قضیه: یک روش چندگامی خطی پایدار است اگر و تنها اگر در شرط ریشه صدق کند.

اثبات. شرط ریشه صدق می‌کند که ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه یک روش K گامی بصورت

$$P(\xi) = \xi^{k} - \sum_{i=1}^{k} a_i \xi^{k-i} \qquad (1)$$

بایستی در شرط $|\xi|<1$ یا $|\xi|=1$ (ریشه ساده) صدق کند.

بدیهی است به کمک ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه فوق می‌توان جوابهای معادله

$$P(E)y_{n-k+1} = y_{n+1} - \sum_{i=1}^{k} a_i y_{n-i+1} \qquad (2)$$

را تعیین نمود. دنباله جوابهای $\{y_n\}$، $n \geq 0$ را از رابطه بازگشتی فوق در نظر می‌گیریم. چون هر جواب بستگی به مقادیر اولیه $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ دارد و

جواب در هر گام $k, k+1, \ldots$ یک ترکیب خطی از $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ است پس این مجموعه یعنی $\{y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}\}$ یک فضای برداری را تولید می‌کند که خود پایه آن است. این روش عددی پایدار است اگر و تنها اگر جوابهای بدست آمده توسط فضای برداری فوق کراندار باشد. بدیهی است اگر ξ یک جواب از (1) باشد (جواب ساده)، جواب (2) بصورت زیر خواهد بود

$$(3) \qquad y_n = \xi^{n}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n \text{ کراندار} \\ n \to \infty \end{array} \right. \iff |\xi| \leq 1$$

اکنون فرض می‌کنیم ξ یک ریشهٔ تکراری از $P(\xi)$ با مرتبهٔ $m \geq 2$ باشد. بنابراین

$$y_n = n\xi^n, \quad y_n = n^2\xi^n, \quad \dots, \quad y_n = n^{m-1}\xi^n, \quad y_n = c\xi^n$$

نیز جواب از (۲) می‌باشد. بدیهی است شرط $|\xi|<1$ برای کرانداری y_n لازم است.

اثبات دوم: عبارت زیر را در نظر می‌گیریم

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{n-k+2} \\ y_{n-k+3} \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix}}_{V_{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 0 & 1 \\ a_k & a_{k-1} & & & a_2 & a_1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{n-k+1} \\ y_{n-k+2} \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}}_{V_n}$$

قرار می‌دهیم

$$V_{n+1} = A\,V_n$$

به عبارت معادل:

$$V_n = A^{n-k}\,V_{k+1}$$

y_n کراندار است اگر و تنها اگر V_n کراندار باشد. V_n نیز کراندار است اگر و تنها اگر A^n کراندار باشد.

به روشنی ملاحظه می‌شود

$$\det(\xi I - A) = P(\xi)$$

بنابراین چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس A، همان چندجمله‌ای مشخصهٔ روش k گامی است. پس مقادیر ویژهٔ A برابر ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصهٔ روش k گامی است.

فرض کنیم ماتریس وارون پذیر S گونه‌ای باشد که

$$J = S^{-1}AS \rightarrow A = SJS^{-1}$$

و A را بصورت کانونی جردن تبدیل می‌نماید. J ماتریس است بلوکی با بلوکهای J_i روی قطر با شکل زیر و با بعد مرتبه تکرار مقدار ویژهٔ (ξ_i)

$$J_i = \begin{vmatrix} \xi_i & 1 & & 0 \\ & \xi_i & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \xi_i \quad 1 \end{vmatrix}$$

هر ماتریس دارای شکل کانونی جردن است. هر مقدار ویژه ممکن است در بلوکهای متعدد ظاهر شود. اما شکل ماتریس فوق چنان است که دقیقاً یک بلوک متناظر با هر مقدار ویژه اینجا درنظر گردد. (چرا؟)

$$A^n = SJ^nS^{-1}$$

عناصر قطری J^n بصورت زیر هستند

$$J_i^n = \begin{vmatrix} \xi_i^n & \binom{n}{1}\xi_i^{n-1} & & \binom{n}{m_i-1}\xi_i^{n+1-m_i} \\ & \xi_i^n & \binom{n}{1}\xi_i^{n-1} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & \xi_i^n & \binom{n}{1}\xi_i^{n-1} \end{vmatrix}$$

درصورتیکه $|\xi_i| < 1$ عناصر ماتریس فوق کراندار هستند. درصورتیکه ξ_i ریشهٔ سادهٔ چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس A باشد بلوک متناظر $[\xi_i^n]$ است پس کافیست $|\xi_i| \le 1$ باشد تا A^n کراندار باشد.

قضیه ۱: هر طرح چندگامی خطی همگرا، پایدار است.

اثبات: فرض می‌کنیم طرح چندگامی خطی مفروض همگرا است. این طرح برای هر مسئلهٔ مقدار اولیه همگرا است پس برای مسئلهٔ زیر نیز همگرا است

$$\begin{cases} u'(t)=0 \\ u(0)=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{جواب}} u(t)=0$$

پس $\lim_{n\to\infty} u_n = u(t_n)$. نشان می‌دهیم این طرح در شرط ریشه صدق می‌کند.

صورت قطبی ریشهٔ چندجمله‌ای مشخصهٔ زیر

$$\rho(\xi)=\xi^k-\sum_{j=1}^{k} a_j\, \xi^{k-j}$$

را به صورت $\xi=\rho e^{i\theta}$ در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم $|\xi|\le 1$.

دنبالهٔ $\{h\xi^n\}=\{h\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\}$ برای $\theta\in[0,2\pi]$ جوابی از معادلهٔ همگن زیر است

$$y_{n+1}-\sum_{j=1}^{k} a_j\, y_{n-j+1}=0 \qquad (1)$$

با توجه به مطلق بودن (۱) دنباله $u_n = \{h\rho^n \cos(n\theta)\}$ نیز یک جواب
از (۱) است . اگر $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ مقدار این طرح نشان می‌دهد

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \left|\frac{t}{n}\rho^n\right| = 0$$

که این مطلب وقتی درست است که $\rho = |\xi| \le 1$. برای مقادیر دیگر $\theta \in (0,\pi)$
با توجه به رابطه

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$$

$$\frac{t^2}{n^2}\rho^{2n} = h^2\rho^{2n} = \frac{u_n^2 - u_{n+1}\cdot u_{n-1}}{\sin^2\theta} \qquad (۲)$$

با توجه به مطلق بودن (۱) دنباله $u_n = \{h\rho^n \cos(n\theta)\}$ نیز یک جواب
از (۱) است . اگر $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ مقدار این طرح نشان می‌دهد

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \left|\frac{t}{n}\rho^n\right| = 0$$

