فصل ۱ تعریف‌های اولیه و برخی خواص

۱.۱ مجموعه‌ها

مجموعه یکی از مفاهیم تعریف نشده در ریاضیات است. به عبارت ساده‌تر نمی‌توان تعریفی رسمی از مجموعه ارائه کرد بدون در نظر گرفتن خود مجموعه و تنها از اطلاعات قبل استفاده نمود و به هر طریقی که بخواهیم تعریفی برای مجموعه بیان کنیم، باید از مفهوم مجموعه استفاده کنیم، پس آن را می‌پذیریم.

معمولاً مجموعه‌ها را با حروف بزرگ A، B، C، ... نمایش می‌دهیم. فرض کنید A مجموعه‌ای دلخواه است که شامل عناصری است و ما آنها را با حروف کوچک a، b، c، ... نشان می‌دهیم. اگر A مجموعه‌ای دلخواه و a عضوی از آن باشد می‌نویسیم $a\in A$ در غیر این صورت گوییم a عضوی از A نیست و می‌نویسیم $a\notin A$.

تعریف ۱. فرض کنید A و B دو مجموعه‌اند. اگر هر عضو مجموعه A، عضوی از مجموعه B باشد، گوییم A زیرمجموعه B است (یا A مشمول در B است یا B شامل A است) و می‌نویسیم

$$A\subset B, \quad \text{یا} \quad B\supset A. \qquad (1)$$

مجموعه‌ای که شامل هیچ عضوی نباشد را مجموعه تهی نامیم و با نماد $\emptyset$ نمایش می‌دهیم. توجه داریم که مجموعه تهی، زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ی دلخواهی است.

دو مجموعه A و B را مساوی نامیم هرگاه شامل عناصر یکسانی باشند. به عبارت دیگر، دو مجموعه A و B مساویند در صورتی که $A\subset B$ و $B\subset A$. در این حالت می‌نویسیم $A=B$.

اگر $A\subset B$ و $A\neq B$ باشد، گوییم A زیرمجموعه محض (یا سره) B است و می‌نویسیم $A\subsetneq B$.

برای سهولت در نگارش، گاهی اوقات از نماد $A \subseteq B$ برای بیان زیرمجموعه‌ی بودن A در B استفاده می‌کنیم. در چنین حالتی، اگر A زیرمجموعه سره B باشد می‌نویسیم $A \subset B$.

حال فرض کنید P نشان دهنده‌ی خاصیتی برای خانواده یا مجموعه‌ای از عناصر است. از نماد $\{x : P\}$ برای نمایش مجموعه‌ی تمام عناصر x که در خاصیت P صدق می‌کنند استفاده می‌کنیم.

جبر مجموعه‌ها.

تعریف ۲. فرض کنید A و B دو مجموعه‌اند. اجتماع دو مجموعه‌ی A و B، مجموعه‌ای شامل تمام عناصری است که یا متعلق به A یا متعلق به B یا متعلق به هر دو می‌باشند. اجتماع دو مجموعه A و B را با $A \cup B$ نمایش داده و داریم

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ یا } x \in B\}. \qquad (۲)$$

تعریف ۳. فرض کنید A و B دو مجموعه‌اند. اشتراک دو مجموعه‌ی A و B، مجموعه‌ای شامل تمام عناصری است که به هر دوی A و B تعلق دارند. اشتراک دو مجموعه A و B را با $A \cap B$ نمایش داده و داریم

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\}. \qquad (۳)$$

تعریف ۴. فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی دلخواهند. متمم B نسبت به A، مجموعه تمام عناصری از A است که متعلق به B نباشند. متمم B نسبت به A را با $A \setminus B$ نمایش داده و آن را تفاضل دو مجموعه A و B نامیم و داریم

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ و } x \notin B\}. \qquad (۴)$$

معمولاً مجموعه‌ای شامل تمام عناصر در هر بحثی را مجموعه مرجع یا جهانی نامیم و با

U نمایش می‌دهیم. اگر A مجموعه‌ای دلخواه و U مجموعهٔ مرجع باشد، به وضوح

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A, \tag{5}$$

$$U \setminus A = \{x : x \notin A\} \tag{6}$$

$U \setminus A$ را با A^c نمایش داده و آن را متمم A نامیم.

برخی از خواص عمل‌های اجتماع و اشتراک روی مجموعه‌ها در قضیه ۵ آورده شده‌اند. اثبات این خواص به عنوان تمرین به عهده دانشجویان است.

قضیه ۵. الف) $A \cup A = A$ ، $A \cup \emptyset = A$ ، $A \cap A = A$ و $A \cap \emptyset = \emptyset$.

ب) $A \cup B = B \cup A$ ، $A \cap B = B \cap A$.

ج) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ، $(A \cap B) \cap C = (A \cap B) \cap C$.

د) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ، $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

خواص بالا به ترتیب خاصیت‌های خودتوان، جابجایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری نامیده می‌شوند.

قضیه ۶. قوانین دمورگان.

الف) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

ب) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

اثبات. الف) فرض کنید $x \in A \setminus (B \cup C)$. در نتیجه $x \in A$ ، $x \notin B \cup C$. پس $x \in A$ ، $x \notin B$ ، $x \notin C$. بنابراین $x \in A \setminus B$ و $x \in A \setminus C$. یعنی $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. برعکس، اگر $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ آنگاه $x \in A \setminus B$ و $x \in A \setminus C$. بنابراین $x \in A$ ، $x \notin B$ و $x \notin C$. پس $x \in A$ و $x \notin B \cup C$ یعنی $x \in A \setminus (B \cup C)$. پس ثابت کردیم که

$$A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$
$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cup C)$$

یعنی $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

ب) مشابه (الف) است .

نتیجه ۷. با توجه به (۹) ، اگر $U = A$ آن گاه قوانین دمرگان به صورت زیر بیان می شوند

$$(B \cup C)^c = B^c \cap C^c,$$
$$(B \cap C)^c = B^c \cup C^c.$$

تعریف ۸. فرض کنید A و B دو مجموعه ی ناتهی اند ، حاصلضرب دکارتی A و B را با $A \times B$ نمایش داده و مجموعه ی تمام زوج های مرتب (a, b) است به طوری که $a \in A$ ، $b \in B$. پس

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, \ b \in B\}.$$

مثال ۱. فرض کنید $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$. در این صورت

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3), (c,1), (c,2), (c,3), (d,1), (d,2), (d,3)\}.$$

توجه کنید که $(a,1) \in A \times B$ اما $(1,a) \notin A \times B$.

$$B \times A = \{(1,a), (1,b), (1,c), (1,d), (2,a), (2,b), (2,c), (2,d), (3,a), (3,b), (3,c), (3,d)\}.$$

توجه کنید که $(1,a) \in B \times A$ اما $(1,a) \notin A \times B$

نتیجه . لزوماً $A \times B$ و $B \times A$ با هم برابر نیستند .

۲.۱ دستگاه‌های اعداد

در این بخش، به طور کلی با اعداد حقیقی آشنا می‌شویم. تاریخچه توسعه اصولی اعداد حقیقی به اواخر صده نوزدهم برمی‌گردد. بعد از دهه هفتاد قرن نوزدهم، سه ریاضیدان که به طور مجزا ساختار اعداد حقیقی را معرفی کردند عبارت از وایراشتراوس، ددکیند و کانتور بودند و باعث تحولی عظیم در ریاضیات شدند.

ما کمیت عدد را بر پنج اصل موضوعه معرفی شده توسط ریاضیدان ایتالیایی، پیانو، برای اعداد طبیعی ۱، 2، 3، ... بنا می‌گذاریم. پیانو مجموعه اعداد طبیعی را بر پنج اصل موضوعه‌ی زیر بنیان گذاشت و ریاضیدانان معرفی شده در بالا از این اصول موضوعه برای توسعه‌ی نظریه اعداد حقیقی استفاده کردند. اصول موضوعه پیانو به شرح زیرند:

P1. 1 یک عدد طبیعی است.

P2. هر عدد طبیعی n دارای یک تالی است که با $n+1$ نمایش می‌دهیم.

P3. دو عدد طبیعی مساوی اند، درصورتی که دارای تالی‌های مساوی باشند.

P4. بجز 1، هر عدد طبیعی تالی یک عدد طبیعی است.

P5. هر زیرمجموعه از اعداد طبیعی که شامل 1 بوده و تالی هر عدد طبیعی k در خودش را دارا باشد، برابر مجموعه اعداد طبیعی است.

