در ساده‌ترین حالت $m=2$ ، روش را توصیف می‌کنیم:

روش رانگ-کوتای ۲ مرحله‌ای و از مرتبه دوم:

Two stages-Two order Runge-Kutta method

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$
$$k_2 = hf(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1)$$
$$y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2$$

$c_2 = a_{21}$ با شرط

برای تعیین پارامترهای مجهول c_2 ، a_{21} ، w_1 و w_2 بسط تیلور $y(t_{n+1})$ را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + (t_{n+1}-t_n)\,y'(t_n) + \frac{(t_{n+1}-t_n)^2}{2!}\,y''(t_n) + \frac{(t_{n+1}-t_n)^3}{3!}\,y'''_n + \frac{(t_{n+1}-t_n)^4}{4!}\,y^{(4)}_n + \cdots$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2!} y''(t_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(t_n) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(t_n) + \cdots \qquad (1)$$

از طرفی:

$$y'(t_n) = f(t_n, y_n) = f$$
$$y''(t_n) = \frac{d}{dt} f(t_n, y_n) = f_t(t_n, y_n) + f_y(t_n, y_n) f(t_n, y_n) = f_t + f_y f$$
$$y'''(t_n) = \frac{d}{dt}(f_t + f_y f) = (f_{tt} + f_{ty} f) + (f_{yt} f + f_{yy} f^2) + (f_t + f_y f) f_y = f_{tt} + 2 f_{ty} f + f_{yy} f^2 + f_t f_y + f_y^2 f$$
$$\vdots$$

با جایگذاری در (1) داریم:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf + \frac{h^2}{2!}(f_t + f_y f) + \frac{h^3}{3!}(f_{tt} + 2 f_{ty} f + f_{yy} f^2 + f_t f_y + f_y^2 f) + \cdots \qquad (2)$$

اکنون از بسط تیلور تابع k_1 و k_2 کمک می‌گیریم:

$$k_1 = hf \qquad (3)$$

$$k_2 = hf(t_n + c_2 h,\ y_n + a_{21}k_1) = h\Big[f(t_n, y_n) + (t_{n+1} - t_n)f_t + (y_n + a_{21}k_1 - y_n)f_y(t_n, y_n) + \frac{(t_n + c_2 h - t_n)^2}{2!}f_{tt}(t_n, y_n) +$$
$$\frac{(y_n + a_{21}k_1 - y_n)^2}{2!}f_{yy}(t_n, y_n) + \frac{(y_n + a_{21}k_1 - y_n)(t_n + c_2 h - t_n)}{2!}f_{yt}(t_n, y_n)$$
$$+ \frac{(t_n + c_2 h - t_n)(y_n + a_{21}k_1 - y_n)}{2!}f_{ty}(t_n, y_n) + \frac{(t_n + c_2 h - t_n)^3}{3!}f_{ttt}(t_n, y_n) + \cdots\Big]$$

با ساده‌سازی داریم:

$$k_2 = hf + c_2 h^2 f_t + a_{21}h^2 f_y f + c_2^2 \frac{h^3}{2} f_{tt} + a_{21}^2 \frac{h^3}{2} f^2 f_{yy} + a_{21}c_2 h^3 f_{ty} f + c_2^3 h^4 f_{ttt} + \cdots \qquad (4)$$

با جایگذاری (3) و (4) در $y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2$ داریم: $(a_{21} = c_2)$

$$y_{n+1} = y_n + hw_1 f + w_2\Big[hf + c_2 h^2 f_t + a_{21}h^2 f_y f + c_2^2 \frac{h^3}{2} f_{tt} + a_{21}^2 \frac{h^3}{2} f^2 f_{yy} + a_{21}c_2 h^3 f_{ty} f + c_2^3 h^4 f_{ttt} + \cdots\Big]$$

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1 + w_2)f + h^2 w_2 c_2 (f_t + f f_y) + w_2 c_2^2 \frac{h^3}{2}\left[f_{tt} + f^2 f_{yy} + 2 f_{ty} f\right] + c_2^3 h^4 f_{ttt} + \cdots \qquad (5)$$

با مقایسه (5) و (2) داریم:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ c_2 w_2 = \frac{1}{2} \\ a_{21} = c_2 \end{cases}$$

که یک دستگاه با ۳ معادله و ۴ مجهول است.

با دادن یک مقدار اختیاری به یکی از آنها روشهای مختلف رانگ - کوتا تشکیل می‌دهیم.