که این مطلب وقتی درست است که $\rho = |\xi| \le 1$. برای مقادیر دیگر $\theta \in (0,\pi)$
با توجه به رابطه

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$$

$$\frac{t^2}{n^2}\rho^{2n} = h^2\rho^{2n} = \frac{u_n^2 - u_{n+1}\cdot u_{n-1}}{\sin^2\theta} \qquad (۲)$$

همگرایی نتیجه می دهد که $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ پس سمت راست (۲) به سمت صفر
در بی نهایت میل می کند. بنابراین

$$h^2\rho^{2n} \to 0$$

پس $\rho=|\xi|<1$. روابط فوق برای حالتی که ξ ریشه ساده باشد برقرار است
در صورتیکه ξ ریشه تکراری $\rho(\xi)$ باشد بصورت زیر عمل می کنیم.
فرض کنید $\xi=\rho e^{i\theta}$ صفر چندگانگی بزرگتر از ۱ را دارا است. پس $\sqrt{h}\, n\xi^n$
در معادله تفاضلی (۱) صدق می کند. در $\theta=0$ یا $\theta=\pi$ داریم.

$$|u_n| = \sqrt{h}\, n\rho^n = \sqrt{\tfrac{t}{n}}\, n\rho^n = \sqrt{nt}\,\rho^n$$

همگرایی نتیجه می دهد $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. این تنها در $\rho=|\xi|<1$ اتفاق می افتد
برای نقاط دیگر $\theta\in[0,2\pi)$ یک دنباله جدید بصورت

$$\{v_n\} = \left\{\frac{u_n}{n\sqrt{h}}\right\}$$

تعریف می کنیم. همگرایی نتیجه می دهد

$$\begin{cases} v_n \to 0 \\ n\to\infty \end{cases}$$

بنابراین

$$\rho^{2n} = \frac{v_n^2 - v_{n+1}v_{n-1}}{\sin^2\theta} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \rho^n \to 0$$
$$n\to\infty$$

پس $|\xi|<1$. بنابراین طرح فوق در شرط ریشه صدق می کند و پایدار
است.

قضیه: هر روش چندگامی همگرا، سازگار است.

روش چندگامی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h\,\varphi_f(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}, x_n, h) & (1) \\ y_\mu = \eta_\mu & \mu = 0, 1, 2, \dots, k-1 \end{cases}$$

روش عددی فوق همگراست پس

$$\lim_{n \to \infty} y_n = y(x_n)$$

برای اثبات سازگاری روش نشان می‌دهیم

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ n \to \infty}} \frac{R_{n+k}}{h} = 0$$

طبق (1)

$$(1) \quad R_{n+k} = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j y(x_{n+j}) - h\varphi_f(y(x_{n+k}), \dots, y(x_{n+1}), y(x_n), x_n, h)$$

قضیه مقدار میانگین را به صورت جملات زیر در نظر می‌گیریم

$$y(x_{n+j}) - y(x_n) = jh\,y'(\xi_j) \qquad x_{n+j} < \xi_j < x_n$$

$$\lim_{h \to 0} y'(\xi_j) = y'(x_n)$$

با جایگزینی آنها در (1) داریم:

$$\frac{1}{h} R_{n+k} = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \left[y(x_n) + jh\,y'(\xi_j) \right] - \varphi_f(y(x_n), y(x_{n+k}), \dots y(x_{n+k}), x_n, h)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_{n+k}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\sum \alpha_j \right) y(x_n) + \lim_{h \to 0} \sum j \alpha_j y'(x_n)$$

$$- \lim_{h \to 0} \varphi_f$$

برای اینکه $\lim_{h\to 0} \frac{R_{n+k}}{h} = 0$ لازم است:

$$\begin{cases} 1)\ \sum \alpha_j = 0 \\ 2)\ \sum j\alpha_j\, y'(x_n) = \phi_f\left(y(x_n),\dots,y(x_{n+k}),x_n,0\right) \end{cases}$$

هم عبارت معادل:

$$f(x_n,y_n) = \frac{\phi_f\left(y(x_n),\dots,y(x_{n+k}),x_n,0\right)}{\sum j\alpha_j}$$

نشان می‌دهیم در صورت سازگاری شرایط فوق برقرار است.

از سمت چپ و راست رابطه (1) در $h\to 0$ حد می‌گیریم چون $\lim_{h\to 0} y_{n+j} = y(x_n)$

شرایط

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}} y_{n+j} = \lim_{h\to 0} y(x_n+jh) = y(x_n)$$

داریم

$$\sum \alpha_j\, y(x_n) = 0 \Rightarrow \sum \alpha_j = 0$$

(۲)

$$\phi_f = \frac{\sum \alpha_j\, y_{n+j}}{h} = \frac{\sum \alpha_j y_{n+j} - \sum \alpha_j\, y(x_n)}{h} = \sum j\alpha_j \frac{(y_{n+j}-y_n)}{jh}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{y(x_{n+j})-y(x_n)}{jh} = y'(x_n)$$

در رابطه (۲):

$$\phi_f\left(y(x_n),\dots,y(x_{n+k}),x_n,0\right) = \sum j\alpha_j\, y'(x_n)$$

$$f(x_n,y_n) = \frac{\phi\left(y(x_n),\dots,y(x_{n+k}),x_n,0\right)}{\sum j\alpha_j}$$

پس با برقراری شرط دوم سازگاری اتفاق می‌افتد

نتیجه : یک روش عددی سازگار است اگر و تنها اگر :

1) $\sum \alpha_j = 0 \Rightarrow \rho(1) = 0$ $\qquad \rho(\xi) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \xi^j$

2) $\rho'(1) = \sum_{j=0}^{k} j \alpha_j$

$\phi_F(y(x_n), \dots, y(x_{n+k}), x_n, 0) / \rho'(1) = f(x_n, y_n)$

مثال) روش عددی زیر را در نظر بگیرید :

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{3}\left[3 f(x_{n+1}, y_{n+1}) - 2 f(x_n, y_n)\right]$$

$\rho = r - 1 \qquad \Rightarrow \rho(1) = 0$

$\rho'(1) = 1$

$\phi(\ \ , x_n, 0) = \frac{1}{3}\left[3 f(x_{n+1}, y_{n+1}) - 2 f(x_n, y_n)\right]$

$= \frac{1}{3} f(x_n, y_n) \neq f(x_n, y_n)$

روش سازگار نیست .

مثال) در روش رنگ کوتا

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$

$k_1 = f(x_n, y_n)$

$k_2 = f(x_n + h, y_n + \frac{1}{2} h k_1 + \frac{1}{2} h k_2)$

$\rho(\xi) = \xi - 1$

1) $\rho(1) = 0$ $\qquad$ 2) $\dfrac{\phi_f(y_n, y_n, \dots, y_n, x_n, 0)}{1} = f(x_n, y_n)$

$\rho'(1) = 1$

روش سازگار است .

