مقدمه : معادلات دیفرانسیل درحالت کلی به دو دستهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی (تابع y تنها وابسته به یک متغیر) و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (تابع وابسته به بیش از یک متغیر است .) تقسیم می‌شوند . حل عددی دستهٔ اول که در حالت کلی بصورت

$$L[y] = f, \qquad (1)$$

نمایش داده می‌شود و L اپراتور دیفرانسیل است ، از مسائل مهم دانشمندان است .
رتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل ، بزرگترین مشتق موجود در معادله است . درصورتیکه $y(x)$ در خودش یا مشتقاتش ضرب شود ، معادله غیرخطی و در غیر اینصورت معادلهٔ دیفرانسیل را خطی می‌نامند ، که می‌توان آنرا بصورت زیر نمایش داد :

$$L[y] = \sum_{p=0}^{m} f_p(t)\, y^{(p)}(t) = f(t)$$

ضرایب $f_p(t)$ و تابع $f(t)$ معلوم هستند .
جواب معادلهٔ دیفرانسیل رتبهٔ m ، بستگی به m ثابت دارد که بایستی با توجه به شرایط معادله تعیین گردد . درصورتیکه این شرایط در نقطهٔ ابتدایی دامنه بیان شود ، شرایط را اولیه می‌نامند و معادلهٔ مفروض را معادلهٔ دیفرانسیل با شرایط اولیه می‌نامند . Initial Value Problem

$$\begin{cases} y^{(m)}(t) = f(t, y_0, y', \ldots, y^{(m-1)}(t)) \\ y^{(p)}(t_0) = y_0^{(p)}, \quad p = 0, 1, \ldots, m-1. \end{cases}$$

در صورتیکه شرایط در بیش از یک نقطه بیان شود، آنرا یک معادله دیفرانسیل با مقدار مرزی یا mix (مخلوط) می‌نامند.

مثال)
$$\begin{cases} y''(x) + xy'(x) = x^2 - 1, & x \in [0,1] \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$
Initial Value Problem
I.V.P.

$$\begin{cases} y'''(x) - e^x y(x) = 1, & x \in [0,1] \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = -1 \end{cases}$$
Boundary Value Problem
B.V.P.

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) + y(x) = x e^x, & x \in [0,1] \\ y(0) = 0 \\ y(\frac{1}{2}) = -1 \end{cases}$$
Mixed Value Problem
M.V.P.

هر معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی m را می‌توان بصورت دستگاهی از معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول تبدیل نمود. یعنی:

$$\begin{aligned} y &= v_1 \Rightarrow \\ y' &= v_2 \Rightarrow \\ &\vdots \\ y^{(m-1)} &= v_m \end{aligned} \quad \begin{cases} y' = v_1' = v_2 \\ v_2' = v_3 \\ \vdots \\ v_{m-1}' = v_m \end{cases} ,$$

$$y^{(m)} = v_m' = f(t, v_1, v_2, \ldots, v_m)$$

$$v_1(t_0) = y(t_0) = y^{(0)}(t_0) = y_0^{(0)}$$
$$v_2(t_0) = y'(t_0) = y^{(1)}(t_0) = y_0^{(1)}$$
$$\vdots$$
$$v_m(t_0) = y^{(m-1)}(t_0) = y_0^{(m-1)}$$

با تعریف: $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{cases} V' = F \\ V(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

بطوریکه

$$F = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \\ f(t, v_1, \dots, v_m) \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} y_0^{(0)} \\ y_0^{(1)} \\ \vdots \\ y_0^{(m-1)} \end{bmatrix}.$$

بنابراین، ما ابتدا روی روشهای عددی حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول تمرکز می‌شویم سپس آنرا به حل دستگاه فوق یا معادلات مرتبه بالاتر تعمیم می‌دهیم.

