $F(r,\theta) = 0$ تشخیص داد:

- تقارن نسبت به مبداء: یعنی با تبدیل $r \to -r$ و $\theta \to -\theta$ معادله تغییر نکند.
- تقارن نسبت به محور $x$ ها، یعنی با تبدیل $\theta \to -\theta$ معادله تغییر نکند.
- تقارن نسبت به محور $y$ ها، یعنی با تبدیل $\theta$ به $\pi - \theta$ معادله تغییر نکند.

**مثال ۱:** نمودار خم $r = a(1 - \cos\theta)$، با $a > 0$ را رسم کنید (این خم به دلوار یا cardioid موسوم است).
چون $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ پس نمودار این تابع نسبت به محور $x$ ها متقارن است.
وقتی $\theta$ از $0$ تا $\pi$ تغییر می کند، $\cos\theta$ از $1$ به $-1$ تنزل می کند. بنابراین $r$ از $0$ تا $2a$ افزایش می یابد.
**مثال ۲:** نمودار خم $r = \sin 2\theta$ را رسم کنید.

**روشی برای رسم نمودار یک معادله قطبی مانند $r = f(\theta)$**

**روش اول :**
یک جدول از مقادیر $(r,\theta)$ را تشکیل می دهیم. $\theta$ را به ترتیب صعودی در جدول می نویسیم و مقادیر $r$ متناظر به $\theta$ را مقابل آن می نویسیم. سپس از به هم وصل کردن این نقاط نمودار خم را به طور تقریبی می توان رسم نمود. روشن است که هر چه تعداد این نقاط بیستر باشد، شکل دقیق تر خواهد بود.
**روش دوم :**

- نخست نمودار $r = f(\theta)$ را در صفحه دکارتی $r,\theta$ رسم می کنیم ( یعنی مقادیر $\theta$ را روی محور افقی و مقادیر متناظر به آن برای $r$ را روی محور عمودی تعیین می کنیم.
- سپس نمودار دکارتی $r = f(\theta)$ را به عنوان جدول مقادیری که در روش اول به آن اشاره کردیم به کار می بریم و با استفاده از آن نمودار را در دستگاه مختصات قطبی رسم می کنیم.

این روش بهتر از روش اول است زیرا از روی نمودار دکارتی، حتی اگر با شتاب هم رسم شده باشد، با یک نگاه به سرعت می توان تشخیص داد که $r$ در کجا مثبت و در کجا منفی و یا ناموجود است.
**مثال ۳:** مطلوب است ترسیم نمودار $r = 1 + \cos\theta/2$.

نخست نمودار $r$ را به صورت تابعی از $\theta$ در صفحه دکارتی $r,\theta$ رسم می کنیم. چون $\cos$ دارای دوره تناوی $۲\pi$ است $\theta$ باید از ۰ تا $۴\pi$ تغییر کند تا نمودار کامل شود.

پیکان هایی که از محور $\theta$ تا خم رسم شده‌اند بردارهای شعاعی را برای ترسیم $r = ۱ + \cos\theta/۲$ در صفحه به دست می دهند.

**مثال ۴:** مطلوب است رسم نمودار $r^۲ = \sin ۲\theta$

در اینجا با ترسیم $r^۲$ به صورت تابعی از $\theta$ در صفحه $r^۲,\theta$ دکارتی آغاز می کنیم. سپس از این جا نمودار $r = \pm\sqrt{\sin ۲\theta}$ در صفحه $r,\theta$ می رسیم و بعد نمودار قطبی را رسم می کنیم.

**تمرین**

درباره خم های زیر بحث کنید و نمودار آنها را رسم کنید. در تمامی تمرین ها $a > ۰$.

۱) $r = a(۱ + \cos\theta)$.

۲) $r = a(۱ - sin\theta)$.

۳) $r = a(۱ + \sin\theta)$.

۴) $r = a\sin ۳\theta$.

۵) $r^۲ = ۲a^۲\cos ۲\theta$.

۶) $r = a(۲ + \sin\theta)$.

۷) $r = a(۱ + ۲\sin\theta)$.

۸) $r = \theta$.

۹) $r = a\sin\theta/۲$.

۱۰) حلزونی با طوق داخلی الف) $r = ۱/۲ + \cos\theta$ ب) $r = ۱/۲ + \sin\theta$.

۱۱) دلوار الف) $r = ۱ - \cos\theta$ ب) $r = -۱ + \sin\theta$.

۱۲) حلزونی فرورفته الف) $r = ۳/۲ + \cos\theta$ ب) $r = ۳/۲ - \sin\theta$.

۱۳) حلزونی محدب الف) $r = ۲ + \cos\theta$ ب) $r = -۲ + \sin\theta$.

۱۴) ناحیه ای را که با نامساوی $۰ \le r^۲ \le \cos\theta$ تعریف می شود رسم نمایید.

۱۵) ناحیه ای را که با نامعادله $۰ \le r \le ۲ - ۲\cos\theta$ تعریف می شود رسم کنید.

۱۶) نشان دهید نقطه $(۲, ۳\pi/۴)$ بر خم $r = ۲\sin ۳\theta$ واقع است.

موفق و سربلند باشید.

گروه ریاضی دانشگاه صنعتی خواجه نصیر