روش چندگامی خطی در حالت کلی :

اپراتور L را بصورت زیر در نظر می‌گیریم

$$L(y(t),h) = y(t_{n+1}) - \sum_{i=1}^{k} a_i \, y(t_{n-i+1}) - h \sum_{i=0}^{k} b_i \, y'(t_{n-i+1}) \qquad (1)$$

فرض کنیم $y(t)$ به اندازه کافی مشتق پیوسته دارا باشد. بسط تیلور آنرا در نظر می‌گیریم

$$y(t_{n-i+1}) = y(t_n) + h(1-i)\,y'(t_n) + \frac{(1-i)^2}{2!} h^2 y''(t_n) + \cdots + \frac{(1-i)^p}{p!} h^p y^{(p)}(t_n) + \frac{1}{p!} \int_{t_n}^{t_{n-i+1}} (t_{n-i+1} - s)^p \, y^{(p+1)}(s)\, ds$$

همچنین :

$$y'(t_{n-i+1}) = y'(t_n) + h(1-i)\,y''(t_n) + \cdots + \frac{(1-i)^{p-1}}{(p-1)!} h^{p-1} y^{(p)}(t_n) + \frac{1}{(p-1)!} \int_{t_n}^{t_{n-i+1}} (t_{n-i+1} - s)^{p-1} \, y^{(p+1)}(s)\, ds$$

با جایگزینی این مقادیر در (۱) داریم

$$
\begin{aligned}
L(y(t),h) = {} & y(t_n) + hy'(t_n) + E_1\,(i=0) \; + \\
& - a_1\, y(t_n) \\
& - a_2\, y(t_n) - a_2 (-1) h\, y'(t_n) + a_2 \frac{(-1)^2}{2!} h^2 y''(t_n) + \cdots + E\,(i=2) \\
& \vdots \\
& - a_k\, y(t_n) - a_k \frac{(1-k)}{1} h\, y'(t_n) - a_k \frac{(1-k)^2}{2!} h^2 y''(t_n) + \cdots + E\,(i=k) + \\
& - h b_0\, y'(t_n) - h^2 b_0\, y''(t_n) - \cdots - E'\,(i=0) + \\
& - h b_1\, y'(t_n) + \\
& - h b_2\, y'(t_n) - (-1) h^2 b_2\, y''(t_n) + \cdots + E'\,(i=2) + \\
& \vdots \\
& - h b_k\, y'(t_n) - h^2 b_k \frac{(1-k)}{1} y''(t_n) - \cdots - E'\,(i=k)
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$L(y,h) = c_0\, y(t_n) + c_1 h y'(t_n) + \cdots + c_p h^p y^{(p)}(t_n) + T_n \qquad (2)$$

که در آن

$$c_0 = 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i$$

$$c_1 = 1 - \sum_{i=2}^{k} a_i (1-i) - \sum_{i=0}^{k} b_i$$

و در حالت کلی

$$c_q = \frac{1}{q!}\left(1 - \sum_{i=1}^{k} a_i (1-i)^q\right) - \frac{1}{(q-1)!} \sum_{i=0}^{k} b_i (1-i)^{q-1},$$

$$q = 1, 2, \ldots, p$$

همچنین

$$T_n = \frac{1}{p!}\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1}-s)^p\, y^{(p+1)}(s)\,ds - \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{t_n}^{t_{n-i+1}} (t_{n-i+1}-s)^p\, y^{(p+1)}(s)\,ds\right.$$
$$\left. - h \sum_{i=0}^{k} b_i \int_{t_n}^{t_{n-i+1}} (t_{n-i+1}-s)^{p-1}\, y^{(p+1)}(s)\,ds\right)$$

در رابطه تفاضلی (۲) هرگاه

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_p = 0, \quad c_{p+1} \neq 0$$

روش را از مرتبه p می‌نامند. در این صورت در یک روش مرتبه p داریم

$$L(y(t),h) = -c_{p+1}\, h^{p+1}\, y^{(p+1)}(t_n) + O(h^{p+2})$$

تعریف: در یک روش چندگامی هرگاه $p \geq 1$ روش را سازگار گوییم.

تعریف: روش چندگامی فوق در شرط ریشه صدق می‌کند هرگاه ریشه‌های معادله مشخصه متناظر آن در صفحه مختلط داخل دایره‌ای به شعاع ۱ قرار گیرند یا در صورت ساده بودن می‌توان آنها را روی دایره در نظر گرفت.

نقش ضرایب a_i و b_i:

رابطه (۲) برای هر تابع $y(t) \in C^{(p+2)}$ برقرار است.

ضرایب a_i و عدد p در این رابطه بستگی به $y(t)$ ندارد. بنابراین می‌توان از تابع $y(t)=e^t$ به صورت زیر استفاده نمود. با فرض اینکه روش از مرتبه p است داریم

$$L(e^{t_n},h) = e^{t_{n+1}} - a_1 e^{t_n} - \dots - a_k e^{t_{n-k+1}} - h\left(b_0 e^{t_{n+1}} + b_1 e^{t_n} + \dots + b_k e^{t_{n-k+1}}\right)$$

$$= -c_{p+1} h^{p+1} e^{t_n} + O(h^{(p+2)})$$

$$L(e^{t_n},h) = e^{t_{n-k+1}} \Big[\left(e^{hk} - a_1 e^{h(k-1)} - \dots - a_k\right) -$$

$$h\left(b_0 e^{hk} + b_1 e^{h(k-1)} + \dots + b_k\right)\Big] = -c_{p+1} h^{p+1} e^{t_n} + O(h^{p+2})$$

$$\rho(e^{h}) - h\,\sigma(e^{h}) = -C_{p+1}\, h^{p+1} e^{h(k-1)} + \frac{O(h^{p+2})}{e^{t_{n-k+1}}}$$

$$h^{-1}\rho(e^{h}) - \sigma(e^{h}) = -C_{p+1}\, h^{p} e^{h(k-1)} + O(h^{p+2})$$

با فرض $e^{h} = \xi$ داریم $h = \log \xi$

$$h \to 0 \equiv \xi \to 1 \equiv \log \xi \to 0$$

در حد داریم :

$$\begin{cases} \rho(e^{h}) = \rho(\xi) \\ \sigma(e^{h}) = \sigma(\xi) \end{cases} \Rightarrow \frac{\rho(\xi)}{\log \xi} - \sigma(\xi) = -C_{p+1}(\xi-1)^{p} + O\left((\xi-1)^{p+2}\right)$$

تعیین $\rho(\xi)$ و $\sigma(\xi)$ در روشهای مختلف :

۱) روش آدامز بشفورث :