نمادگذاری. مجموعه اعداد طبیعی $\{1,2,3,\ldots\}$ را با حرف $\mathbb{N}$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه اعداد صحیح، $\mathbb{Z}$، به کمک مجموعه $\mathbb{N}$ به طریقی تعریف می‌شود که تفاضل در آن امکان‌پذیر باشد، یعنی تحت عمل تفاضل بسته باشد. به عبارتی، معادلات به صورت $x+n=m$ که در آن m، n اعداد طبیعی اند، در آن دارای جواب باشد. برای امکان‌پذیر بودن عمل تقسیم، یعنی معادلاتی به صورت $nx=m$ که در آن

$n\in\mathbb{N}$ و $m\in\mathbb{Z}$ دارای جواب باشند، مجموعه اعداد گویا، $\mathbb{Q}$، را تعریف می‌کنیم. می‌توان دید که اعدادی وجود دارند که گویا نیستند. برای پر کردن شکاف‌های موجود در اعداد گویای $\mathbb{Q}$، مجموعه اعداد گنگ را در نظر می‌گیریم و آن را با $\mathbb{IQ}$ نمایش می‌دهیم. پس $\mathbb{Q}\cap\mathbb{IQ}=\emptyset$، قرار می‌دهیم $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{IQ}$ و چون عناصر این اجتماع اعدادی واقعی اند، این مجموعه را اعداد حقیقی نامیم. به وضوح

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R},\quad \mathbb{IQ}\subset\mathbb{R},\quad \mathbb{Q}\cap\mathbb{IQ}=\emptyset.$$

تبصره ۹. با توجه به توضیحات بیان شده، اعداد گویا، اعداد حقیقی مانند x هستند که در معادله‌ای $nx=m$ برای $n\in\mathbb{N}$ و $m\in\mathbb{Z}$ صدق می‌کنند. این اعداد را به صورت mn^{-1} یا $\frac{m}{n}$ نمایش می‌دهیم که در آن $n\neq 0$ است. پس

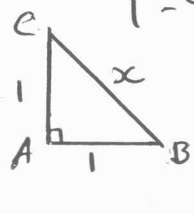
$$\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$$

$$\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots\}$$

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\;\middle|\; m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

همان گونه که در بالا بیان کردیم، اعدادی وجود دارند که گویا نیستند و به این دلیل آنها را اعداد گنگ یا اصم نامیم. برای روشن‌تر شدن بحث، باید به طور واقعی حداقل یک عدد را معرفی کنیم که گویا نباشد و به وجود آن تردید نداشته باشیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲. اگر طول دلخواهی را به عنوان واحد در نظر بگیریم و آن را 1 بنامیم، آنگاه می‌توان مثلث قائم‌الزاویه‌ای ساخت که طول اضلاع زاویه قائمه برابر 1 باشد و طول وتر آن، که حتما وجود دارد، را x می‌نامیم.



در مثلث قائم الزاویه BAC، از رابطه فیثاغورث داریم

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$$

پس $x^2 = 1^2 + 1^2$ یعنی $x^2 = 2$ و از نوع ساختار مثلث قائم الزاویه، مطمئن هستیم که چنین x ی واقعاً وجود دارد. کافی است نشان دهیم این x متعلق به $\mathbb{Q}$ نیست. از فرض خلف استفاده می کنیم.

فرض کنید $x \in \mathbb{Q}$ پس اعداد $m \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ وجود دارند که $x = \frac{m}{n}$ و $(m,n) = 1$ (یعنی m و n نسبت به هم اولند و هیچ عامل مشترکی بجز ۱ ندارند)

$$x^2 = 2 \,,\ x = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2,$$

بنابراین m^2 یک عدد زوج است. پس m نیز زوج است مثلاً $m = 2k$، در نتیجه

$$4k^2 = (2k)^2 = 2n^2$$

یعنی $n^2 = 2k^2$، پس n^2 زوج است، در نتیجه n زوج است. بنابراین m و n حداقل دارای یک عامل مشترک 2 هستند و این با $(m,n) = 1$ در تناقض است. پس فرض خلف رد شده، یعنی x عددی گویا نیست.

تبصره ۱۰. به طریق مشابه می توان بینهایت عدد واقعی ساخت که گویا نیستند. پس مجموعه اعداد گنگ نیز یک مجموعه نامتناهی است.

۳.۱ اعداد حقیقی

۱.۳.۱ اصول دستگاه اعداد حقیقی

اصول دستگاه اعداد حقیقی را می توان به صورت زیر طبقه بندی کرد

الف) اصل گسترش

ب) اصول میدان

ج) اصول ترتیب

د) اصل کامل بودن (اصل تمامیت)

در ادامه بخش، به شرح این اصول و بررسی برخی از خواص آنها می‌پردازیم.

الف) اصل گسترش (E). اعداد حقیقی $\mathbb{R}$، حداقل دارای دو عضو مجزا است.

از این اصل در تمام قسمتهای ریاضیات، بدون بیان آن، همواره استفاده می‌کنیم.

ب) اصول میدان. اعداد حقیقی با دو عمل اساسی که آنها را جمع و ضرب می‌نامیم باهم ترکیب می‌شوند، اصولی که این عمل‌ها را آنها برقرارند، به عنوان قوانین محاسبات در نظر گرفته می‌شوند.

اصول جمع.

A1. بسته بودن. مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ تحت عمل جمع بسته است. یعنی برای هر دو عدد حقیقی، جمع آنها عددی حقیقی است.

$$\forall a,b\in\mathbb{R},\quad a+b\in\mathbb{R}. \tag{۷}$$

A2. شرکت‌پذیری. عمل جمع در $\mathbb{R}$ شرکت‌پذیر است. یعنی

$$\forall a,b,c\in\mathbb{R},\quad (a+b)+c=a+(b+c). \tag{۸}$$

A3. عضو همانی جمع. عدد حقیقی وجود دارد، مانند b، که به ازای هر عدد حقیقی a داریم $a+b=b+a=a$. یعنی

$$\exists b\in\mathbb{R},\ \forall a\in\mathbb{R},\quad a+b=b+a=a \tag{۹}$$

توضیح ۱۱. عدد حقیقی b در A3 منحصر بفرد است و آن را با 0 نمایش می‌دهیم.

A4. وجود وارون جمعی. متناظر به هر عدد حقیقی a، عدد حقیقی b وجود دارد به طوری که $a+b=b+a=0$، 0 عضو همانی جمع در A3 است، یعنی

$$\forall a\in\mathbb{R},\ \exists b\in\mathbb{R},\quad a+b=b+a=0 \tag{۱۰}$$

توضیح ۱۲. برای هر $a\in A$، وارون جمعی آن منحصر بفرد است و آن را با $-a$ نمایش می‌دهیم.

توضیح ۱۳. چون $0 = 0 + 0$، پس 0 برابر منفی خودش است.

A5. جابجایی، عمل جمع در $\mathbb{R}$ جابجایی است، یعنی

$$\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad a+b=b+a. \tag{۱۱}$$

اصول ضرب.

M1 بسته‌بودن. مجموعهٔ $\mathbb{R}$ تحت عمل ضرب بسته است. یعنی ضرب هر دو عدد حقیقی، یک عدد حقیقی است.

$$\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad ab \in \mathbb{R}. \tag{۱۲}$$

M2 شرکت‌پذیری. عمل ضرب در $\mathbb{R}$ شرکت‌پذیر است

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R}, \quad (ab)c=a(bc). \tag{۱۳}$$

M3. عضو همانی ضرب. عدد حقیقی 1 (یک) وجود دارد به طوری که برای هر عدد حقیقی a داریم

$$a.1=1.a=a. \tag{۱۴}$$

M4. وارون ضربی. متناظر به هر عدد حقیقی ناصفر a، یک عدد حقیقی b وجود دارد به طوری که $ab=ba=1$.

$$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists b \in \mathbb{R}, \quad ab=ba=1. \tag{۱۵}$$

توضیح ۱۴. وارون ضربی را معمولاً معکوس عدد نامیم و با $\frac{1}{a}$ یا a^{-1} نمایش می‌دهیم.
چون $1 = 1.1$ پس 1 وارون ضربی خودش است.

M5. جابجایی، عمل ضرب در $\mathbb{R}$ جابجایی است یعنی

$$\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad ab=ba. \tag{۱۶}$$

DL. قانون توزیع‌پذیری. عمل ضرب روی عمل جمع توزیع‌پذیر است. یعنی

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R}, \quad a(b+c)=ab+ac. \tag{۱۷}$$

با استفاده از M5 داریم

$$\forall a,b,c\in \mathbb{R},\quad (b+c)a=ba+ca. \tag{۱۸}$$

تعریف ۱۵. مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$، همراه با دو عمل جمع و ضرب برقرار در A1 − A5 و M1 − M5 و قانون DL یک میدان نامیده می‌شود و آن را میدان اعداد حقیقی یا دستگاه اعداد حقیقی نامیم.

مثال ۳. مجموعه اعداد گویا، $\mathbb{Q}$، همراه با دو عمل جمع و ضرب معمولی یک میدان است.

به طور کلی، اگر عمل‌های دیگری بجای دو عمل جمع و ضرب معمولی جایگزین شوند به طوری که در اصول A1 − A5 (برای عمل اول) و M1 − M5 (برای عمل دوم) و DL برای یک مجموعه ناتهی صدق کنند، آن مجموعه را یک میدان نسبت به آن دو عمل نامیم.

۱.۳.۲ خواص جبری

مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با دو عمل جمع و ضرب که در اصل‌های A1 − A5، M1 − M5 و DL صدق می‌کند، دارای خواص جبری ساده، اما مهم، است که در زیر آنها را به اجمال بررسی می‌کنیم. در ابتدا نشان می‌دهیم ۰ تنها عنصر $\mathbb{R}$ برقرار در A3 است و 1 تنها عضو $\mathbb{R}$ است که در M3 صدق می‌کند.

قضیه ۱۶. الف) اگر a و b عناصر $\mathbb{R}$ برقرار در شرط $b+a=a$ باشند آنگاه $b=0$.

ب) اگر a و $b\neq 0$ اعداد حقیقی باشند به طوری که $ab=b$ آنگاه $a=1$.