قضیه: فرض کنیم تابع $f(t, y(t))$ تابعی حقیقی و پیوسته روی نوار $t \in [t_0, b]$ و $y \in \mathbb{R}$ باشد و ثابت L (ثابت لیپ‌شیتس) چنان موجود باشد، بطوریکه:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le L |y_1 - y_2|, \quad \forall t \in [t_0, b], \; y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

در اینصورت مسئله مقدار اولیه مفروض برای هر $t \in [t_0, b]$ و هر مقدار اولیه y_0 دارای جواب یکتاست.

اثبات: کتاب Boice

تذکر: در صورتیکه $f(t, y(t))$ دارای مشتق کراندار نسبت به y باشد، با استفاده از قضیه مقدار میانگین براحتی می‌توان نشان داد که در شرط لیپ‌شیتس صدق می‌کند و بنابراین شرایط فوق برقرار است. بنابراین در ادامه فرض می‌کنیم $f(t, y)$ دارای مشتق کراندار نسبت به y است. یعنی:

$$f(t, y_1) - f(t, y_2) = f_y(t, c)(y_1 - y_2), \quad \exists c \in (y_1, y_2)$$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |f_y(t, c)| \, |y_1 - y_2|$$

$$\le M |y_1 - y_2|$$

با فرض: $|f_y(t, c)| \le M$

روشهای عددی : الگوریتمهایی که توسط آنها معادلهٔ دیفرانسیل (۲) ، جوابهای تقریبی در نقاط متساوی الفاصله (یا با فواصل متغیر) تولید می کنند ، روشهای عددی نامیده می شوند و این نقاط را نقاط گرهی یا نقاط شبکه ای می نامند .

Net Points	نقاط شبکه
Mesh Points	نقاط پرش
Grid Points	نقاط گرهی
Nodal Points	نقاط گرهی

بطوریکه در نقاط گرهی متساوی الفاصله داریم :

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h = t_0 + ih, & i = 0, \ldots, n-1 \\ t_n = b \end{cases}$$

که h اندازهٔ گام (step size) نامیده می شود .

در ادامهٔ مطالب فصل اول کتاب ، به توصیف پایداری ، سازگاری و همگرایی روش سری تیلور می پردازد (در مثالهایی) . در فصل دوم و سوم تمامی این مطالب مرور می گردد . بنابراین به فصل دوم می پردازیم .

فصل دوم

روشهای تک گامی :

Single step methods

یک روش تک گامی برای حل معادلهٔ دیفرانسیل

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, b] & (1) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

روشی است که تحت آن متناظر جواب در هر گام، جواب معادله در گام بعدی بدست می آید. درحالت کلی یک روش تک گامی را می توان بصورت زیر در نظر گرفت :

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1. \qquad (2)$$

بطوریکه ϕ تابعی است وابسته به t_n و y_n در سمت راست (1) .

روش را صریح می گوئیم، اگر y_{n+1} در سمت راست (2)، ظاهر نشود، در غیراینصورت آنرا ضمنی می گوئیم .

$$\begin{cases} \text{Explicit method} \\ \text{Implicit method} \end{cases}$$

رابطهٔ دقیق بین $y(t_n)$ و $y(t_{n+1})$ را بصورت زیر نمایش می دهیم :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\phi(t_n, y(t_n), h) + T_n, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

بطوریکه T_n خطای برشی روش نامیده می شود .

بزرگترین عدد صحیح p بطوریکه $|h^{-1}T_n| = O(h^p)$ ، مرتبهٔ روش تک گامی نامیده می شود .

تعریف: روش تک گامی فوق را منظم گوییم هرگاه تابع $\Phi(t,y,h)$ روی $t\in[t_0,b]$، $y\in\mathbb{R}$ و $h\in(0,h_0]$ پیوسته باشد و

عدد ثابت L وجود داشته باشد، بطوریکه

$$|\Phi(t,y_1,h)-\Phi(t,y_2,h)|\leq L|y_1-y_2|$$

$$\forall t\in[t_0,b],\quad y_1,y_2\in\mathbb{R},\quad h\in(0,h_0]$$

تعریف: روش تک گامی فوق را سازگار گوییم هرگاه: $\Phi(t,y,0)=f(t,y)$

قضیه: یک شرط لازم وکافی برای همگرایی روش تک گامی منظم واز رتبه P فوق سازگاری است.