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{m=0}^{k-1} \gamma_m \nabla^{m} f_n$$

$$\nabla^{m} f_n = \sum_{p=0}^{m} (-1)^{p} \binom{m}{p} f_{n-p} = f_n \mp \binom{m}{1} f_{n-1} + \cdots + \binom{m}{m} f_{n-m}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{m=0}^{k-1} \gamma_m \left(f_n - \binom{m}{1} f_{n-1} + \cdots + \binom{m}{m} f_{n-m} \right)$$

$$\xi^{n+1} = \xi^{n} + h \sum_{m=0}^{k-1} \gamma_m \left(\xi^{n} - \binom{m}{1} \xi^{n-1} + \cdots + \binom{m}{m} \xi^{n-m} \right)$$

$$\xi^{k} - \xi^{k-1} + h \sum_{m=0}^{k-1} \gamma_m \left(\xi^{k-1} - \binom{m}{1} \xi^{k-2} + \cdots + \binom{m}{m} \xi^{k-m-1} \right)$$

درنتیجه :

$$\rho(\xi) = \xi^{k} - \xi^{k-1}$$

$$\sigma(\xi) = \xi^{k-1} \sum_{m=0}^{k-1} \gamma_m \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^{m}$$

در این روش ۱

$$\gamma_0=1,\ \gamma_1=\frac{1}{2},\ \gamma_2=\frac{5}{12},\ \gamma_3=\frac{3}{8},\ \gamma_4=\frac{251}{720},\ \dots$$

$$\gamma_1+\frac{1}{2}\gamma_0=1$$

$$\gamma_2+\frac{1}{2}\gamma_1+\frac{1}{3}\gamma_0=1 \quad \Rightarrow \quad \gamma_m+\frac{1}{2}\gamma_{m-1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\gamma_0=1$$

$$\gamma_3+\frac{1}{2}\gamma_2+\frac{1}{3}\gamma_1+\frac{1}{4}\gamma_0=1$$

۲) روش نیستروم را به صورت ارائه شده در بخش قبل داریم

$$\rho(\xi)=\xi^{k-2}(\xi^2-1)$$

$$\sigma(\xi)=\xi^{k-1}\sum_{m=0}^{k-1}\gamma_m(1-\xi^{-1})^m$$

$$\gamma_m+\frac{1}{2}\gamma_{m-1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\gamma_0=\begin{cases}2, & m=0\\ 1, & m=1,2,\dots\end{cases}$$

۳) روش آدامز - مولتون :

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{m=0}^{k}\gamma_m\nabla^m f_{n-m}$$

$$y_{n+1}=y_n+h\left[f_{n+1}-\frac{1}{2}\nabla f_{n+1}-\frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1}-\cdots\right)$$

$$\rho(\xi)=\xi^{k-1}(\xi-1)$$

$$\sigma(\xi)=\xi^{k}\sum_{m=0}^{k}\gamma_m(1-\xi^{-1})^m$$

$$\gamma_m+\frac{1}{2}\gamma_{m-1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\gamma_0=\begin{cases}1 & m=0\\ 0 & m=1,2,\dots\end{cases}$$

۴) روش میلن-سیمپسون

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h\left(2 f_{n+1} - 2\nabla f_{n+1} + \frac{1}{3}\nabla^2 f_{n+1} + \cdots\right)$$

$$\rho(\xi) = \xi^{k-2}(\xi^2 - 1)$$

$$b(\xi) = \xi^k \sum_{m=0}^{k} \gamma_m (1-\xi^{-1})^m$$

$$\gamma_m + \frac{1}{2}\gamma_{m-1} + \cdots + \frac{1}{m+1}\gamma_0 = \begin{cases} 2 & m=0 \\ -1 & m=1 \\ 0 & m=2,3,\ldots \end{cases}$$

تخمین خطای برشی :

$$T_n = \frac{1}{p!}\Big[\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1}-s)^p y^{(p+1)}(s)\,ds - \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{t_n}^{t_{n-i+1}} (t_{n-i+1}-s)^p y^{(p+1)}(s)\,ds$$
$$- hp\int_{t_n}^{t_{n+1}} b_0 (t_{n+1}-s)^{p-1} y^{(p+1)}(s)\,ds - hp\sum_{i=1}^{k} b_i \int_{t_n}^{t_{n-i+1}} (t_{n-i+1}-s)^{p-1} y^{(p+1)}(s)\,ds\Big]$$

تعریف می کنیم :

$$(\overline{t_{n-i+1}-s}) = \begin{cases} t_{n-i+1}-s & t_{n-i+1} \leq s \leq t_n \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

بنابراین فاصله t_n تا t_{n-i+1} را بصورت زیر توسیع می دهیم

$$T_n = \frac{1}{p!}\int_{t_{n-k+1}}^{t_{n+1}} \Big\{ (\overline{t_{n+1}-s})^p - p h b_0 (\overline{t_{n+1}-s})^{p-1} + \sum_{i=1}^{k} \Big(a_i (\overline{t_{n-i+1}-s})^p + p h b_i (\overline{t_{n-i+1}-s})^{p-1} \Big) \Big\} y^{(p+1)}(s)\,ds$$

با فرض $u=\frac{s-t_n}{h}$ در اینصورت $1-u=1-\frac{s-t_n}{h}=\frac{t_{n+1}-s}{h}$

در اینصورت

$$T_n=\frac{h^{p+1}}{p!}\int_{1-k}^{1}\left\{(\overline{1-u})^{p}-pb_0(\overline{1-u})^{p-1}+\sum_{i=1}^{k}\left(a_i(\overline{1-i-u})_+^{p}-pb_i(\overline{1-i-u})^{p-1}\right)\right\}y^{(p+1)}(t_n+hu)\,du$$

$$T_n=\frac{h^{p+1}}{p!}\int_{1-k}^{1}G(u)\,y^{(p+1)}(t_n+hu)\,du$$

تابع $G(u)$ را تابع نفوذ می‌نامند.

در صورتیکه علامت $G(u)$ در $[1-k,1]$ تغییر نکند می‌توان نوشت:

$$T_n=\frac{h^{p+1}}{p!}y^{(p+1)}(\eta)\int_{1-k}^{1}G(u)\,du,\qquad \eta\in(1-k,1)$$

در اینصورت

$$|T_n|\leq\frac{h^{p+1}}{p!}\left|y^{(p+1)}(\eta)\right|\int_{1-k}^{1}|G(u)|\,du$$

مثال) یک فرمول مرتبه ۵ را بصورت زیر در نظر می‌گیریم

$$y_{n+1}=a_1y_n+a_2y_{n-1}+a_3y_{n-2}+a_4y_{n-3}+h(b_0y'_{n+1}+b_1y'_n+b_2y'_{n-1})$$

$$c_0=c_1=c_2=\dots=c_5=0$$

$$c_0=1-\sum_{i=1}^{4}a_i=1-a_1-a_2-a_3-a_4$$

$$c_1 = 1 - \sum a_i(1-i) - \sum b_i$$

$\vdots$

۶ معادله با ۷ مجهول داریم که با انتخاب یک مقدار اختیاری به یکی از آنها یک روش صریح (ضمنی) تعیین می‌شود.