اثبات. الف) از فرض داریم $b+a=a$. عدد $-a$ را به دو طرف رابطه اضافه

کرده و به ترتیب با توجه به A4، A2، A4 و A3 داریم

$$0 = a + (-a) = (b+a) + (-a) = b + (a + (-a)) = b + 0 = b.$$

ب) از فرض داریم $ab = b$ و $b \neq 0$، عدد b^{-1} را در دو طرف رابطه ضرب کرده و به ترتیب با توجه به M4، M2، M4 و M3 داریم

$$1 = bb^{-1} = (ab)\, b^{-1} = a(bb^{-1}) = a.1 = a.$$

قضیه ۱۷. الف) اگر a و b عناصر $\mathbb{R}$ بوده و $a+b=0$ آن گاه $b=-a$.

ب) اگر $a \neq 0$ و b عناصر $\mathbb{R}$ بوده و $ab = 1$ آن گاه $b = \frac{1}{a}$.

اثبات. الف) فرض کنید $a+b=0$. عدد $-a$ را به دو طرف رابطه اضافه می کنیم داریم

$$(-a) + (a+b) = -a + 0.$$

حال از A2 در طرف چپ و A3 در طرف راست نتیجه می گیریم که

$$((-a) + a) + b = -a.$$

با توجه به A4، A3 داریم $b=-a$.

ب) فرض کنید $ab=1$، $a \neq 0$. عدد $\frac{1}{a} = a^{-1}$ را در دو طرف آن ضرب کرده و داریم

$$a^{-1}(ab) = (a^{-1}).1.$$

از M2 برای طرف چپ و M3 برای طرف راست رابطه بالا نتیجه می شود

$$(a^{-1}a)\, b = a^{-1}$$

با توجه به M4، M3 داریم $b = a^{-1}$ یا $b = \frac{1}{a}$.

خواص A4، M4، امکان حل معادله هایی به صورت

$$a + x = 0, \tag{۱۹}$$

$$a.x = 1, \quad a \neq 0, \tag{۲۰}$$

را فراهم می‌کنند و قضیه (۱۷) منحصر بفرد بودن جواب‌های این معادلات را نتیجه می‌دهد. حال نشان می‌دهیم که طرف راست معادلات (۱۹) و (۲۰) می‌توانند عناصر دلخواهی از $\mathbb{R}$ باشند.

قضیه ۱۸. الف) فرض کنید a و b عناصر دلخواهی از $\mathbb{R}$ هستند، آنگاه معادله

$$a+x=b,$$

دارای جواب حقیقی منحصر بفرد $x=(-a)+b$ است،

ب) فرض کنید $a\neq 0$ و b عناصر دلخواهی از $\mathbb{R}$ هستند، آنگاه معادله

$$ax=b,$$

دارای جواب حقیقی منحصر بفرد $x=(\frac{1}{a})\,b$ است.

اثبات. الف) چون

$$a+((-a)+b)=(a+(-a))+b=0+b=b,$$

به وضوح $x=(-a)+b$ جوابی برای معادله $a+x=b$ است. برای منحصر بفردی این جواب، فرض کنید z جوابی از این معادله است، در نتیجه $a+z=b$. عدد $-a$ را به طرفین آن اضافه می‌کنیم

$$(-a)+(a+z)=(-a)+b.$$

با توجه به اصل‌های $A3$، $A4$ و $A2$ به ترتیب، داریم

$$\begin{aligned} z&=0+z=(-a+a)+z\\ &=(-a)+(a+z)=(-a)+b. \end{aligned}$$

ب) چون $a\neq 0$، داریم

$$a\cdot((\tfrac{1}{a})\cdot b)=(a\cdot\tfrac{1}{a})\cdot b=1\cdot b=b$$

یعنی $x=(\frac{1}{a})\cdot b$ جواب معادله $ax=b$ است، برای بررسی منحصر بفردی این جواب، فرض کنید z جوابی از این معادله است. در نتیجه $az=b$. عدد $\frac{1}{a}$ را در طرفین آن ضرب کرده، داریم

$$\left(\frac{1}{a}\right)(az) = \left(\frac{1}{a}\right) b.$$

با توجه به اصل های M3 ، M4 و M2 به ترتیب ، داریم

$$\begin{aligned} z = 1.z &= \left(\frac{1}{a}\cdot a\right) z \\ &= \left(\frac{1}{a}\right)(az) = \left(\frac{1}{a}\right) b. \end{aligned}$$

قضیه ۱۹ . فرض کنید a و b عناصر دلخواهی از $\mathbb{R}$ هستند. در این صورت

الف) $a.0 = 0$

ب) $-a = (-1)a$

ج) $-(a+b) = (-a)+(-b)$

د) $-(-a) = a$

ه) $(-1)(-1)=1$

و) اگر $a \neq 0$ آنگاه $\frac{1}{a} \neq 0$ و $(a^{-1})^{-1} = a$.

ز) $ab=0$ اگر و تنها اگر $a=0$ یا $b=0$

ح) اگر $a\neq 0$ آنگاه $(-a)^{-1} = -a^{-1}$.

اثبات . به عنوان تمرین به عهده دانشجو است .

قضیه ۲۰ . قوانین حذف :

الف) $\forall a,b,c\in\mathbb{R},\ a+c=b+c \Rightarrow a=b$

ب) $\forall a,b,c\in\mathbb{R},\ c\neq 0,\ ac=bc \Rightarrow a=b$

اثبات . الف) از اصل A4 ، برای $c\in\mathbb{R}$ عدد $-c$ وجود دارد . بنابراین

$$\begin{aligned} a+c=b+c &\Rightarrow (a+c)+(-c) = (b+c)+(-c), \\ &\Rightarrow a+(c+(-c)) = b+(c+(-c)), && (A2) \\ &\Rightarrow a+0 = b+0, && (A4) \\ &\Rightarrow a=b. && (A3) \end{aligned}$$

ب) چون $c\neq 0$ ، عدد c^{-1} موجود است ، بنابراین

$$\begin{aligned} ac=bc &\Rightarrow (ac)c^{-1} = (bc)c^{-1}, \\ &\Rightarrow a(cc^{-1}) = b(cc^{-1}), && (M2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a.1 = b.1 \qquad (M4)$$

$$\Rightarrow a = b \qquad (M3)$$

با توجه به عمل های جمع و ضرب، تفاضل و تقسیم در $\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۱. تفاضل دو عدد حقیقی a و b را با $a+(-b)$ تعریف کرده و با $a-b$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۲. تقسیم دو عدد حقیقی a و b با شرط $b\neq 0$ را با ab^{-1} تعریف کرده و با $\frac{a}{b}$ یا $a(\frac{1}{b})$ یا $a\div b$ یا ab^{-1} نمایش می‌دهیم.

به سادگی می‌توان دید که اعداد $a-b$ و $\frac{a}{b}$ به طور منحصر به فردی تعریف می‌گردند.

۲.۳.۱ اصول ترتیب در $\mathbb{R}$

زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\mathbb{R}$ که با P نمایش می‌دهیم وجود دارد به طوری که در خواص زیر صدق می‌کند

۱. اگر a و b متعلق به P باشند آن‌گاه $a+b$ متعلق به P است.

۲. اگر a و b متعلق به P باشند آن‌گاه ab متعلق به P است.

۳. اگر a در $\mathbb{R}$ باشد آن‌گاه دقیقاً یکی از روابط زیر برقرار است

$$a\in P \quad \text{یا} \quad a=0 \quad \text{یا} \quad -a\in P.$$

شرط (۳) را اصل تثلیث نامیم. زیرمجموعه ناتهی P با خواص بالا را مجموعه اعداد حقیقی مثبت نامیم. گاهی اوقات مجموعه‌ی $P\cup\{0\}$ را مخروط در $\mathbb{R}$ نامیم.

مجموعه‌ی $N=\{-a : a\in P\}$ را مجموعه اعداد حقیقی منفی گوییم. به وضوح $N\cap P=\emptyset$ در واقع $\mathbb{R}=P\cup\{0\}\cup N$.

تعریف ۲۲. اگر $a\in P$ گوییم a یک عدد حقیقی مثبت است و می‌نویسیم $a>0$. اگر $a\in P\cup\{0\}$، گوییم a یک عدد حقیقی نامنفی است و می‌نویسیم $a\geq 0$. اگر $-a\in P$، گوییم a یک عدد حقیقی منفی است و می‌نویسیم $a<0$. اگر $-a$ متعلق به $P\cup\{0\}$ باشد گوییم a یک عدد حقیقی نامثبت است و می‌نویسیم $a\leq 0$.

با توجه به مجموعه‌ی P و تعریف (۲۲)، رابطه‌های ترتیب بر اعداد حقیقی را به دست می‌آوریم.

تعریف ۲۳. فرض کنید a و b اعداد حقیقی‌اند. اگر $a-b\in P$ باشد، می‌نویسیم $a>b$. اگر $-(a-b)\in P$ باشد، می‌نویسیم $a<b$. اگر $a-b\in P\cup\{0\}$ باشد، می‌نویسیم $a\geq b$ و اگر $-(a-b)\in P\cup\{0\}$ باشد، می‌نویسیم $a\leq b$.

در ادامه‌ی بحث، خواص از رابطه ترتیب بیان شده در $\mathbb{R}$ را بررسی می‌کنیم. این خواص همان خواص آشنا در نامعادلات است و به جهت تکمیل مطالب آنها را آورده‌ایم و برخی از آنها را نیز ثابت می‌کنیم.

قضیه ۲۴. فرض کنید $a,b,c\in\mathbb{R}$.

الف) اگر $a>b$ و $b>c$ آنگاه $a>c$.

ب) دقیقاً یکی از حالت‌های زیر برقرار است

$$a>b,\quad a=b,\quad a<b.$$

ج) اگر $a\geq b$ و $b\geq a$، آنگاه $a=b$.