اکنون می خواهیم تابع Φ روش تک گامی (۲) را به صورتهای مختلف تعیین نماییم:

۱) روش بسط تیلور:

Taylor series method

فرض کنیم معادله دیفرانسیل (۱) دارای یک جواب منحصر بفرد $y(t)$ روی $[t_0,b]$ است و $y(t)\in C^{P+1}[t_0,b]$ با $P\geq 1$. درانصورت $y(t)$ بصورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$y(t_{n+1})=y(t_n)+hy'(t_n)+\frac{h^2}{2!}y''(t_n)+\dots+\frac{h^P}{P!}y^{(P)}(t_n)+\frac{h^{P+1}}{(P+1)!}y^{(P+1)}(\xi_n)$$

بطوریکه: $\xi_n\in(t_n,t_{n+1})$.

با داشتن مقدار $y(t_n)$ در هر گام، مقدار $y(t_{n+1})$ بدست می آید.
مقادیر $y'(t_n)$ و ... و $y^{(P)}(t_n)$ را به کمک رابطه‌ی (۱) تعیین می کنیم.
این روش را، روش سری تیلور از مرتبه‌ی P می نامند.

با جایگذینی $P=1$ در رابطه‌ی فوق:

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n = y_n + h f(t_n, y_n)$$

که روش اویلر نامیده می شود.

خطای این روش:

$$T_n = \frac{h^{P+1}}{(P+1)!} y^{(P+1)}(\xi_n), \quad t_n < \xi_n < t_{n+1}$$

درصورتیکه برای تابع f داشته باشیم:

$$|f^{(P)}(\xi_n, y(\xi_n))| < M$$

و بخواهیم خطا کمتر از ε باشد، می نویسیم:

$$h^{P+1} |y^{(P+1)}(\xi_n)| < \varepsilon (P+1)!$$

$$h^{P+1} < \frac{\varepsilon (P+1)!}{M}$$

که به کمک آن P و h محاسبه می گردد:

مثال) اگر بخواهیم در روش سری تیلور خطا کمتر مساوی $\varepsilon = 10^{-10}$ باشد،
h و P را باید چگونه انتخاب کنیم:

$$\begin{cases} y'(t) = -t + y(t), \quad t \in [0,1] \\ y(0) = 1, \quad |y(t)| \leq 2 \end{cases}$$

$$y''(t) = -1 + y'(t) = -1 - t + y(t) \Rightarrow |y^{(P)}(t)| \leq 4$$

$$y'''(t) = y''(t), \quad y^{(P)}(t) = y''(t)$$

$$h^{P+1} < \frac{\varepsilon (P+1)!}{4} \xrightarrow{\text{تعیین می گردد}} h, P$$

همگرایی: در این قسمت همگرایی روش سری تیلور را مورد بحث قرار می‌دهیم:

فرض کنیم:

(۱) تابع $\phi(t,y,h)$ در شرط لیپ شیتس نسبت به y صدق کند یعنی:

$$\exists L,\quad |\phi(t,z_1,h)-\phi(t,z_2,h)| \le L|z_1-z_2|$$

$$\forall t\in[t_0,b],\ \forall z_1,z_2\in \mathbb{R}$$

(۲) $y^{(p+1)}(t)$ روی $t\in[t_0,b]$، کراندار و پیوسته باشد. یعنی

$$|y^{(p+1)}(t)| < M_{p+1}$$

در اینصورت به کمک لم زیر نشان می‌دهیم، روش سری تیلور با شرایط فوق، همگراست.