تابع نفوذ را بصورت زیر می‌توان محاسبه نمود.

$$G(u) = \begin{cases} (1-u)^5 - 5b_0(1-u)^4 & u\in[0,1] \\ -a_2(1+u)^5 + 5b_2(1+u)^4 - a_3(2+u)^5 + a_4(3+u)^5 & -1\leq u\leq 0 \\ a_3(u+2)^5 + a_4(u+3)^5 & -2\leq u\leq -1 \\ a_4(u+3)^5 & -3\leq u\leq -2 \end{cases}$$

بنابراین

$$T_n = -\underline{h^6}\,(-219+86a_2)\,y^{(6)}(\eta), \quad -3<\eta<1$$

روشهای پیشگو اصلاحگر Predictor corrector methods

به دلیل مشکل بودن استفاده از روشهای ضمنی بصورت مستقیم بصورت زیر عمل می‌کنیم
فرض کنید مقادیر $y(t)$ و $f(t,y(t))$ در k نقطه اولیه معلوم باشند داریم

$$y_{n+1} = \sum_{i=1}^{k} a_i y_{n-i+1} + h\sum_{i=0}^{k} b_i y'_{n-i+1}$$

$$(1)\quad y_{n+1} = hb_0 y'_{n+1} + \sum_{i=1}^{k}\left(a_i y_{n-i+1} + b_i y'_{n-i+1}\right)$$

برای محاسبه y_{n+1} بصورت تکراری و غیرمستقیم از روش زیر استفاده می‌کنیم

۱) یک مقدار $y_{n+1}^{(0)}$ را توسط یک روش صریح بدست می‌آوریم (پیشگویی) P: Predict

۲) توسط این مقدار f_{n+1} را محاسبه می‌کنیم — E: Evaluate

۳) توسط یک روش ضمنی مقدار $y_{n+1}^{(1)}$ را محاسبه کرده و بهبود می‌بخشیم — C: Correct

۴) مقدار f_{n+1} را در $y_{n+1}^{(1)}$ محاسبه می‌کنیم — E:

۵) مقدار $y_{n+1}^{(2)}$ را توسط روش ضمنی محاسبه می‌کنیم — C:

این روند را ادامه می‌دهیم تا تقریب مناسبی برای y_{n+1} حاصل گردد. با ادامه روند $PECEC\ldots$ یا $P(EC)^mE$ دنباله‌ای تولید می‌شود که تقریبی از y_{n+1} است.

همگرایی دنباله حاصل یعنی $y_{n+1}^{(0)}, y_{n+1}^{(1)}, \ldots$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه: فرض کنید $y_{n+1}^{(p)}$ یک دنباله از مقدارهای تقریبی برای y_{n+1} باشد اگر مستقل از مقدار $y = y_{n+1}^{(0)}, y_{n+1}^{(1)}, \ldots$ داشته باشیم

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y)\right| \le L < \frac{1}{|hb_0|}$$

در اینصورت دنباله $y_{n+1}^{(p)}$ همگراست به y_{n+1} واقعی.

اثبات: در روش چندگامی خطی (۱) قرار می‌دهیم

$$y_{n+1} = F(y_{n+1}) = hb_0 y'_{n+1} + \sum_{i=1}^{k} (a_i y_{n-i+1} + b_i y'_{n-i+1})$$

بر اساس روش تکرار ساده شرط لازم برای همگرایی روش:

$$\left|\frac{\partial F(y_{n+1})}{\partial y_{n+1}}\right| < 1 \Rightarrow \left|hb_0 \frac{\partial f_{n+1}}{\partial y_{n+1}}\right| < 1 \Rightarrow |hb_0 L| < 1$$

$$L < \frac{1}{|hb_0|}$$

روش $P(EC)^mE$: بنابر قضیه فوق با شرط $|hLb_0| < 1$ استفاده از روش بشکل اصلاح‌گر، دنباله تولیدشده از $y_{n+1}^{(p)}$ را به سمت y_{n+1} سوق می‌دهد.

برای محاسبه $y_{n+1}^{(0)}$ از یک روش صریح استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$y_{n+1}^{(0)} = \sum_{i=1}^{k}\left(a_i y_{n-i+1} + h b_i y'_{n-i+1}\right)$$ روش صریح

$$y_{n+1}^{(\mu)} = \sum_{i=1}^{k}\left(a_i y_{n-i+1} + h b_i y'_{n-i+1}\right) + h b_0 f_{n+1}^{(\mu-1)}$$

$\mu = 1, 2, \dots, m$

پس از m مرحله قرار می‌دهیم $y_{n+1} \simeq y_{n+1}^{(m)}$

و روش فوق یک روش $P(EC)^m E$ است هرگاه $f_{n+1} = f_{n+1}^{(m)}$ به طور کلی $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}^{(m)})$

اکنون روش $P(EC)^m E$ را برای معادله $y' = \lambda y$ توصیف می‌کنیم:

$$P: y_{n+1}^{(0)} = \sum_{i=1}^{k}\left(a_i^{(0)} + h\lambda b_i^{(0)}\right) y_{n-i+1}$$

$$E: f_{n+1}^{(0)} = f(t_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}) = \lambda y_{n+1}^{(0)}$$

$$C: y_{n+1}^{(1)} = \sum_{i=1}^{k}\left(a_i + h\lambda b_i\right) y_{n-i+1} + h\lambda b_0 \sum_{i=1}^{k}\left(a_i^{(0)} + h\lambda b_i^{(0)}\right) y_{n-i+1}$$

$$E: y_{n+1}^{(1)} = \lambda y_{n+1}^{(1)}$$

$$C: y_{n+1}^{(2)} = \sum_{i=1}^{k}\left(a_i + h\lambda b_i\right) y_{n-i+1} + h\lambda b_0 y_{n+1}^{(1)}$$

با ساده کردن رابطه فوق داریم:

$$y_{n+1}^{(2)} = (1 + h\lambda b_0)\sum_{i=1}^{k}\left(a_i + h\lambda b_i\right) y_{n-i+1} + (h\lambda b_0)^2 \sum_{i=1}^{k}\left(a_i^{(0)} + h\lambda b_i^{(0)}\right) y_{n-i+1}$$

