پاسخ نامه امتحان میان ترم ریاضی عمومی ۱

(۱) (i) روش اول:

$$(x-1)^2 \geq 0 \xRightarrow{x>0} \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0 \Rightarrow x+\frac{1}{x}-2 \geq 0$$

روش دوم: تابع $f(x)=x+\frac{1}{x}$ را روی $(0,\infty)$ در نظر بگیرید.

$$f'(x) = 1-\frac{1}{x^2}$$

لذا برای $x>1$، $f'>0$ ، برای $0<x<1$، $f'<0$ و $f'(1)=0$.
لذا $x=1$ مینیمم مطلق f بر $(0,\infty)$ است پس برای هر $x>0$،

$$f(x) \geq f(1) = 2$$

(ii) ابتدا توجه کنید که جملات دنباله مثبت هستند. داریم

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)$$

بنابر قسمت (i)، $\frac{x_n}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{x_n} \geq 2$ در نتیجه

$$x_{n+1} \geq \frac{\sqrt{a}}{2}\cdot 2 = \sqrt{a}$$

پس $\{x_n\}$ از پایین به $\sqrt{a}$ کراندار است. از طرفی

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right)$$

چون $x_n \geq \sqrt{a}$ داریم $\frac{a}{x_n^2} \leq 1$ در نتیجه

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1 \Rightarrow \{x_n\} \text{ نزولی}$$

پس $\{x_n\}$ دنباله‌ای نزولی و از پایین کراندار است. بنابراین همگراست. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} x_n = l$، در نتیجه

$$l = \frac{1}{2}\left(l+\frac{a}{l}\right) \Rightarrow l^2=a \xRightarrow{l>0} l=\sqrt{a}$$

---

(۲) فرض کنید $M>0$ داده شده باشد. فرض می‌کنیم $0<|x-1|<1$ لذا:

$$-1<x-1<1 \Rightarrow 1<x+1<3 \Rightarrow |x+1|>1$$

از طرفی با شرط $0<|x-1|<1$ و $|x-1|<\sqrt{\frac{1}{M}}$ داریم:

$$|x-1|<\sqrt{\frac{1}{M}} \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > M \Rightarrow \left|\frac{x+1}{(x-1)^2}\right| > \frac{1}{(x-1)^2} > M$$

لذا کافی است δ را برابر با $\min\{1, \sqrt{1/M}\}$ اختیار کنیم تا شرط زیر برقرار شود:

$$0<|x-1|<\delta \Rightarrow \frac{x+1}{(x-1)^2} > M$$

---

(۳) چون در ابتدای نمودار b و c صعودی اند و a منفی است پس a نمی‌تواند نمودار مشتق b یا c باشد پس a نمودار f است. از طرفی روی بازه‌ای که c نزولی است b منفی نیست، پس b نمی‌تواند مشتق c باشد.
پس b نمودار f' و c نمودار f'' است.

---

(۴) چون f بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق پذیر است، شرایط قضیه مقدار میانگین را داراست. لذا بنابر قضیه مقدار میانگین اعداد α و β که $a<\alpha<c<\beta<b$ وجود دارند که

$$f'(\alpha) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \quad , \quad f'(\beta) = \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

لذا چون $f(c)<f(a)$ و $f(c)<f(b)$ نتیجه می‌شود که $f'(\alpha)<0$ و $f'(\beta)>0$. حال f' نیز در شرایط قضیه مقدار میانگین بر بازهٔ $[\alpha,\beta]$ صادق است لذا lای وجود دارد که:

$$f''(l) = \frac{f'(\beta)-f'(\alpha)}{\beta-\alpha} > 0$$

---

(۵) چندجمله‌ای تیلور درجه ۲ h حول $x=2$ به صورت زیر است:

$$P(x) = h(2)+h'(2)(x-2)+h''(2)\frac{(x-2)^2}{2}$$

$$h'(x)=\sqrt{x^2+5} \Rightarrow h''(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

$$h'(2)=\sqrt{9}=3, \quad h''(2) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow h(1.95) \approx P(1.95) = 4+3(-0.05)+\frac{2}{3}\frac{(0.05)^2}{2}$$

برای $1.95<\eta<2$ ، خطای تقریب فوق برابر است با:

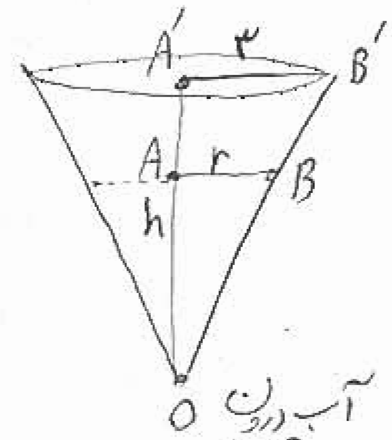
$$R(1.95) = \frac{h'''(\eta)}{3!}(1.95-2)^3$$

$$h'''(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}}}{(x^2+5)} = \frac{5}{(x^2+5)^{3/2}}$$

ماکسیمم h''' بر بازه $[1.95,2]$، برابر $h'''(1.95)$ است چون h''' بر این بازه نزولی است. لذا:

$$|R(1.95)| \leq \frac{(0.05)^3}{6}\cdot\frac{5}{((1.95)^2+5)^{3/2}}$$

(۶)



بنابر تشابه مثلث های $OA'B'$ و OAB داریم: ۰/۵ نمره

$$\frac{h}{r} = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow r = \frac{۳h}{۱۰}$$

حجم آب درون قیف به عنوان تابعی از ارتفاع

$$V(h) = \frac{1}{۳}\pi r^{۲} h = \frac{1}{۳}\pi \left(\frac{۳h}{۱۰}\right)^{۲} h = \frac{۳\pi}{۱۰۰} h^{۳}$$ ۰/۵ نمره

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{۳^{۲}\pi}{۱۰۰} h^{۲} \frac{dh}{dt}$$ ۰/۵ نمره

حال در لحظه ای که $h = ۵$ داریم $\frac{dV}{dt} = ۲$، لذا ۰/۵ نمره

$$۲ = \frac{۳^{۲}\pi}{۱۰۰} ۲۵ \frac{dh}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{۸}{۹\pi} \ cm/s}$$