اثبات. الف) اگر $a-b$ و $b-c$ متعلق به P باشند، آنگاه از بسته بودن P نسبت به عمل جمع نتیجه می‌گیریم که $a-c=(a-b)+(b-c)$ نیز متعلق به P است، یعنی $a>c$.

ب) با توجه به تعریف P و شرط (۳) از تعریف فوق، یکی از حالت‌های زیر فقط برقرار است

$$a-b \in P \quad , \quad a-b=0, \quad b-a=-(a-b)\in P$$

ج) اگر $a\neq b$ باشد آن‌گاه از (ب) نتیجه می‌شود که یا $a-b$ یا $b-a$ در P می‌باشد. پس یا $a>b$ یا $b>a$ که در هر حالت با فرض داده شده در تناقض است.

قضیه ۲۵. الف) اگر $0\neq a\in \mathbb{R}$ باشد آن‌گاه $a^2>0$.

ب) $1>0$.

ج) اگر $n\in \mathbb{N}$ باشد آن‌گاه $n>0$.

اثبات. الف) چون $0\neq a\in \mathbb{R}$ است، پس یا a یا $-a$ متعلق به P می‌باشد.
اگر $a\in P$ باشد آن‌گاه با توجه به شرط (۲) تعریف مجموعه P، $a^2=aa\in P$.
اگر $-a\in P$ باشد آن‌گاه $(-a)(-a)\in P$. از قضیه (۱۹) داریم

$$(-a)(-a)=(-1)(-1)aa=a^2$$

پس $a^2\in P$، یعنی $a^2>0$.

ب) چون $1=(1)^2$، از قسمت (الف) داریم $(-1)^2\in P$ یعنی $1\in P$ پس $1>0$.

ج) فرض کنید $M=\{n\in \mathbb{N} : n>0\}$. در این صورت $M\subset \mathbb{N}$. از قسمت (ب) داریم $1\in M$. اگر $k\in M$ باشد آن‌گاه $k>0$، در نتیجه

$$k+1>0+1=1>0$$

یعنی $k+1\in M$. حال از اصل P5 (اصول موضوعه پئانو) نتیجه می‌شود که $M=\mathbb{N}$ یعنی برای هر عدد طبیعی n، همواره $n>0$ است.

قضیه ۲۶. فرض کنید a، b، c و d اعداد حقیقی‌اند.

الف) اگر $a>b$ آن‌گاه $a+c>b+c$.

ب) اگر $a>b$ و $c>d$ آن‌گاه $a+c>b+d$.

ج) اگر $a>b$ و $c>0$ آن‌گاه $ac>bc$.

د) اگر $a>b$ و $c<0$ آن‌گاه $ac<bc$،

هـ) اگر $a>0$ آن‌گاه $\frac{1}{a}>0$،

و) اگر $a<0$ آن‌گاه $\frac{1}{a}<0$.

اثبات. به عنوان تمرین به عهده دانشجو است.

مثال ۴. فرض کنید a و b دو عدد حقیقی است و $a>b$. در این صورت

$$a>\frac{1}{2}(a+b)>b.$$

حل. چون $a>b$، از قضیه ۲۶ (الف) با فرض $c=a$ داریم

$$2a=a+a>a+b,$$

و با فرض $c=b$ داریم

$$a+b>b+b=2b.$$

از قضیه ۲۶ (ج) با $c=\frac{1}{2}$ داریم

$$a>\frac{1}{2}(a+b),\qquad \frac{1}{2}(a+b)>b$$

پس

$$a>\frac{1}{2}(a+b)>b.$$

نتیجه ۲۷. از مثال (۴) نتیجه می‌شود که اگر a مثبت باشد آن‌گاه یک عدد مثبت کوچکتر از a یعنی $\frac{1}{2}a$ وجود دارد و برای $\frac{1}{2}a$ یک عدد مثبت کوچکتر از آن یعنی $\frac{1}{4}a$ وجود دارد و به همین ترتیب. پس می‌توان نتیجه گرفت که کوچکترین عدد حقیقی مثبت وجود ندارد.

به وضوح، اگر $a>0$ و $b>0$ باشند آن‌گاه $ab>0$. علاوه بر آن اگر $a<0$ و $b<0$ باشند آن‌گاه $ab>0$. در مثال بعد عکس آن را بررسی می‌کنیم.

مثال ۵. اگر $ab>0$ باشد آنگاه یا $a>0$، $b>0$ یا $a<0$ و $b<0$ است.

حل. اگر $ab>0$ باشد آنگاه $a\neq 0$ و $b\neq 0$. فرض کنید $a>0$، در این صورت $\frac{1}{a}>0$ و

$$b=((\tfrac{1}{a})a)b=(\tfrac{1}{a})(ab)>0,$$

یعنی $b>0$. حال اگر $a<0$ باشد آنگاه $\frac{1}{a}<0$ و

$$b=((\tfrac{1}{a})a)b=(\tfrac{1}{a})(ab)<0,$$

پس $b<0$.

مثال ۶. اگر $ab<0$ باشد آنگاه یا $a>0$ و $b<0$ یا $a<0$ و $b>0$ است.

حل. اگر $ab<0$ باشد آنگاه $a\neq 0$ و $b\neq 0$. فرض کنید $a>0$، در این صورت $\frac{1}{a}>0$ و

$$b=((\tfrac{1}{a})a)b=(\tfrac{1}{a})(ab)<0,$$

یعنی $b<0$. حال اگر $a<0$ باشد آنگاه $\frac{1}{a}<0$ و

$$b=((\tfrac{1}{a})a)b=(\tfrac{1}{a})(ab)>0,$$

پس $b>0$.

۱.۳.۴ قدرمطلق

با توجه به اصل تثلیث، اگر $a\neq 0$ باشد آنگاه تنها یکی از اعداد a یا $-a$ مثبت است. در این بخش، قدرمطلق عدد $a\neq 0$ را برابر با عدد مثبت از زوج اعداد $\{a,-a\}$ تعریف می‌کنیم. قدرمطلق عدد صفر را برابر صفر قرار می‌دهیم.

تعریف ۲۸. فرض کنید $a\in\mathbb{R}$. قدرمطلق عدد a را با $|a|$ نشان داده و به صورت زیر

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geq 0,\\ -a, & a<0,\end{cases}$$

تعریف می‌کنیم.

قضیه ۲۹. الف) $|a|=0$ اگر و تنها اگر $a=0$.

ب) به ازای هر $a\in\mathbb{R}$، $|a|=|-a|$

ج) اگر $c\geq 0$ باشد آن‌گاه $|a|\leq c$ اگر و تنها اگر $-c\leq a\leq c$.

د) به ازای هر $a\in\mathbb{R}$، $-|a|\leq a\leq |a|$.

اثبات. الف) برای $a=0$، طبق تعریف (۲۸)، $|a|=|0|=0$. فرض کنید $a\neq 0$. در این صورت $-a\neq 0$ پس $|a|\neq 0$.

ب) برای $a=0$ داریم $|0|=0=|-(0)|$. فرض کنید $a\neq 0$، پس یا $a>0$ یا $a<0$، اگر $a>0$ آن‌گاه $|a|=a=|-a|$ و اگر $a<0$ آن‌گاه $|a|=-a=|-a|$.

ج) فرض کنید $|a|\leq c$. در این صورت $a\leq c$ و $-a\leq c$ پس

$-c\leq a\leq c$.

برعکس، اگر $-c\leq a\leq c$ آن‌گاه $a\leq c$ و $-a\leq c$ پس $|a|\leq c$.

د) در قسمت (ج) قرار می‌دهیم $c=|a|\geq 0$ و حکم حاصل می‌شود.

قضیه ۳۰. نامساوی مثلثی. فرض کنید a و b اعداد حقیقی‌اند. در این صورت

الف) $|a+b|\leq |a|+|b|$. (نامساوی مثلثی)

ب) $\big||a|-|b|\big|\leq |a-b|$.

اثبات. الف) داریم

$$\begin{aligned}(|a|+|b|)^2&=|a|^2+|b|^2+2|a||b|\\ &\geq a^2+b^2+2ab=(a+b)^2=|a+b|^2\end{aligned}$$

در نتیجه $|a+b|\leq |a|+|b|$.

ب) داریم

$$|a-b|^2 = (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$$
$$\geqslant |a|^2+|b|^2-2|a||b| = (|a|-|b|)^2.$$

پس $||a|-|b|| \leq |a-b|$.

نتیجه ۳۱. اگر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ تعداد n عدد حقیقی باشند آنگاه

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

اثبات. برای $n=2$، حکم از قضیه (۳۰ (الف)) نتیجه می‌شود. با تکرار قضیه (۳۰ (الف)) داریم

$$|a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n| = |(a_1+\cdots+a_{n-1})+a_n|$$
$$\leq |(a_1+\cdots+a_{n-2})+a_{n-1}|+|a_n|$$
$$\leq |(a_1+\cdots+a_{n-3})+a_{n-2}|+|a_{n-1}|+|a_n|$$
$$\leq \cdots$$
$$\leq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{n-1}|+|a_n|.$$

مثال ۷. اگر $a, b \in \mathbb{R}$ و $a^2+b^2=0$ باشند آنگاه $a=b=0$.

حل. چون $a^2 \geqslant 0$ و $b^2 \geqslant 0$، پس $a^2+b^2=0$ نتیجه می‌دهد که $a^2=b^2=0$.
بنابراین $a=b=0$.

مثال ۸. فرض کنید $c \in \mathbb{R}$ و $c>1$. ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $c^n \geqslant c$.