به همین ترتیب در حالت کلی داریم :

$$y_{n+1}^{(m)} = \left(1+h\lambda b_0 + \dots + (h\lambda b_0)^{m-1}\right) \sum_{i=1}^{k} (a_i + h\lambda b_i) y_{n-i+1} + (h\lambda b_0)^m \sum_{i=1}^{k} \left(a_i^{(0)} + h\lambda b_i^{(0)}\right) y_{n-i+1}$$

$$y_{n+1}^{(m)} = \frac{1-(h\lambda b_0)^m}{1-h\lambda b_0} \sum_{i=1}^{k} (a_i + h\lambda b_i) y_{n-i+1} + (h\lambda b_0)^m \sum_{i=1}^{k} \left(a_i^{(0)} + h\lambda b_i^{(0)}\right) y_{n-i+1}$$

فرض کنیم $y_n = A\xi^n$ یک جواب از معادله تفاضلی فوق باشد در این صورت

$$A\xi^{n+1} = \theta_1 \sum_{i=1}^{k} (a_i + h\lambda b_i) \xi^{k-i} + \theta_2 A \sum_{i=1}^{k} \left(a_i^{(0)} + h\lambda b_i^{(0)}\right) \xi^{k-i+1}$$

پس از ساده کردن داریم :

$$\xi^k = \theta_1 \sum_{i=1}^{k} (a_i + h\lambda b_i) \xi^{k-i} + \theta_2 \sum_{i=1}^{k} \left(a_i^{(0)} + h\lambda b_i^{(0)}\right) \xi^{k-i}$$

$$\xi^k + \theta_1\left(\xi^k - \sum a_i \xi^{k-i}\right) - \theta_1 \xi^k - \theta_1 \sum_{i=0}^{k} h\lambda b_i \xi^{k-i} + \theta_1 h\lambda b_0 \xi^k + \theta_2\left(\xi^k - \sum_{i=1}^{k} a_i^{(0)} \xi^{k-i}\right) - \theta_2 \xi^k - \theta_2 \sum_{i=0}^{k} h\lambda b_i^{(0)} \xi^{k-i}$$

$$\theta_1 \rho(\xi) - h\lambda \theta_1 \sigma(\xi) + \theta_2 \rho^{(0)}(\xi) - h\lambda \theta_2 \sigma^{(0)}(\xi) + \underbrace{\xi^k - \theta_1 \xi^k - \theta_2 \xi^k + \theta_1 h\lambda b_0 \xi^k}_{0} = 0$$

زیرا

$$\xi^k - \left(1+h\lambda b_0 + \dots + (h\lambda b_0)^{m-1}\right)\xi^k - (h\lambda b_0)^m \xi^k + \left(h\lambda b_0 + \dots + (h\lambda b_0)^m\right)\xi^k = 0\,\xi^k = 0$$

پس

$$\theta_1\left(\rho(\xi) - h\lambda\sigma(\xi)\right) + \theta_2\left(\rho^{(0)}(\xi) - h\lambda \sigma^{(0)}(\xi)\right) = 0$$

بنویسیم

$$\rho(\xi)=\xi^{k}-\sum_{i=1}^{k}a_i\,\xi^{k-i}\qquad \sigma(\xi)=\sum_{i=0}^{k}b_i\,\xi^{k-i}$$

$$\sigma(\xi)=\xi^{k}-\sum_{i=1}^{k}a_i^{(0)}\,\xi^{k-i}\qquad \sigma^{(0)}(\xi)=\sum_{i=1}^{k}b_i^{(0)}\,\xi^{k-i}$$

فرض کنیم ξ_{jh} ریشه‌های معادله‌ی فوق باشند. در این صورت روش را مطلقاً پایدار گوییم هرگاه $j=1,\dots,k$

$$|\xi_{jh}|\le 1\qquad j=1,2,\dots,k$$

و مطلقاً نسبی پایدار نامیده می‌شود هرگاه

$$2\le j\le k\quad |\xi_{jh}|\le|\xi_{1h}|$$

که ξ_{1h} ریشه‌ی اصلی معادله است.

تمرین: در روش پیشگو اصلاحگر آدامز بشفورث و آدامز مولتون برای $\begin{cases}k=2\\ m=1\end{cases}$ ناحیه‌ی پایداری مطلق را محاسبه کنید.

$$y_{n+1}=y_n+h\left[\frac{3}{2}f_n+\left(-\frac{1}{2}\right)f_{n-1}\right]$$

$$y_{n+1}=y_n+h\left[\frac{5}{12}f_{n+1}+\frac{8}{12}f_n-\frac{1}{12}f_{n-1}\right]$$

$m=1\Rightarrow\theta_1=1$

$\theta_2=(h\lambda b_0)^m=\bar{h}\left(\frac{5}{12}\right)$

$$\rho(\xi)=\xi^2-\xi\qquad \sigma(\xi)=\frac{5}{12}\xi^2+\frac{8}{12}\xi-\frac{1}{12}$$

$$\rho^{(0)}(\xi)=\xi^2-\xi\qquad \sigma^{(0)}(\xi)=\frac{3}{2}\xi^2-\frac{1}{2}\xi$$

$$(\xi^2-\xi) - \bar{h}\left(\frac{5}{12}\xi^2+\frac{8}{12}\xi-\frac{1}{12}\right) + \frac{5}{12}\bar{h}\,(\xi^2-\xi) - \bar{h}\left(\frac{5}{12}\bar{h}\right)\left(\frac{3}{2}\xi^2-\frac{1}{2}\xi\right)=0$$

$$\xi^2\left(1-\bar{h}\left(\frac{5}{12}\right)+\frac{5}{12}\bar{h}-\frac{5}{8}\bar{h}^2\right)+\xi\left(-1-\frac{8}{12}\bar{h}-\frac{5}{12}\bar{h}+\frac{5}{24}\bar{h}^2\right)$$
$$+\frac{\bar{h}}{12}=0$$

$$\xi^2\left(1-\frac{5}{8}\bar{h}^2\right)+\xi\left(-1-\frac{13}{12}\bar{h}+\frac{5}{24}\bar{h}^2\right)+\frac{\bar{h}}{12}=0$$

محاسبهٔ خطای برشی حالت خاص: برای بررسی خطای برشی نوع خاص از روش صحیح و تصحیح را مثلاً روش آدامز بصورت زیر درنظر می‌گیریم

$P:\ y_{n+1}=y_n+hf_n \qquad k=1 \qquad$ آدامز بشفورث

$C:\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(f_{n+1}+f_n) \qquad k=1 \qquad$ آدامز مولتون

