پاسخ نامه امتحان میان ترم ریاضی عمومی (۲)

(۱) هر مورد ۰/۵ نمره.

$x^2+4y^2+9z^2=1$ (VII), $9x^2+4y^2+z^2=1$ (IV)

$x^2-y^2+z^2=1$ (II), $-x^2+y^2-z^2=1$ (III)

$y=2x^2+z^2$ (VI), $y^2=2x^2+z^2$ (I)

$x^2+2z^2=1$ (VIII), $y=x^2-z^2$ (V)

(۲) [(i) ۵ نمره - (ii)، (iii) هرکدام ۲/۵ نمره]

(i) درست.

$$u\cdot v=u\cdot w \Rightarrow u\cdot(v-w)=0 \Rightarrow u\perp(v-w)$$
$$u\times v=u\times w \Rightarrow u\times(v-w)=0 \Rightarrow u\parallel(v-w)$$

$u\neq 0$ و تنها برداری که همزمان موازی و عمود بر یک بردار ناصفر می‌تواند باشد بردار صفر است یعنی

$$v-w=0 \Rightarrow v=w.$$

(ii) نادرست. مثال نقض:

$$u=v=i,\ w=j$$
$$u\times(v\times w)=i\times(i\times j)=i\times k=-j$$
$$(u\times v)\times w=(i\times i)\times j=0\times j=0$$

(iii) درست.

$$u\cdot(v\times w)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$$

$$(u\times v)\cdot w=w\cdot(u\times v)=\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

از دترمینان اول می‌توان با دو جابجایی سطر به دترمینان دوم رسید، لذا این دو دترمینان برابر هستند.

(۳) (i) (۴ نمره)

$$(x,y)\neq(0,0) \Rightarrow 0\leq \frac{|y|}{|x|+|y|}\leq 1$$
$$\Rightarrow 0\leq \left|\frac{|y|\sin x}{|x|+|y|}\right| \leq |\sin x|$$

وقتی $(x,y)\to(0,0)$، $\sin x\to 0$ لذا بنابر قضیه ساندویچ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|=0$ در نتیجه $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

(ii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0 \Rightarrow f_x(0,0)=0$$
$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0 \Rightarrow f_y(0,0)=0$$

۲ نمره

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{|bt|\sin(at)}{t(|at|+|bt|)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{a|b|\,t|t|}{(|a|+|b|)t|t|}=\frac{a|b|}{|a|+|b|}$$
$$\Rightarrow D_uf(0,0)=\frac{a|b|}{|a|+|b|}$$

۲ نمره

با توجه به اینکه $\nabla f(0,0)=(f_x(0,0),f_y(0,0))=(0,0)$، تساوی $D_uf(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot u$ فقط وقتی برقرار است که $\frac{a|b|}{|a|+|b|}=0$ لذا باید $a=0$ یا $b=0$.

۲ نمره

(توجه کنید که این خود نتیجه می‌دهد که f در مبدأ مشتق‌پذیر نیست)

(۴) (هر مورد ۵ نمره)

(i) قرار دهید $F(x,y,z)=xy-y+1-z=0$.

بردار نرمال صفحه مماس $\nabla F(x,y,z)=(y,x-1,-1)$ بر رویه که در نقطه (x,y,z) است. برای نقاط واقع بر خم C، داریم

$$\nabla F=(3-t,t,-1) \Rightarrow \nabla F\cdot(1,1,2)=0$$

پس صفحه مماس بر رویه در هر نقطه خم بر P عمود است.

(ii)

$$\nabla F(x,y,z)\parallel(1,1,2)$$
$$\Rightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R},\ (y,x-1,-1)=\alpha(1,1,2)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y=\alpha\\ x-1=\alpha\\ -1=2\alpha\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}\\ x=\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow z=\frac{5}{4}$$

لذا مماس بر رویه در نقطه $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{5}{4})$ موازی با P است.

(۵)

$$r(t) = (t, \cos^2 t, \sin^2 t)$$

۲ ن

$$r'(t) = (1, -2\sin t\cos t, 2\sin t\cos t) = (1, -\sin 2t, \sin 2t)$$

$$r''(t) = (0, -2\cos 2t, 2\cos 2t)$$

۲ ن

$$r'(t)\cdot r''(t) = 4\cos 2t\sin 2t = 2\sin 4t$$

$$\Rightarrow a_T = \frac{r'(t)\cdot r''(t)}{|r'(t)|} = \frac{2\sin 4t}{\sqrt{1+2\sin^2 2t}}$$

۶ ن

$$r'(t)\times r''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -\sin 2t & \sin 2t \\ 0 & -2\cos 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix}$$

$$= (0, -2\cos 2t, -2\cos 2t)$$

$$a_N = \frac{|r'\times r''|}{|r'|} = \frac{\sqrt{4\cos^2 2t+4\cos^2 2t}}{\sqrt{1+\sin^2 2t+\sin^2 2t}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,|\cos 2t|}{\sqrt{1+2\sin^2 2t}}$$

---

(۶) نقاط تقاطع دایره و بیضی را در نظر می‌گیریم.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)$$

با جایگذاری در معادله دایره داریم:

$$\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)+y^2-2y=0 \Rightarrow \left(\frac{b^2-a^2}{b^2}\right)y^2-2y+a^2=0$$

چون دایره بالای محور x ها قرار گرفته است، فقط به ازای y های مثبت دایره و بیضی نقطه تقاطع دارند. لذا لازم است که معادله بالا فقط یک جواب داشته باشد (در غیر این صورت یک جواب دیگر به ازای y های منفی خواهیم داشت). پس باید Δی معادله درجه ۲ بالا برابر صفر باشد:

$$\Delta = 4-4a^2\frac{b^2-a^2}{b^2} = 0 \Rightarrow b^4-a^2b^2+a^4=0$$

مساحت بیضی برابر است با πab. لذا مینیمم تابع $f(a,b)=ab$ را تحت قید $g(a,b) = b^4-a^2b^2+a^4=0$ پیدا می‌کنیم. با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ داریم:

$$\nabla f = \lambda\nabla g \Rightarrow (b,a) = \lambda(4a^3-2ab^2, 2b-2ba^2)$$

$$\Rightarrow \frac{b}{2a(2a^2-b^2)} = \lambda = \frac{a}{2b(1-a^2)}$$

$$\Rightarrow 2b^2(1-a^2) = 2a^2(2a^2-b^2) \Rightarrow b^2 = 2a^4$$

با جایگذاری در $b^4-a^2b^2+a^4=0$ داریم:

$$2a^8-2a^6+a^4=0 \Rightarrow a^2=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ b = \sqrt{2}a^2 = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$