انواع مختلف روش رانگ - کوتای ۲ مرحله ای :

$$\begin{cases} w_1 = w_2 = \frac{1}{2} \\ c_2 = a_{21} = 1 \end{cases}$$

Euler-Cauchy روش اویلر-کوشی

Hune یا هیون

Advanced Euler یا اویلر پیشرفته

$$\begin{cases} c_2 = a_{21} = \frac{1}{2} \\ w_2 = 1 ,\ w_1 = 0 \end{cases}$$

Improved Euler اویلر اصلاح شده

$$\begin{cases} c_2 = \frac{2}{3} = a_{21} \\ w_1 = \frac{1}{4} ,\ w_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Euler روش اویلر

optimal روش بهینه

مقادیر فوق را در جدولی تحت عنوان جدول بوچر Butcher Table قرار میدهند

$$\begin{array}{c|cc} & w_1 & w_2 \\ \hline c_2 & a_{21} & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \hline \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \end{array}$$

Hune Improved Euler

جدول بوچر در حالت کلی :

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & & \\ c_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \\ \hline & & & & \end{array}$$

تحلیل خطا : اگر تعریف شیم (رابطه (۲) و (۵)) :

$$T_n = y(t_{n+1}) - y_{n+1} = y(t_n) + hf + \frac{h^2}{2!}(f_t + f_y f) + \frac{h^3}{3!}(f_{tt} + \cdots + f_y^2 f) + \cdots$$
$$- \left[y(t_n) + hf + \frac{h^2}{2}(f_t + f f_y) + \frac{h^3}{4} c_2 [f_{tt} + \cdots] + \cdots \right]$$

$$T_n = \frac{h^3}{12}(2 f_{tt} - 3 c_2 f_{tt} + \cdots) + \cdots \qquad (6)$$

$$T_n = O(h^3) \Rightarrow \left(\frac{T_n}{h}\right) = O(h^2)$$

مرتبه روش : $P = 2$

برای کاهش ناچیز T_n ، می‌توان $2-3c_2=0$ انتخاب نمود. در اینصورت $c_2=\frac{2}{3}$. به همین ترتیب $w_1=\frac{1}{4}$ و $w_2=\frac{3}{4}$ و $a_{21}=\frac{2}{3}$. به همین دلیل روش را بهینه یا optimal می‌گویند.

روش رانگ-کوتای ۳ مرحله‌ای از رتبهٔ سوم:

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$
$$k_2 = hf(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1)$$
$$k_3 = hf(t_n + c_3 h, y_n + a_{31} k_1 + a_{32} k_2)$$
$$y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3$$

با شرایط

$$c_2 = a_{21}$$
$$c_3 = a_{31} + a_{32}$$

همانند بخش قبل بسط تیلور $y(t_{n+1})$ را با بسط تیلور y_{n+1} که در آن k_2 و k_3 بسط داده شده‌اند، مقایسه می‌کنیم. در اینصورت:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 1 \\ c_2 a_{32} w_3 = \frac{1}{6} \\ c_2^2 w_2 + c_3^2 w_3 = \frac{1}{3} \\ c_2 w_2 + c_3 w_3 = \frac{1}{2} \\ c_2 = a_{21} \\ c_3 = a_{31} + a_{32} \end{cases}$$

که شش معادله با ۸ مجهول است. با انتخاب دو مقدار اختیاری بقیهٔ آنها بدست می‌آیند.

$$\left(\frac{T_n}{h}\right) = O(h^3)$$

مرتبهٔ روش $p=3$

c_2	c_3	a_{21}	a_{31}	a_{32}	w_1	w_2	w_3	
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	Nystrom method
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	Nearly optimal
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	classical
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	هیون

روش رانگ - کوتای مرتبهٔ چهارم را نیز که چهار مرحله‌ای است به همین ترتیب تولید می‌کنیم.

همگرایی روش رانگ-کوتا : برای اثبات همگرایی روش باید نشان دهیم :

۱) روش سازگار است.

۲) روش منظم است.