$a_0^*=1,\ b_1^*=1 \quad a_1=1,\ b_0=\frac{1}{2},\ b_1=\frac{1}{2}$

بنابر آنچه که قبلاً داشتیم

$$y_{n+1}=\frac{1+\left(\frac{h\lambda}{2}\right)^m}{1-\frac{h\lambda}{2}}\left(\left(1+\frac{h\lambda}{2}\right)y_n\right)+\left(\frac{h\lambda}{2}\right)^m(1+h\lambda)y_n$$

$$(1)\quad y_{n+1}=y_n\left(\frac{1+\frac{h\lambda}{2}-2\left(\frac{h\lambda}{2}\right)^{m+2}}{1-\frac{h\lambda}{2}}\right)y_n$$

$$(2)\quad y(t_{n+1}) = y_n \left(\frac{1+\frac{h\lambda}{2} - 2\left(\frac{h\lambda}{2}\right)^{m+2}}{1-\frac{h\lambda}{2}}\right) y(t_n) + T_n$$

درمقایسه با جواب دقیق

به طوری که T_n مجموع خطای برشی دو روش Exp. و Imp. است.

$$①,② \Rightarrow \varepsilon_{n+1} = \left(\frac{1+\frac{\bar h}{2} - 2\left(\frac{\bar h}{2}\right)^{m+2}}{1-\frac{\bar h}{2}}\right)\varepsilon_n - T_n \qquad (3)$$

از طرفی اگر در (۱) قرار دهیم

$$y_{n+1} = \varepsilon_{n+1} + y(t_{n+1})$$

$$\varepsilon_{n+1} + y(t_{n+1}) = \left(\frac{1+\frac{\bar h}{2} - 2\left(\frac{\bar h}{2}\right)^{m+2}}{1-\bar h/2}\right)\left(\varepsilon_n + y(t_n)\right)$$

با فرض $y(t_{n+1}) = e^{\bar h} y(t_n)$ داریم

$$\varepsilon_{n+1} = \left(\frac{1+\frac{\bar h}{2} - 2\left(\frac{\bar h}{2}\right)^{m+2}}{1-\bar h/2}\right)\varepsilon_n + y(t_n)\left(\frac{1+\bar h/2 - 2\left(\bar h/2\right)^{m+2}}{1-\bar h/2} - e^{\lambda h}\right)$$

درمقایسه با (۳) داریم

$$T_n = -y(t_n)\left(\frac{1+\frac{h\lambda}{2} - 2\left(\frac{h\lambda}{2}\right)^{m+2}}{1-\frac{h\lambda}{2}} - e^{\lambda h}\right)$$

ضریب $y(t_n)$

$$m=0 \rightarrow \frac{1+\frac{h\lambda}{2} - 2\left(\frac{h\lambda}{2}\right)^2}{1-\frac{h\lambda}{2}} - e^{\lambda h} = \frac{\cancel{\left(1-\frac{h\lambda}{2}\right)}(h\lambda+1)}{\cancel{1-\frac{h\lambda}{2}}} - e^{h\lambda}$$

$$m=0 \Rightarrow -\frac{h^2\lambda^2}{2} + O((h\lambda)^3)$$

$$m=1 \Rightarrow -T_n = -\frac{1}{4}(h\lambda)^3 + O((h\lambda)^4)$$

$$m=2 \Rightarrow -T_n = +\frac{1}{12}(h\lambda)^3 + O((h\lambda)^4)$$

با افزایش استفاده از تکرار اصلاحگر، اثر محسوسی در کاهش خطا دیده نمی‌شود.

جنبه های دیگر پایداری : برای آشکار شدن جنبه های دیگری از پایداری ، روش عددی را روی معادله دیفرانسیل ساده ای پیاده می کنیم و سپس نتایج بدست آمده را روی دسته های کلی از معادلات تعمیم می دهیم. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = e^{\lambda(t-t_0)} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$y(t_n) = y_0 e^{\lambda(t_n - t_0)} = e^{\lambda n h} = e^{\bar{h} n} \quad , \quad \lambda h = \bar{h}$$

با استفاده از $y' = \lambda y$ در روش چندگامی زیر داریم

$$y_{n+1} = \sum_{i=1}^{k} a_i y_{n-i+1} + \lambda h \sum_{i=0}^{k} b_i y_{n-i+1}$$

جواب واقعی را بصورت زیر در نظر می گیریم

$$y(t_{n+1}) = \sum_{i=1}^{k} a_i y(t_{n-i+1}) + \lambda h \sum_{i=0}^{k} b_i y(t_{n-i+1}) + T_n$$

قسمت همگن معادله را در نظر می گیریم. (با یادداشت های گذشته عمل می کنیم)

$$\left(\rho(E) - \bar{h}\,\sigma(E)\right)\varepsilon_{n-k+1} + T_n = 0$$

$$\left(\rho(E) - \bar{h}\,\sigma(E)\right)\varepsilon_{n-k+1} = 0$$

صورت همگن معادله

فرض کنیم که جواب صورت همگن $\varepsilon_n = A\xi^n$ است ، بدیهی است در اینصورت

$$A\left(\rho(\xi) - h\lambda\,\sigma(\xi)\right)\xi^{n-k+1} = 0 \Rightarrow \rho(\xi) - h\lambda\,\sigma(\xi) = 0 \quad (2)$$

بنابراین کلیه جواب صورت همگن ریشه های معادله (۲) است.

همچنین اگر فرض کنیم $T_n = T$ یک جواب خاص از معادله غیر همگن بصورت زیر خواهد بود:

$$\varepsilon_n = C \Rightarrow C = \sum a_i C + \bar{h} \sum b_i C - T_n$$

$$\Rightarrow C = \frac{-T_n \text{ ثابت}}{1 - \sum a_i - \bar{h} \sum b_i}$$

با فرض سازگاری داریم $\rho(1) = 0$ و $\rho'(1) = b(1)$ بنابراین

$$\rho(1) = 1 - \sum a_i = 0 \quad , \quad \sum b_i = b(1) = \rho'(1)$$

$$C = \frac{-T_n \text{ ثابت}}{-\bar{h}\,\rho'(1)} = \frac{T_n \text{ ثابت}}{\bar{h}\,\rho'(1)}$$

اکنون اگر فرض کنیم تحت همگن دارای جوابهای متمایز ξ_{1h} و ξ_{2h} و ... ξ_{kh} باشد جواب کلی بصورت زیر خواهد بود

$$\varepsilon_n = A_1 \xi_{1h}^n + \cdots + A_k \xi_{kh}^n + \frac{T}{\bar{h}\,\rho'(1)}$$

بطوریکه A_1 ، A_2 ، ... ، A_k ثابتهایی هستند که توسط $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k1}$ تعیین میشوند

درصورتیکه ریشه ها متمایز نباشد، مثلا ریشه ها بصورت $\eta_h^{(m)} = \xi_{1h} = \xi_{2h} = \cdots = \xi_{mh}$ باشند جواب بصورت

$$\varepsilon_n = (A_1 + nA_2 + \cdots + n^{(m-1)} A_m)\,\eta_h^{(m)} + \cdots$$

خواهد بود. در ادامه حالت متمایز بودن ریشه ها را در نظر میگیریم.