حل. چون $c>1$، پس $a>0$ وجود دارد به طوری که $c=1+a$. در نتیجه

$$c^n = (1+a)^n \geqslant 1+na \geqslant 1+a = c.$$

(به سادگی از قضیه دوجمله‌ای نتیجه می‌شود که برای $a>0$، $n \in \mathbb{N}$، $(1+a)^n \geqslant 1+na$)

مثال ۹. ثابت کنید به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $n<2^n$ و بنابراین $\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}$.

حل. به وضوح برای $n=1$ داریم $2=2^1>1$. اگر برای $n\geq 1$ داشته باشیم $n<2^n$، آنگاه

$$(n+1)\leq 2n<2(2^n)=2^{n+1}$$

بنابراین برای هر $n\in\mathbb{N}$، $n<2^n$.

مثال ۱۰. فرض کنید a و b اعداد حقیقی نامنفی اند و $n\in\mathbb{N}$. ثابت کنید $a<b$ اگر و تنها اگر $a^n<b^n$.

حل. داریم

$$b^n-a^n=(b-a)(b^{n-1}+\cdots+a^{n-1})=(b-a)p$$

که در آن $p>0$. پس اگر $a^n<b^n$ آنگاه $b^n-a^n>0$ در نتیجه $b-a>0$ یعنی $b>a$ و برعکس.

مثال ۱۱. تمام نقاط (x,y) در صفحه را بیابید به طوری که $|y|=|x|$.

حل. داریم

$$|y|=|x| \Rightarrow y=\pm x$$

پس مجموعه جواب به صورت $\{(x,y): y=\pm x\}$ است. یعنی تمام نقاط در صفحه متعلق به $\{(x,x): x\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,-x): x\in\mathbb{R}\}$ مجموعه جواب است.

مثال ۱۲. تمام نقاط (x,y) در صفحه را بیابید به طوری که $|x|+|y|=1$.

حل. حالت های زیر را در نظر می گیریم

$$x>0,\ y>0 \Rightarrow x+y=1,$$

$$x>0,\ y<0 \Rightarrow x-y=1,$$

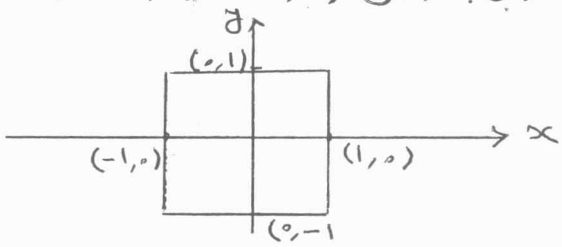
$$x<0,\ y>0 \Rightarrow -x+y=1,$$

$$x<0,\ y<0 \Rightarrow -x-y=1,$$

$$x=0 \Rightarrow y=\pm 1$$

$$y=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

پس مجموعه جواب مربعی به رئوس $(0,1)$ ، $(1,0)$ ، $(0,-1)$ و $(-1,0)$ است.



مثال ۱۳. فرض کنید $\epsilon>0$. ثابت کنید

$$|a-b|<\epsilon \Leftrightarrow b-\epsilon<a<b+\epsilon.$$

حل. داریم

$$|a-b|=\max\{(a-b),-(a-b)\}<\epsilon,$$

بنابراین

$$|a-b|<\epsilon \Leftrightarrow (a-b)<\epsilon,\ -(a-b)<\epsilon,$$

یا

$$|a-b|<\epsilon \Leftrightarrow a<b+\epsilon,\ -a+b<\epsilon,$$

یا

$$|a-b|<\epsilon \Leftrightarrow a<b+\epsilon,\ b-\epsilon<a,$$

یعنی

$$|a-b|<\epsilon \Leftrightarrow b-\epsilon<a<b+\epsilon.$$

مثال ۱۴. فرض کنید $k\in P$ و به ازای هر $\epsilon>0$ داشته باشیم $|a-b|<k\epsilon$

ثابت کنید $a=b$.

حل. فرض کنید $a\neq b$ (فرض خلف). قرار می‌دهیم $\epsilon=\frac{1}{2k}|a-b|>0$ در نتیجه

$$|a-b|<k\epsilon=k\left(\frac{1}{2k}|a-b|\right)=\frac{1}{2}|a-b|.$$

که یک تناقض است. پس باید $a=b$.

۵.۳.۱ کامل بودن اعداد حقیقی

در این بخش خاصیتی از اعداد حقیقی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که به خاصیت کامل بودن معروف است و وجود عناصر در $\mathbb{R}$ را با داشتن فرض‌های معینی تضمین می‌کند.

تعریف ۳۲. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\mathbb{R}$ است.

الف) عضو $\alpha\in\mathbb{R}$ را یک کران بالای S نامیم، هرگاه

$$\forall x\in S,\quad x\leq\alpha.$$

ب) عضو $\beta\in\mathbb{R}$ را یک کران پایینی S نامیم، هرگاه

$$\forall x\in S,\quad \beta\leq x.$$

مجموعه S را کراندار از بالا گوییم هرگاه S دارای یک کران بالایی باشد و آن را کراندار از پایین نامیم هرگاه دارای یک کران پایین باشد. مجموعه S را کراندار گوییم هرگاه از بالا و از پایین کراندار باشد.

توضیح ۳۳. توجه کنید که زیرمجموعه S از $\mathbb{R}$، ممکن است دارای کران پایین یا کران بالا نباشد، به عنوان مثال $S=\mathbb{R}$ دارای کران پایین و کران بالایی نیست. اما اگر S دارای یک کران بالایی باشد، آنگاه دارای بینهایت کران بالایی است. زیرا اگر α یک کران بالایی S باشد، آنگاه به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $\alpha+n$ نیز کران بالایی برای S است. حکم مشابهی برای کران پایین نیز می‌توان داشت.

مثال ۱۵. دو مجموعه $S_1=\{x\in\mathbb{R}: 0<x<1\}$ و $S_2=\{x\in\mathbb{R}: 0\le x\le 1\}$ را در نظر بگیرید. عدد ۱ یک کران بالای S_1 است، زیرا

$$\forall x\in S_1,\quad x<1,$$

و علاوه بر آن هر $a\ge 1$ نیز یک کران بالای S_1 است. مجموعه‌ی S_2 نیز دارای همان کران‌های بالای S_1 است. دیده می‌شود که S_2 شامل کران بالای ۱ است، در حالی که S_1 شامل هیچ یک از کران‌های بالای خود نیست.

جهت روشن‌تر شدن مطلب به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱۶. فرض کنید $E=\{3,7,8,12,14\}$. با رابطه‌ی ترتیب $<$، مجموعه E یک مجموعه مرتب است. عدد 14 یک کران بالای و عدد 3 یک کران پایینی E نسبت به اعداد طبیعی است $(E\subset\mathbb{N})$. پس مجموعه E نسبت به $\mathbb{N}$ کراندار است. مجموعه E نسبت به اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ نیز کراندار است، برای مثال عدد 6π و $\sqrt{320}$ کران‌های بالای E نسبت به $\mathbb{R}$ هستند.

مثال ۱۷. فرض کنید $S=\mathbb{R}$ و $E=\{x: x>0\}\subset S$. آیا مجموعه‌ی E نسبت به S از بالا کراندار است؟

حل. مجموعه‌ی E نسبت به $S=\mathbb{R}$ دارای کران بالایی نیست. زیرا اگر α یک کران بالای E در $\mathbb{R}$ باشد، یعنی

$$\forall x\in E,\quad x\le\alpha.$$

آن‌گاه چون $1\in E$ پس $1\le\alpha$، از طرفی $1+\alpha>0$ پس $1+\alpha\in E$. بنابراین باید $1+\alpha<\alpha$ که تناقض است. در نتیجه E در اعداد حقیقی دارای کران بالایی نیست.

مثال ۱۸. فرض کنید $E=\{x : x=\frac{n}{n+1} \ , \ n\in\mathbb{N}\}$. مجموعه E از بالا کراندار است. زیرا برای هر $n\in\mathbb{N}$،

$$n+1>n \Rightarrow \frac{n}{n+1}<1$$

بنابراین

$$\forall x\in E, \quad x<1$$

یعنی ۱ یک کران بالایی E است.

مثال ۱۹. الف) مجموعه $\mathbb{R}^+$ از پایین کراندار و از بالا بی‌کران است.
ب) مجموعه $\mathbb{R}^-$ از بالا کراندار و از پایین بی‌کران است.
حل. الف) چون هر عضو $\mathbb{R}^-\cup\{0\}$ یک کران پایین $\mathbb{R}^+$ است، پس $\mathbb{R}^+$ از پایین کراندار است. حال فرض کنید $\mathbb{R}^+$ از بالا کراندار است، مثلاً β یک کران بالای $\mathbb{R}^+$ باشد. چون $1\in\mathbb{R}^+$، پس $1\leq\beta$. از طرفی $2\in\mathbb{R}^+$ پس $2>0$ و بنابراین $0+1<2+\beta$ یعنی $\beta+1>0$ در نتیجه $\beta+1\in\mathbb{R}^+$، اما $\beta+1>\beta$ و این با کران بالا بودن β در تناقض است. پس $\mathbb{R}^+$ از بالا بی‌کران می‌باشد.
ب) اثبات مشابه (الف) است.