لم: هرگاه w_0 و w_1 و ... دنباله‌ای از اعداد حقیقی شرکت کننده در رابطه

$$w_n \le (1+a)w_{n-1} + B,\qquad n=1,2,3,\dots$$

باشد و $w_0=0$، در اینصورت

$$w_n \le B\,\frac{e^{na}-1}{a},\quad n=1,2,\dots$$

اثبات: با جایگزینی توام داریم:

$$w_n \le (1+a)\left[(1+a)w_{n-2}+B\right]+B$$

$$=(1+a)^2 w_{n-2} + B\left\{1+(1+a)\right\}$$

با ادامه جایگزینی داریم:

$$w_n \le (1+a)^n w_0 + B\left[1+(1+a)+\dots+(1+a)^{n-1}\right]$$

با $w_0=0$ داریم:

$$w_n \le B\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(1+a)^i\times\{(1+a)-1\}}{\{(1+a)-1\}} = B\,\frac{(1+a)^n-1}{a}$$

$$(1+a)^n \le (e^a)^n \Rightarrow w_n \le B\,\frac{e^{na}-1}{a},\qquad n=1,2,\dots$$

قضیه: خطای روش تیلور از مرتبه p، تحت شرایط (۱) و (۲) فوق، در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{h^p}{(p+1)!} M_{p+1} \left\{ \frac{e^{Lnh}-1}{L} \right\}$$

اثبات: در روش سری تیلور داریم:

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h)$$

در شکل دقیق داریم:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\phi(t_n, y(t_n), h) + T_n$$

با تفریق دو رابطه داریم:

$$\varepsilon_{n+1} = y(t_{n+1}) - y_{n+1}$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h\left[\phi(t_n, y(t_n), h) - \phi(t_n, y_n, h)\right] + T_n$$

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq |\varepsilon_n| + hL|y(t_n) - y_n| + |T_n|$$

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq |\varepsilon_n| + hL|\varepsilon_n| + |T_n|$$

$$= (1+hL)|\varepsilon_n| + |T_n|$$

اکنون با فرض آنکه $B = |T_n|$ و $hL = a$ داریم: (لم قبل)

$$|\varepsilon_n| \leq (1+hL)^n|\varepsilon_0| + |T_n| \frac{e^{hLn}-1}{hL}$$

در روش سری تیلور: $|T_n| = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}|y^{(p+1)}(\xi)|$, $\quad \xi \in (t_n, t_{n+1})$

بنابراین با $\varepsilon_0 = 0$ داریم:

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}|y^{(p+1)}(\xi)| \frac{e^{hLn}-1}{hL}$$

با شرط (۲) یعنی کرانداری $y^{(p+1)}$ داریم:

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{h^p}{(p+1)!\,L} M_{p+1}\left(e^{LC}-1\right)$$

$hn = C$ طول بازه

بدیهی است در $h \to 0$ داریم $\varepsilon_n \to 0$ و روش همگراست.

Runge-Kutta methods

روشهای رانگ-کوتا

در این روشها نیز که در این فصل از نوع روشهای تک گامی هستند، داریم:

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h)$$

در این روش تابع ϕ بصورت

$$\phi(t_n, y_n, h) = \sum_{i=1}^{m} w_i\, k_i(t_n, y_n, h)$$

درنظرگرفته می‌شود. روشهای رانگ-کوتا مبتنی بر m مرحله (m-Stages) هستند. یک روش رانگ-کوتای m مرحله‌ای را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(t_n + c_2 h,\ y_n + a_{21}k_1)$$

$$k_3 = hf(t_n + c_3 h,\ y_n + a_{31}k_1 + a_{32}k_2)$$

$$\vdots$$

$$k_m = hf(t_n + c_m h,\ y_n + a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \cdots + a_{m,m-1}k_{m-1})$$

$$y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 + \cdots + w_m k_m$$

با شرایط:

$$c_2 = a_{21}$$

$$c_3 = a_{31} + a_{32}$$

$$\vdots$$

$$c_m = a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{m,m-1}$$

هدف تعیین پارامترهای مجهول $\{a_{ij}\}_{\substack{i=2,\dots,m\\ j=1,\dots,i-1}}$ و $\{w_i\}_{i=1}^{m}$ و $\{c_i\}_{i=2}^{m}$ با شرایط فوق است بطوریکه y_{n+1} تا جای ممکن منطبق بر $y(t_{n+1})$ باشد.