برای نمونه روش رانگ- کوتای ۲ مرحله‌ای را بصورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$\begin{cases} K_1 = h f(t_n, y_n) \\ K_2 = h f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} K_1) \\ y_{n+1} = y_n + w_1 K_1 + w_2 K_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ c_2 w_2 = \frac{1}{2} \\ c_2 = a_{21} \end{cases}$$ با شرایط

$$y_{n+1} = y_n + w_1 h f(t_n, y_n) + w_2 h f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} K_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\,[\underbrace{w_1 f(t_n, y_n) + w_2 f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} K_1)}_{\phi(t_n, y_n, h)}]$$

۱) برای سازگاری نشان می‌دهیم :

$$\phi(t_n, y_n, 0) = f(t_n, y_n)$$

$$\phi(t_n, y_n, 0) = w_1 f(t_n, y_n) + w_2 f(t_n + 0, y_n + 0) = (w_1 + w_2) f = f$$

پس روش سازگار است.

۲) برای منظم بودن روش توجه می‌کنیم:

الف) تابع $\Phi(t_n,y_n,h)$ ترکیب خطی از f است. شرط وجود و یکتایی جواب معادله دیفرانسیل $y'(t)=f(t,y(t))$ ایجاب می‌نماید که f پیوسته باشد. چون Φ برحسب تابع پیوسته f نوشته شده، پس پیوسته است. (روی نوار $t\in[t_0,b]$ ، $y\in\mathbb{R}$ و $h\in(0,h_0]$)

ب) تابع Φ در شرط لیپ‌شیتس نسبت به y صدق می‌کند، زیرا:

$$|\Phi(t,y_1,h)-\Phi(t,y_2,h)| = |w_1 f(t,y_1)+w_2 f(t+c_2h,\, y_1+a_{21}k_1^{(1)})$$
$$-w_1 f(t,y_2)-w_2 f(t+c_2h,\, y_2+a_{21}k_1^{(2)})|$$

که در آن $k_1^{(1)}=hf(t_n,y_{1n})$ و $k_2^{(2)}=hf(t_n,y_{2n})$.

$$|\Phi(t,y_1,h)-\Phi(t,y_2,h)| \le |w_1|\,|f(t,y_1)-f(t,y_2)|$$
$$+|w_2|\,|f(t+c_2h,\, y_1+a_{21}k_1^{(1)})-f(t+c_2h,\, y_2+a_{21}k_1^{(2)})|$$
$$\le |w_1|L|y_1-y_2|+|w_2|L|y_1+a_{21}k_1^{(1)}-y_2-a_{21}k_1^{(2)}|$$
$$\le |w_1|L|y_1-y_2|+|w_2|L\left[|y_1-y_2|+|a_{21}|\,|k_1^{(1)}-k_1^{(2)}|\right]$$
$$|w_1|L|y_1-y_2|+|w_2|L|y_1-y_2|+|a_{21}|h|y_1-y_2|L$$
$$=\underbrace{\left[|w_1|+|w_2|+h|a_{21}|\right]L}_{L^*}|y_1-y_2| = L^*|y_1-y_2|$$

که در روابط فوق از لیپ‌شیتس بودن f استفاده نمودیم و ثابت کردیم Φ لیپ‌شیتس است. بنابراین روش منظم است.

منظم بودن و سازگار بودن روش، بنابر قضیه، همگرایی روش را نشان می‌دهد.

روش رانگ-کوتای ضمنی :

در حالت کلی یک روش رانگ-کوتای ضمنی را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$k_1 = hf(t_n + c_1 h,\ y_n + a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \dots + a_{1m}k_m)$$

$$k_2 = hf(t_n + c_2 h,\ y_n + a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{2m}k_m)$$

$$\vdots$$

$$k_m = hf(t_n + c_m h,\ y_n + a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \dots + a_{mm}k_m)$$

$$y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 + \dots + w_m k_m$$

با شرایط

$$c_1 = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1m}$$

$$c_2 = a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2m}$$

$$\vdots$$

$$c_m = a_{m1} + a_{m2} + \dots + a_{mm}$$

هدف تعیین پارامترهای $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,m}$ و $\{w_i\}_{i=1,\dots,m}$ و $\{c_i\}_{i=1,\dots,m}$ بطوری که y_{n+1} تا جای ممکن منطبق بر $y(t_{n+1})$ باشد. برای تعیین این پارامترها و توصیف روش، یک روش ضمنی دو مرحله‌ای را بصورت زیر در نظر بگیرید:

روش رانگ-کوتای ضمنی با $m=2$:

$$k_1 = hf(t_n + c_1 h,\ y_n + a_{11}k_1 + a_{12}k_2)$$

$$k_2 = hf(t_n + c_2 h,\ y_n + a_{21}k_1 + a_{22}k_2)$$

$$y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2$$

$$\begin{cases} c_1 = a_{11} + a_{12} \\ c_2 = a_{21} + a_{22} \end{cases}$$ با شرایط :