به معادله اول برمیگردیم:

$$(*) \quad \left(\rho(E) - \bar{h}\, b(E)\right) y_{n-k+1} = 0$$

ریشه های این معادله همان ریشه های معادله $\rho(\xi) - \bar{h}\, b(\xi) = 0$ است.

پس میتوان نوشت:

$$y_n = B_1 \xi_{1h}^n + B_2 \xi_{2h}^n + \cdots + B_k \xi_{kh}^n$$

فرض کنیم $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ توسط k مقدار اولیه $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ تعیین می‌شوند. جواب واقعی مسئله $y_n = e^{\bar{h} n}$ است. $\bar{h}_n$

مقایسه این جواب با (۲۳) نشان می‌دهد که به ازای هر n یکی از جوابها به $e^{\bar{h} n}$ و دیگر تا صفر میل خواهند نمود. ریشه حاکم $\zeta_{1h}^{n} \to e^{\bar{h} n}$. این ریشه را ریشه اصلی و بقیه را Parasitic (اضافی) یا extraneous نامیده می‌شوند.

سعی می‌کنیم برای اکتشاف تقریب مناسبتر باشد اثر سایر ریشه‌ها را کم کنیم.

ریشه‌های معادل $\rho(\zeta) - \bar{h}\, b(\zeta) = 0$ به ریشه‌های $\rho(\zeta)$ در $h \to 0$ میل خواهند نمود. بنابراین $\zeta_{jh} \to \zeta_j$. پس برای مقادیر کوچک h داریم

$$\zeta_{jh} = \zeta_j \left(1 + k_j \bar{h} + o(\bar{h}^2)\right)$$

فرض کنیم k_j ها را ضریب رشد نامیده می‌شوند.

برای محاسبه k_j به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\rho(\zeta) - \bar{h}\, b(\zeta) = 0$$

$$\rho\left(\zeta_j (1 + k_j \bar{h} + o(\bar{h}^2))\right) + \bar{h}\, b\left(\zeta_j (1 + k_j \bar{h} + o(\bar{h}^2))\right) = 0$$

$$\zeta_j^k \left(1 + k_j \bar{h} + o(\bar{h}^2)\right)^k - \sum a_j \zeta_j^{k-j} \left(1 + k_j \bar{h} + o(\bar{h}^2)\right)^{k-j}$$
$$- \bar{h} \sum b_j \zeta_j^{k-j} \left(1 + k_j \bar{h} + o(\bar{h}^2)\right)^{k-j} = 0$$

$$(*) \quad \rho(\zeta_j) + k \zeta_j^k \left(k_j \bar{h} + o(\bar{h}^2)\right)^{k-1} + k(k-1) \zeta_j^k \left(k_j \bar{h} + o(\bar{h}^2)\right)^{k-2} + \dots$$
$$+ \sum a_j \zeta_j^{k-j} \left[\left(k_j \bar{h} + o(\bar{h}^2)\right)^{k-j-1} + \dots\right] - \bar{h}\, b(\zeta_j) - \dots = 0$$

توجه:

$$\begin{cases} \rho'(\zeta) = k \zeta^{k-1} - \sum a_i (k-i) \zeta^{k-i-1} \\ k_j \zeta_j \rho'(\zeta_j) = k_j k \zeta_j^k - k_j \sum a_j (k-j) \zeta_j^{k-j} \end{cases}$$

طرفین (*) را نسبت به $\bar{h}$ مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم

$$\rho(\xi_j) = 0 \Rightarrow$$

$$k\xi_j^{k}\left(k_j\bar{h}+o(\bar{h}^2)\right)^{k-1}+\cdots+k\xi_j^{k}\left(k_j\bar{h}+o(\bar{h}^2)\right)^{1}+$$

$$-\sum a_j\xi_j^{k-i}\left[(k-j)\left(k_j\bar{h}+o(\bar{h}^2)\right)+\cdots+(k-j)\left(k_j\bar{h}+o(\bar{h}^2)\right)^{k-j}\right]$$

$$-\bar{h}\,b(\xi_j)-\cdots=0$$

ضریب $\bar{h}$: $\quad k_j k\xi_j^{k}-\sum a_j\xi_j^{k-i}(k-j)k_j-b(\xi_j)=0$

$$k_j\xi_j\rho'(\xi_j)-b(\xi_j)=0 \Rightarrow k_j=\frac{b(\xi_j)}{\xi_j\rho'(\xi_j)}$$

$$k_1=\frac{b(\xi_1)}{\xi_1\rho'(\xi_1)}=\frac{b(1)}{1\,\rho'(1)}=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\xi_{1h}\longrightarrow e^{h}\ ,\quad \xi_{1h}\xrightarrow{h\to 0}\xi_1\\ h\to 0\Rightarrow \xi_{1h}\longrightarrow 1\end{array}\right\}\Rightarrow \xi_1=1 \quad \Rightarrow k_1=1$$

سازگاری $\rho'(1)=b(1)$

از طرف دیگر :

$$\xi_{1h}=\xi_1\left(1+k_1\bar{h}+o(\bar{h}^2)\right)$$

$$\xi_{1h}=1+\bar{h}+o(\bar{h}^2)$$

تعریف : روش چندگامی خطی همگرای تعریف شده در قسمت قبل را بطور قوی پایدار گوئیم هرگاه $\forall j,\ j\neq 1,\ |\xi_j|<1$

و بطور قوی ناپایدار است هرگاه $\exists j,\ |\xi_j|>1$ یا ریشه تکراری با اندازه 1 موجود باشد.

بطور ضعیف پایدار است هرگاه $\exists j \neq 1$ بطوریکه $|\xi_j|=1$ و بطور قوی ناپایدار نباشد

تعاریف فوق منطبق بر $\varepsilon_n = A_1\xi_{1h}^n + \dots + A_k\xi_{kh}^n$ است چرا اگر $|\xi_j|>1$ زوج

ناپایدار است در $\begin{cases} n \to \infty \\ \varepsilon_n \to \infty \end{cases}$ و در ریشه تکراری $\varepsilon_n = (A_1 + nA_2 + \dots)$ نیز همین است.

تعریف: (ناحیه پایداری مطلق): ناحیه‌ای در صفحه $\bar{h}$ مختلط است که

$$|\xi_{jh}| \le 1 \ , \quad j=1,2,\dots,k$$

ناپایدار است روش بطور مطلق پایدار ناحیه را گویند.

تعریف: یک روش چندگامی خطی A-stable است هرگاه ناحیه پایداری مطلق آن شامل $(-\infty, 0)$