مثال ۲۰. مجموعه $\mathbb{R}$ یک مجموعه‌ی بی‌کران است.
حل. با توجه به $\mathbb{R}=\mathbb{R}^-\cup\{0\}\cup\mathbb{R}^+$ حکم از مثال ۱۹ حاصل می‌شود. اما برای ارائه حلی مستقیم به صورت زیر عمل می‌کنیم.
فرض کنید $\mathbb{R}$ بی‌کران نباشد. برای مثال β یک کران بالایی $\mathbb{R}$ باشد، داریم $\beta\geq 0$ و $1>0$ پس $\beta+1>0$. چون $\beta+1>\beta$ و $\beta+1\in\mathbb{R}$، بنابراین β نمی‌تواند یک کران بالایی $\mathbb{R}$ باشد، یعنی $\mathbb{R}$ از بالا بی‌کران است، به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که $\mathbb{R}$ از پایین بی‌کران است.

با توجه به مطالب بیان و مثال ها، این سوال مطرح می شود که اگر مجموعه‌ای مانند S دارای یک کران بالا باشد و در نتیجه دارای بینهایت کران بالایی است، آیا می توان بین این کران های بالایی از کوچکترین آنها صحبت کرد؟ برای پاسخ به این سوال، تعریف زیر را در نظر می گیریم.

تعریف ۳۴. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است.

الف) فرض کنید S از بالا کراندار است. یک کران بالایی S را کوچکترین کران بالایی S یا سوپریمم S نامیم، هرگاه از تمام کران های بالایی S کوچکتر باشد و در صورت وجود آن را با $\sup S$ نمایش می دهیم.

ب) فرض کنید S از پایین کراندار است، یک کران پایینی S را بزرگترین کران پایین S یا اینفیمم S نامیم، هرگاه از تمام کران های پایینی S بزرگتر باشد و در صورت وجود آن را با $\inf S$ نمایش می دهیم.

به طور معادل، عدد $\alpha \in \mathbb{R}$ کوچکترین کران بالایی S است و می نویسیم $\alpha = \sup S$ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

1) $\forall x \in S,\ x \leq \alpha$ (یعنی α یک کران بالایی است).

2) اگر $\beta \in \mathbb{R}$ کران بالایی برای S باشد آن گاه $\alpha \leq \beta$. (یعنی α در بین تمام کران های بالایی S از همه کوچکتر است).

به طور مشابه، عدد $\gamma \in \mathbb{R}$ بزرگترین کران پایینی S است و می نویسیم $\gamma = \inf S$ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

1) $\forall x \in S,\ \gamma \leq x$ (یعنی γ یک کران پایینی است)

2) اگر $\beta \in \mathbb{R}$ کران پایینی برای S باشد آن گاه $\beta \leq \gamma$. (یعنی γ در بین تمام کران های پایینی S از همه بزرگتر است).

مثال ۲۱. سوپریمم و اینفیمم یک زیرمجموعه از اعداد حقیقی، در صورت وجود، منحصربفرد هستند.

حل. فرض کنید α و β دو سوپریمم مجموعه‌ی S باشند. چون سوپریمم یک مجموعه کران بالای آن مجموعه نیز می‌باشد پس $\beta \leq \alpha$ زیرا $\alpha = \sup S$ و β یک کران بالای S است و $\alpha \leq \beta$ زیرا $\beta = \sup S$ و α یک کران بالایی است. بنابراین $\alpha = \beta$. یعنی سوپریمم S، در صورت وجود، منحصربفرد است. اثبات مشابهی برای اینفیمم نیز برقرار است.

مثال ۲۲. مجموعه تهی نه کران دار و نه بی کران است.

حل. واضح است.

توضیح ۳۵. اگر مجموعه S متناهی باشد آن گاه دارای بزرگترین و کوچکترین عضو است که معمولاً با $\max S$ و $\min S$ نمایش داده می‌شوند. در این حالت $\sup S$ همان $\max S$ و $\inf S$ همان $\min S$ است. اما در حالت کلی $\sup S$، الزاماً متعلق به S نیست. بنابراین، اگر $\sup S \in S$ باشد، آن را $\max S$ نامیم. به عبارت دیگر اگر مجموعه S دارای یک کران بالایی باشد که متعلق به S است، آن گاه این کران بالایی، کوچکترین کران بالایی S خواهد بود. عبارات مشابهی برای می‌نیمم و اینفیمم می‌توان بیان کرد.

مثال ۲۳. برای مجموعه‌های $S_1 = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0\}$ و $S_2 = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 0\}$ داریم

$$\sup S_1 = 0 = \sup S_2$$

توجه کنید که $\sup S_1 \notin S_1$ اما $\sup S_2 \in S_2$. پس S_1 دارای ماکزیمم نیست، ولی S_2

دارای ماکزیمم صفر است، $S_2 \ni 0 = \sup S_2 = \max S_2$.

مثال ۲۴. فرض کنید A و B دو مجموعهٔ ناتهی کراندار از اعداد حقیقی اند و $\lambda \in \mathbb{R}$. قرار دهید

$$A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}, \quad \lambda A=\{\lambda a : a\in A\}$$

ثابت کنید $A+B$ و λA کراندارند.

حل. چون A و B کراندارند، پس k_1 و k_2 در $\mathbb{R}^+$ موجودند به طوری که به ازای هر $a\in A$ و هر $b\in B$

$$|a|\le k_1, \quad |b|\le k_2.$$

بنابراین برای هر $a\in A$ و هر $b\in B$ داریم

$$|a+b|\le |a|+|b|\le k_1+k_2,$$

$$|\lambda a| = |\lambda||a| \le |\lambda| k_1$$

پس $A+B$ و λA کراندارند.

مثال ۲۵. هر زیرمجموعهٔ ناتهی متناهی از $\mathbb{R}$ دارای یک ماکزیمم و یک مینیمم است. پس

$$\max\{1,2,3,4,5\}=5, \quad \min\{1,2,3,4,5\}=1,$$

$$\max\{0,\pi,-7,e,\tfrac{3}{4},\tfrac{4}{3}\}=\pi, \quad \min\{0,\pi,-7,e,\tfrac{3}{4},\tfrac{4}{3}\}=-7,$$

$$\max\{n\in\mathbb{Z} : -4<n\le 100\}=100, \quad \min\{n\in\mathbb{Z} : -4<n\le 100\}=-3.$$

مثال ۲۶. اعداد حقیقی a و b با $a<b$ را در نظر بگیرید. تعریف می‌کنیم

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R} : a\le x\le b\},$$

$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R} : a\le x<b\},$$

$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}:\ a<x\leq b\},$$

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}:\ a<x<b\}.$$

$[a,b]$ یک فاصله بسته و (a,b) یک فاصله باز نامیده می‌شوند. $[a,b)$ و $(a,b]$ را فاصله‌های نیم باز نامند. مشاهده می‌شود که

$$\sup[a,b]=\max[a,b]=b,\qquad \inf[a,b]=\min[a,b]=a.$$

(a,b) دارای ماکزیمم و می‌نیمم نیست، زیرا نقاط انتهایی a و b متعلق به مجموعه نمی‌باشند اما

$$\sup(a,b)=b,\qquad \inf(a,b)=a.$$

مجموعه $[a,b)$ دارای ماکزیمم نیست اما a می‌نیمم آن است و

$$\sup[a,b)=b,\qquad \inf[a,b)=\min[a,b)=a.$$

مجموعه $(a,b]$ دارای می‌نیمم نیست اما b ماکزیمم آن است و

$$\sup(a,b]=\max(a,b]=b,\qquad \inf(a,b]=a.$$

مثال ۲۷. مجموعه‌های $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ دارای ماکزیمم یا می‌نیمم نیستند. مجموعه $\mathbb{N}$ ماکزیمم ندارد اما $\inf\mathbb{N}=\min\mathbb{N}=1$

مثال ۲۸. مجموعه $\{r\in\mathbb{Q}:\ 0\leq r\leq\sqrt{2}\}$ دارای یک می‌نیمم در 0 است، اما ماکزیمم ندارد ولی سوپریمم آن $\sqrt{2}$ است که در $\mathbb{R}$ می‌باشد.

مثال ۲۹. مجموعه $\{n^{(-1)^n}:\ n\in\mathbb{N}\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه به صورت

$$\{1^{-1},2,3^{-1},4,5^{-1},6,7^{-1},\dots\}=\{1,2,\tfrac{1}{3},4,\tfrac{1}{5},6,\tfrac{1}{7},\dots\}$$

است. مجموعه فوق دارای ماکزیمم و می‌نیمم نیست. این مجموعه از بالا کراندار نیست اما دارای بیشترین کران پایین است و اینفیمم آن برابر صفر است.

توضیح ۳۶. در مثال های ارائه شده، دیده می شود که اگر S زیرمجموعه‌ای ناتهی از اعداد حقیقی باشد که از بالا کراندار است آن‌گاه حتماً دارای کوچکترین کران بالایی است و به طور مشابه اگر S از پایین کراندار باشد آن‌گاه دارای بزرگترین کران پایینی است. علت این واقعیت در اعداد حقیقی، اصل تمامیت یا کامل بودن اعداد حقیقی است که در زیر به آن توجه داریم.

۳۷. اصل تمامیت. هر زیرمجموعه‌ی ناتهی S از $\mathbb{R}$ که از بالا کراندار باشد دارای کوچکترین کران بالایی است. به عبارت دیگر $\sup S$ موجود و یک عدد حقیقی است.

به سادگی می‌توان دید که حکم مشابهی برای مجموعه‌های از پایین کراندار ناتهی و بزرگترین کران پایینی آن‌ها در $\mathbb{R}$ برقرار است. (قضیه (۳۸)).

با توجه به اصل تمامیت برای $\mathbb{R}$، گوییم $\mathbb{R}$ کامل است.