بسط تیلور تابع $y(t)$ را مانند قبل یادآوری می‌کنیم:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2!} y''(t_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(t_n) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(t_n) + \cdots$$

توجه می‌کنیم:

$$y'(t_n) = f(t_n, y_n) = f$$

$$y''(t_n) = f_t + f_y f = Df$$

$$y'''(t_n) = f_{tt} + 2f_{ty} f + f_{yy} f^2 + f_y (f_t + f_y f)$$

$$= D^2 f + f_y Df$$

$$y^{(4)}(t_n) = D^3 f + f_y D^2 f + 3 Df\, Df_y + f_y^2 Df$$

بسط تیلور k_1 و k_2 را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$k_i = h f(t_n + c_i h, y_n + a_{i1} k_1 + a_{i2} k_2) =$$

$$= h \Big[f + c_i h f_t + (a_{i1} k_1 + a_{i2} k_2) f_y + c_i^2 \frac{h^2}{2!} f_{tt} +$$

$$\frac{(a_{i1} k_1 + a_{i2} k_2)^2}{2!} f_{yy} + c_i h (a_{i1} k_1 + a_{i2} k_2) f_{ty} +$$

$$\frac{c_i^3 h^3}{3!} f_{ttt} + \frac{(a_{i1} k_1 + a_{i2} k_2)^3}{3!} f_{yyy} + \frac{3 c_i^2 h^2 (a_{i1} k_1 + a_{i2} k_2)}{3!} f_{tty}$$

$$+ \frac{3 c_i h (a_{i1} k_1 + a_{i2} k_2)^2}{3!} f_{yyt} + \cdots$$

به دلیل اینکه تابع k_1 و k_2 در طرفین رابطه فوق ظاهر شده و تعیین آن مشکل است، تعریف می‌کنیم:

$$k_i = h A_i + h^2 B_i + h^3 C_i + h^4 D_i + \cdots$$

و در رابطه فوق k_i را قرار می‌دهیم:

$$hA_i + h^2B_i + h^3C_i + h^4D_i + \cdots = hf + h^2 c_i f_t +$$
$$h a_{i1}(hA_1 + h^2B_1 + h^3C_1 + h^4D_1 + \cdots) f_y + h a_{i2}(hA_2 + h^2B_2 +$$
$$h^3C_2 + h^4D_2 + \cdots) f_y + c_i^2 \frac{h^3}{2} f_{tt} + \frac{h a_{i1}^2}{2}(hA_1 + h^2B_1 +$$
$$h^3C_1 + h^4D_1 + \cdots)^2 f_{yy} + h a_{i2}^2 (hA_2 + h^2B_2 + h^3C_2 + h^4D_2 + \cdots)^2 f_{yy}$$
$$+ 2h a_{i1} a_{i2}(hA_1 + h^2B_1 + h^3C_1 + h^4D_1 + \cdots)(hA_2 + h^2B_2 +$$
$$h^3C_2 + h^4D_2 + \cdots) f_{yy} + f_{ty} c_i h^2 a_{i1}(hA_1 + h^2B_1 + h^3C_1 + h^4D_1 + \cdots)$$
$$+ c_i h^2 a_{i2} f_{ty}(hA_2 + h^2B_2 + h^3C_2 + h^4D_2 + \cdots) + \frac{c_i^3 h^3}{6} f_{ttt} +$$
$$\cdots$$

با مقایسه طرفین رابطه فوق داریم:

$$A_i = f$$
$$B_i = c_i f_t + (a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2) f_y = c_i f_t + f(a_{i1} + a_{i2}) f_y$$
$$= c_i (f_t + f f_y)$$
$$= c_i Df$$
$$C_i = (a_{i1}B_1 + a_{i2}B_2) f_y + \frac{1}{2} c_i^2 f_{tt} + c_i(a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2) f_{ty}$$
$$+ \frac{1}{2}(a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2)^2 f_{yy}$$
$$C_i = (a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2) f_y Df + \frac{1}{2} c_i^2 D^2 f$$

به همین ترتیب،

$$D_i = [a_{i1}(a_{11}c_1 + a_{12}c_2) + a_{i2}(a_{21}c_1 + a_{22}c_2)] f_y^2 Df +$$
$$\cdots$$

با جایگزینی این مقادیر در k_i ، روابط k_i تعیین می‌گردد.