بسمه تعالی

دانشکده برق

گروه کنترل

مهلت تحویل : ۹۵/۴/۱۵

کنترل تصادفی

تمرین سری ششم

مدرس : دکتر حمید خالوزاده

سوالات منتخب کتاب (فصل ۶ از مرجع اول):

گروه ۱: ۲-۸-۱۰

گروه ۲: ۲-۹-۱۰

سوالات منتخب کتاب (فصل ۷ از مرجع اول):

گروه ۱ و گروه ۲: ۳

سوالات مشترک

۱) سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$x(n+1) = \phi x(n) + Gw(n)$$
$$z(n) = Hx(n) + v(n)$$
$$E\big(x(0)\big) = 0, E\big(v(n)\big) = 0, E\big(w(n)\big) = 0$$
$$E\big(x(0)x^T(0)\big) = \psi$$
$$E\big(v(n_1)v^T(n_2)\big) = R\delta(n_1 - n_2)$$
$$E\big(w(n_1)w^T(n_2)\big) = Q\delta(n_1 - n_2)$$
$$E\big(w(n_1)v^T(n_2)\big) = T\delta(n_1 - n_2)$$

در تمرین سری ۳ یاد گرفتید که برای دکوپله کردن نویزهای فرآیند و اندازه‌گیری در نمایش سیستم، می‌توان عبارت $GTR^{-1}\big(z(n) - Hx(n) - v(n)\big)$ را به معادله حالت اضافه کرد. با این کار، تنها نمایش سیستم دچار تغییر شده و در نمایش جدید، نویزهای فرآیند و اندازه‌گیری از هم مستقل خواهند بود. نشان دهید که معادلات فیلتر کالمن برای نمایش جدید سیستم به صورت زیر در می‌آید (تمامی پارامترها از سیستم اصلی آورده شده است).

$$J = GTR^{-1}$$
$$\hat{x}(N+1|N) = \phi\hat{x}(N|N) + J[z(N) - H\hat{x}(N|N)]$$
$$\Sigma(N+1|N) = (\phi - JH)\Sigma(N|N)(\phi - JH)^T + GQG^T - JT^TG^T$$
$$\hat{x}(N+1|N+1) = \hat{x}(N+1|N) + K(N+1)[z(N) - H\hat{x}(N+1|N)]$$
$$K(N+1) = \Sigma(N+1|N)H^T(H\Sigma(N+1|N)H^T + R)^{-1}$$
$$\Sigma(N+1|N+1) = [I - K(N+1)H]\Sigma(N+1|N)$$

برای راحتی ابتدا با فرض عدم وابستگی نویزهای فرآیند و اندازه‌گیری، اثبات کنید که صورت استاندارد فیلتر کالمن که در کلاس تدریس شده است، را می‌توان به صورت زیر نوشت. بعد از آن اثبات روابط فوق آسان خواهد بود.

$$\hat{x}(N+1|N) = \phi\hat{x}(N|N)$$
$$\Sigma(N+1|N) = \phi\Sigma(N|N)\phi^T + GQG^T$$
$$\hat{x}(N+1|N+1) = \hat{x}(N+1|N) + K(N+1)[z(N) - H\hat{x}(N+1|N)]$$
$$K(N+1) = \Sigma(N+1|N)H^T(H\Sigma(N+1|N)H^T + R)^{-1}$$
$$\Sigma(N+1|N+1) = [I - K(N+1)H]\Sigma(N+1|N)$$

۲-الف) در تمرین سری ۵ یاد گرفتید که اگر قسمتی از یک بردار تصادفی گوسی را به عنوان مشاهده در اختیار داشتیم، چگونه قسمت مجهول آن را تخمین بزنیم. از آن روش کمک گرفته و بهترین تخمین را برای نویز فرآیند غیر مستقل از نویز اندازه‌گیری به دست آورید. دقت کنید که مدل سیستم، مانند سوال قبل است.

ب) با استفاده از نتیجه قسمت الف نشان دهید که تنها تغییر معادلات فیلتر کالمن (نسبت به فرم استاندارد فیدبکی که در کلاس تدریس شده است) در این حالت (عدم تغییر نمایش سیستم به منظور دکوپله سازی نویزها)، مربوط به بهره فیلتر کالمن است که به صورت زیر در می‌آید:

$$K(N+1) = [\Sigma(N+1|N)H^T + GT]R^{-1}$$

ج) آیا فیلتر کالمن این سوال و سوال قبل با هم متفاوتند؟ راجع این قضیه به طور مستدل بحث کنید.