مثال ۳۰. آیا میدان اعداد گویا، $\mathbb{Q}$، کامل است؟

حل. برای پاسخ به این سؤال، باید برای کامل بودن $\mathbb{Q}$ نشان دهیم که هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از $\mathbb{Q}$ که از بالا کراندار باشد دارای کوچکترین کران بالایی در $\mathbb{Q}$ است. اما اگر بتوان زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\mathbb{Q}$ یافت که اصل تمامیت برای آن برقرار نباشد، به منزله این است که $\mathbb{Q}$ کامل نیست.

مجموعه $S=\{r : r\in\mathbb{Q},\ r^2<3\}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Q}$ است. چون $1\in S$ پس $S\neq\emptyset$. علاوه بر آن S از بالا کراندار است، مثلاً به $\frac{3}{2}\in\mathbb{Q}$. حال اگر S دارای کوچکترین کران بالایی مانند α در $\mathbb{Q}$ باشد، یعنی $\alpha=\sup S$، $\alpha\in\mathbb{Q}$ آن‌گاه $\alpha\geqslant 1$ و $\alpha\in\mathbb{Q}^+$. پس یکی از حالات زیر باید برقرار باشد:

الف) $\alpha^2>3$

ب) $\alpha^2=3$

ج) $\alpha^2<3$.

به بررسی هر کدام از حالت های ممکن می پردازیم.

الف) اگر $\alpha^2>3$ و $\alpha\in\mathbb{Q}^+$ آنگاه $\beta=\frac{2\alpha+3}{\alpha+2}\in\mathbb{Q}^+$ و

$$\alpha-\beta=\alpha-\frac{2\alpha+3}{\alpha+2}=\frac{\alpha^2-3}{\alpha+2}>0$$

پس $\alpha>\beta$ و

$$3-\beta^2=3-\left(\frac{2\alpha+3}{\alpha+2}\right)^2=\frac{3-\alpha^2}{(\alpha+2)^2}<0$$

یعنی $\beta^2>3$. در نتیجه β کران بالایی برای S است که از α کوچکتر است و این با انتخاب $\alpha=\sup S$ در تناقض است. پس حالت (الف) رد می شود.

ب) اگر $\alpha^2=3$ و $\alpha\in\mathbb{Q}^+$ آنگاه α به صورت عدد گویای $\frac{m}{n}$ است که در آن $(m,n)=1$. بنابراین

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=3\Rightarrow m^2=3n^2,$$

چون مربع هر عدد صحیح، دارای فاکتورها یا عاملهایی به صورت مربع است پس در تجزیه n^2 باید عامل 3 وجود داشته باشد و در نتیجه n مضربی از 3 است. بنابراین m نیز باید دارای عامل 3 باشد پس عدد 3 بزرگترین مقسوم علیه مشترک m و n را می شمارد و این با $(m,n)=1$ در تناقض است، پس حالت (ب) رد می شود.

ج) اگر $\alpha^2<3$ و $\alpha\in\mathbb{Q}^+$، آنگاه $\beta=\frac{2\alpha+3}{\alpha+2}\in\mathbb{Q}^+$ و

$$\alpha-\beta=\alpha-\frac{2\alpha+3}{\alpha+2}=\frac{\alpha^2-3}{\alpha+2}<0$$

پس $\beta>\alpha$ و

$$3-\beta^2=3-\left(\frac{2\alpha+3}{\alpha+2}\right)^2=\frac{3-\alpha^2}{(\alpha+2)^2}>0$$

یعنی $\beta^2<3$. بنابراین α نمی تواند یک کران بالایی برای S باشد، زیرا عضوی از S مانند β وجود دارد به طوری که $\beta>\alpha$. پس $\alpha\neq\sup S$. پس حالت (ج) نیز رد می شود.

بنابراین در هر سه حالت بالا، $\sup S\notin\mathbb{Q}$ یعنی $\mathbb{Q}$ کامل نیست.

قضیه ۳۸. هر زیرمجموعه ناتهی S از $\mathbb{R}$ که از پایین کراندار باشد دارای بزرگترین کران پایینی است.

اثبات. فرض کنید S زیرمجموعه ناتهی از پایین کراندار اعداد حقیقی است. قرار می‌دهیم

$$-S=\{-x : x\in S\},$$

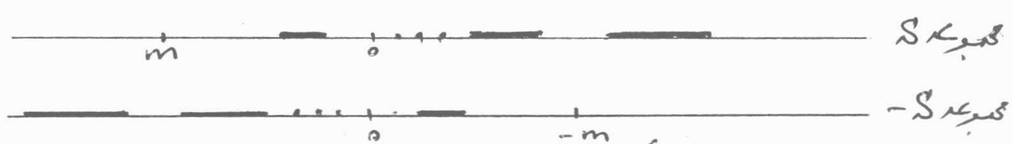
چون S از پایین کراندار و ناتهی است پس $-S$ از بالا کراندار و ناتهی می‌باشد، یعنی

$$\exists m\in\mathbb{R},\ \forall x\in S,\ m\leq x$$

نتیجه می‌دهد که

$$\forall -x\in -S,\ -m\geq -x$$

با توجه به اصل تمامیت، $-S$ دارای کوچکترین کران بالایی است، یعنی $\sup(-S)$ موجود است. از شکل زیر حدس زده می‌شود که $\inf S=-\sup(-S)$.



برای بررسی این شهود، فرض کنید $\alpha_0=\sup(-S)$. پس

$$\forall u\in -S,\ \alpha_0\geq u,$$

و اگر $t\geq u$ برای هر $u\in -S$ آن‌گاه $\alpha_0\leq t$. اما با توجه به تعریف $-S$ داریم

$$\forall u\in -S,\ \exists x\in S,\ u=-x,$$

پس

$$\forall x\in S,\ \alpha_0\geq -x \Rightarrow x\geq -\alpha_0$$

یعنی $-\alpha_0$ یک کران پایینی برای S است. اگر $t\leq x$ برای هر $x\in S$ آن‌گاه

$$-t\geq -x,\ \forall -x\in -S,$$

یعنی $-t$ یک کران بالایی برای $-S$ است پس $\alpha_0\leq -t$ در نتیجه $t\leq -\alpha_0$.

بنابراین $-\alpha_0$ بزرگترین کران پایینی S است، یعنی $-\alpha_0=\inf S$ و در نتیجه

$$\inf S=-\alpha_0=-\sup(-S).$$

برخی از خواص سوپریمم و اینفیمم در مثال زیر آورده شده‌اند، برای زیرمجموعه‌های A و B از $\mathbb{R}$ و عدد حقیقی λ، قرار می‌دهیم

$$A+B=\{a+b : a\in A,\ b\in B\},$$
$$\lambda A=\{\lambda a : a\in A\},$$
$$a+B=\{a+b : b\in B\},$$
$$A+b=\{a+b : a\in A\},$$
$$AB=\{ab : a\in A,\ b\in B\}.$$

مثال ۳۱. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های ناتهی و کراندار از اعداد حقیقی و $\lambda\in\mathbb{R}$ است. در این صورت

الف) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$؛

ب) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$؛

ج) $\sup \lambda A=\begin{cases}\lambda \sup A & \lambda\geq 0\\ \lambda \inf A & \lambda\leq 0\end{cases}$؛

د) $\inf \lambda A=\begin{cases}\lambda \inf A & \lambda\geq 0\\ \lambda \sup A & \lambda\leq 0\end{cases}$؛

هـ) $\sup(a+B)=a+\sup B$ ، $\inf(a+B)=a+\inf B$؛

و) $\sup(AB)=\sup(A)\sup(B)$؛

ز) اگر $A\subset B$ آنگاه $\sup(A)\leq\sup(B)$ و $\inf A\geq\inf B$؛

ح) $\sup(A\cup B)=\max\{\sup(A),\sup(B)\}$.

حل. الف) چون A و B ناتهی‌اند پس $A+B$ ناتهی است. از مثال (۲۴) دیدیم که $A+B$ کراندار است. پس دارای سوپریمم می‌باشد، فرض کنید

$$\alpha=\sup(A),\quad \beta=\sup(B),\quad \gamma=\sup(A+B).$$

در این صورت برای هر $a \in A$ و $b \in B$ داریم

$$a \leq \alpha , \quad b \leq \beta \Rightarrow a+b \leq \alpha+\beta$$

یعنی $\beta+\alpha$ یک کران بالای $A+B$ است. بنابراین

$$\gamma \leq \alpha+\beta$$

از طرفی برای هر $\varepsilon > 0$، اعداد $a_1 \in A$ و $b_1 \in B$ وجود دارند به طوری که

$$a_1 > \alpha - \frac{\varepsilon}{2} , \quad b_1 > \beta - \frac{\varepsilon}{2}$$

بنابراین

$$a_1+b_1 > \alpha+\beta-\varepsilon \Rightarrow \gamma \geqslant a_1+b_1 > \alpha+\beta-\varepsilon$$

پس نشان دادیم که برای هر $\varepsilon > 0$

$$\gamma > \alpha+\beta-\varepsilon$$

بنابراین $\alpha+\beta \geqslant \gamma$ ، با ترکیب دو نتیجه $\alpha+\beta \leq \gamma$ و $\gamma \leq \alpha+\beta$ نتیجه می‌گیریم که

$$\sup(A+B) = \gamma = \alpha+\beta = \sup(A)+\sup(B).$$

ب) مشابه (الف) است.