۳) این بار اگر نویز فرآیند در این لحظه با نویز اندازه‌گیری در لحظه بعد همبستگی داشته باشد یعنی $E\left(w(n_1)v^T(n_2)\right) = T\delta(n_1 - n_2 + 1)$، نشان دهید که معادلات فیلتر کالمن به صورت زیر خواهند شد.

$$\hat{x}(N+1|N) = \phi\hat{x}(N|N)$$
$$\Sigma(N+1|N) = (\phi - JH)\Sigma(N|N)(\phi - JH)^T + GQG^T$$
$$\hat{x}(N+1|N+1) = \hat{x}(N+1|N) + K(N+1)[z(N) - H\hat{x}(N+1|N)]$$
$$K(N+1) = (\Sigma(N+1|N)H^T + GT)(H\Sigma(N+1|N)H^T + R + HT + T^TH^T)^{-1}$$
$$\Sigma(N+1|N+1) = \Sigma(N+1|N) - K(N+1)[\Sigma(N+1|N)H^T + GT]^T$$

۴) سیستم سوال ۱ را با فرض عدم وابستگی میان نویزهای فرآیند و اندازه‌گیری در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید که نویز فرآیند کاملا ناشناخته است. تخمینگر بهینه‌ای برای تخمین نویز فرآیند ارائه دهید (راهنمایی: فرض کنید که از لحظه یک تا n+1ام مشاهده در اختیار داریم. همچنین حالت سیستم را نیز تخمین زده ایم. حال می‌خواهیم به کمک این دو، نویز فرآیند را تخمین بزنیم). در واقع تخمینگر $\hat{w}(N|N+1)$ مد نظر می‌باشد.

۵) سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$x(n+1) = \phi(n)x(n) + B(n)u(n) + G(n)w(n)$$
$$z(n+1) = H(n)x(n) + v(n)$$
$$E\{x(0)\} = m\,, E\{x(0)x^T(0)\} = \psi, E\{vv^T\} = R(n), E\{ww^T\} = Q(n)$$

برای به دست آوردن فرمول بازگشتی هموارسازی برای زمان m، با فرض ثابت بودن N ، ۳ گام را به شرح زیر طی می‌کنیم:

۱) حل مسأله فیلترینگ برای زمان mام با استفاده از داده‌های زمان‌های ۱ تا m، به کمک فیلتر کالمن

۲) حل مسأله فیلترینگ برای زمان m+1ام با استفاده از داده‌های زمان‌های N تا m+1 به صورت حل به عقب، به کمک فیلتر کالمن (با عکس ماتریس کواریانس خطای تخمین) و یک مرحله پیش‌بینی یک گام به عقب برای به دست آوردن تخمین زمان mام

۳) ترکیب ۲ تخمین انجام شده، به صورت ۲ مشاهده فیشر، برای به دست آوردن تخمین نهایی

الف) برای مرحله ۱ نشان دهید که حل مساله فیلترینگ مذکور به روابط زیر ختم می‌شود.

$$\hat{x}_f(n+1|n+1) = \phi(n)\hat{x}_f(n|n) + B(n)u(n) + K(n+1) \times \left\{z(n+1) - H(n+1)\left(\phi(n)\hat{x}_f(n|n) + B(n)u(n)\right)\right\}$$
$$K(n+1) = \Sigma(n+1|n+1)H^T(n+1)R^{-1}(n+1)$$
$$\Sigma(n+1|n+1) = \Sigma(n+1|n) - \Sigma(n+1|n)H^T(n+1) \times [H(n+1)\Sigma(n+1|n)H^T(n+1) + R(n+1)]^{-1} H(n+1)\Sigma(n+1|n)$$
$$\Sigma(n+1|n) = \phi(n)\Sigma(n|n)\phi^T(n) + G(n)Q(n)G^T(n)$$
$$\Sigma(0|0) = \psi \quad \hat{x}_f(0|0) = m$$

ب) برای مرحله ۲ نشان دهید که حل مساله فیلترینگ مذکور به روابط زیر ختم می‌شود (قبل از حل این قسمت حتما سوال فصل ۶ کتاب حل شود).

$$\hat{y}(n|n+1) = \phi^T(n)[I - K(n+1)G^T(n)]\left(\hat{y}(n+1|n+1) - S(n+1|n+1)B(n)u(n)\right)$$
$$K(n+1) = S(n+1|n+1)G(n)[G^T(n)S(n+1|n+1)G(n) + Q^{-1}(n)]^{-1}$$
$$\hat{y}(n|n) = H^T(n)R^{-1}(n)z(n) + \hat{y}(n|n+1)$$
$$S(n|n+1) = \phi^T(n)[S(n+1|n+1) - S(n+1|n+1)G(n)[G^T(n)S(n+1|n+1)G(n) + Q^{-1}(n)]^{-1}G^T(n)S(n+1|n+1)]\phi(n)$$
$$S(n|n) = H^T(n)R^{-1}(n)H(n) + S(n|n+1)$$
$$\hat{y}(N|N) = 0, S(N|N) = 0$$

ج) نشان دهید که رابطه نهایی هموارسازی به صورت زیر خواهد شد.

$$\hat{x}(m) = [S(m|m+1) + \Sigma^{-1}(m|m)]^{-1}\left(\hat{y}(m|m+1) + \Sigma^{-1}(m|m)\hat{x}_f(m|m)\right)$$

پاسخ تمام تمرینات به پست الکترونیک درس ارسال شود stochastic.control2016@gmail.com

موفق باشید: حمید علی‌خانی