ج) اگر $\lambda = 0$ باشد آنگاه

$$\sup(\lambda A) = \sup\{0\} = 0 = \lambda \sup(A),$$
$$\inf(\lambda A) = \inf\{0\} = 0 = \lambda \inf(A).$$

اگر $\lambda > 0$ باشد. قرار می‌دهیم $\alpha = \sup(A)$، در این صورت

$$\forall a \in A , \ \alpha \geqslant a \Rightarrow \forall \lambda a \in \lambda A , \ \lambda\alpha \geqslant \lambda a,$$

پس

$$\lambda\alpha \geqslant \sup(\lambda A) \geqslant \lambda a \quad \forall \lambda a \in \lambda A,$$

در نتیجه $\lambda\alpha \geqslant \sup(\lambda A)$. علاوه بر آن برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $a_1 \in A$ وجود دارد به طوری که

$$a_1 > \alpha - \frac{1}{\lambda}\varepsilon,$$

در نتیجه

$$\lambda a_1 > \lambda\alpha - \varepsilon,$$

بنابراین

$$\sup(\lambda A) \geq \lambda a_1 > \lambda\alpha - \varepsilon$$

یعنی

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \sup(\lambda A) > \lambda\alpha - \varepsilon.$$

بنابراین $\lambda\alpha \leq \sup(\lambda A)$. با ترکیب در نتیجه $\lambda\alpha \leq \sup\lambda A$ و $\lambda\alpha \geq \sup(\lambda A)$ داریم

$$\sup\lambda A = \lambda\alpha = \lambda\sup(A).$$

اگر $\lambda < 0$ باشد و فرض کنیم $\beta = \inf A$ آن گاه

$$\forall a \in A, \quad \beta \leq a$$

پس

$$\lambda\beta \geq \lambda a \qquad (\lambda < 0)$$

یعنی $\sup(\lambda A) \geq \lambda\beta$. (زیرا $\lambda\beta$ یک کران بالای λA) حال برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $a_1 \in A$ وجود دارد به طوری که

$$a_1 < \beta - \frac{1}{\lambda}\varepsilon$$

پس

$$\lambda a_1 > \lambda\beta - \varepsilon \Rightarrow \sup(\lambda A) \geq \lambda a_1 > \lambda\beta - \varepsilon$$

بنابراین $\forall \varepsilon > 0, \ \lambda\beta - \varepsilon < \sup\lambda A$ در نتیجه $\sup(\lambda A) \geq \lambda\beta$. پس وقتی $\lambda < 0$ داریم $\sup\lambda A = \lambda\inf A$.

د) مشابه (ج) است.

هـ) فرض کنید $A = \{a\}$ و حکم از (الف) و (ب) حاصل می‌شود زیرا

$$\sup(A) = \inf(A) = a.$$

و) به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

ز) به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

ح) به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

اصل تمامیت دارای نتایج بسیار جالبی است که در زیر برخی از آنها را به عنوان تمرین آورده ایم. جهت رجوع در قسمت های دیگر درس این خواص را با LUB شماره‌گذاری کرده و شماره داده‌ایم.

۱.

LUB1. برای هر عدد حقیقی x، عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $n>x$.

۲. مجموعه اعداد طبیعی از بالا کراندار نیست.

۳.

LUB2 (خاصیت ارشمیدسی) فرض کنید $x>0$. در این صورت برای هر $y\in\mathbb{R}$، عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $nx>y$.

۴.

LUB3. به ازای هر $\varepsilon>0$، عدد $n\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $\frac{1}{n}<\varepsilon$.

۵.

LUB4. برای هر $x\in\mathbb{R}$، اعداد m و n در $\mathbb{Z}$ وجود دارند به طوری که $m<x<n$.

۶.

LUB5. برای هر $x\in\mathbb{R}$، عدد منحصربفرد $n\in\mathbb{Z}$ وجود دارد به طوری که $n\le x<n+1$

۷.

LUB6. به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ و هر $N\in\mathbb{N}$، عدد صحیح n وجود دارد به طوری که

$$\frac{n}{N}\le x<\frac{n+1}{N}.$$

۸.

LUB7. به ازای هر عدد حقیقی مثبت x، عدد طبیعی منحصربفرد n وجود دارد به طوری که

$$\frac{n(n+1)}{2}>x\geqslant\frac{n(n-1)}{2}$$

۹.

LUB 8 . به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ و هر $\varepsilon>0$، عدد گویای r وجود دارد به طوری که

$$|x-r|<\varepsilon.$$

۱۰. فرض کنید A و B دو زیرمجموعه ناتهی از $\mathbb{R}$ اند و شرایط زیر برقرار است

الف) $A\cup B=\mathbb{R}$

ب) $x\in A\ ,\ y\in B \Rightarrow x<y$

در این صورت یا A دارای بزرگترین عضو است یا B دارای کوچکترین عضو است،
(خاصیت فوق به خاصیت ددکیند معروف است)

۱۱. نشان دهید خاصیت ددکیند با اصل تمامیت در $\mathbb{R}$ معادل است،

۱۲.

LUB9 . بین هر دو عدد حقیقی مجزا، حداقل یک عدد گویا وجود دارد (خاصیت فوق را چگال بودن اعداد گویا در اعداد حقیقی نامند)

۱۳. بین هر دو عدد حقیقی مجزا تعداد نامتناهی عدد گویا وجود دارد.

۱۴. بین هر دو عدد حقیقی مجزا تعداد نامتناهی عدد گنگ وجود دارد.

۱۵. برای هر عدد مثبت حقیقی x و عدد طبیعی n، عدد مثبت منحصربه‌فردی مانند y وجود دارد به طوری که $y^n=x$. (خاصیت فوق را وجود ریشه nام نامند).

۱۶. نشان دهید

$$\forall a,b\in\mathbb{R}^+,\ n\in\mathbb{N},\quad (ab)^{1/n}=a^{1/n}b^{1/n}.$$

۱۷. نشان دهید: اگر $a>0$ و $x,y\in\mathbb{R}$ آنگاه

$$a^{x+y}=a^x\cdot a^y.$$

۱۸. نشان دهید: اگر $a>0$ و $x,y\in\mathbb{R}$ آنگاه

$$(a^x)^y=a^{xy}.$$

مثال ۳۲. در مثال (۲) دیدیم که معادله $x^2=2$ در مجموعه اعداد گویا دارای جواب نیست. به کمک اصل موضوع تمامیت (کامل بودن) در $\mathbb{R}$ می‌توان ثابت کرد که اگر $a\geq 0$ عددی حقیقی باشد آنگاه معادله $x^2=a$ در اعداد حقیقی دارای جواب است.

هر عدد حقیقی x برقرار در معادله $x^2=a$ برای $a\geq 0$ را یک ریشه دوم a نامیم.

قبل از بررسی مسئله فوق، توجه داریم که اعداد منفی نمی‌توانند ریشه دوم داشته باشند، زیرا از $x^2=a$ دیده می‌شود که به دلیل مربع بودن، a باید نامنفی باشد. اگر $a=0$ آنگاه $x=0$ تنها ریشه دوم است. پس فرض می‌کنیم $a>0$. از $x^2=a$ نتیجه می‌شود که $x\neq 0$ و $(-x)^2=a$، پس x و قرینه آن ریشه‌های دوم خواهند بود. به عبارت دیگر، اگر $a>0$ ریشه دوم داشته باشد آنگاه دو ریشه دوم دارد، یکی مثبت و دیگری منفی است. علاوه بر آن حداکثر دو ریشه‌ی دوم دارد زیرا اگر $x^2=a$ و $y^2=a$ آنگاه $x^2=y^2$ و در نتیجه

$$(x-y)(x+y)=0$$

پس یا $x=y$ یا $x=-y$. لذا اگر a ریشه‌ی دوم داشته باشد، دقیقاً دو ریشه دوم دارد. حال به بررسی معادله $x^2=a$ برای $a\geq 0$ توسط اصل تمامیت می‌پردازیم، یعنی ثابت می‌کنیم که:

هر عدد حقیقی نامنفی a دارای ریشه‌ی دوم نامنفی منحصر به فردی است.

حل. اگر $a=0$ باشد آنگاه 0 تنها ریشه دوم است. پس فرض کنید $a>0$. S را مجموعه‌ی تمام xهای مثبتی در نظر می‌گیریم که $x^2\leq a$.

$$S=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2\leq a\}.$$

چون $(1+a)^2>a$، پس عدد $1+a$ یک کران بالایی برای S است. علاوه بر آن S ناتهی است، زیرا عدد $\frac{a}{1+a}$ در S است، در واقع

$$a^2\leq a(1+a)^2$$

پس

$$\frac{a^2}{(1+a)^2} \le a,$$

بنابراصل تمامیت، S دارای کوچکترین کران بالایی مانند b است. چون

$$\frac{a}{1+a} \le b,$$

پس $b>0$. حال یکی از سه حالت زیر امکان پذیر است:

$$b^2>a, \quad b^2<a, \quad b^2=a.$$

اگر $b^2>a$ و

$$c = b-(b^2-a)/(2b) = \frac{1}{2}\left(b+\frac{a}{b}\right)$$

آنگاه $0<c<b$ و

$$c^2 = b^2-(b^2-a)+\frac{b^2-a^2}{4b^2} = a+\frac{b^2-a^2}{4b^2} > a$$

بنابراین به ازای هر x در S، $c^2>x^2$ و در نتیجه به ازای هر x در S، $c>x$ یعنی c یک کران بالایی برای S است. چون $c<b$، به تناقض می‌رسیم زیرا $b=\sup S$. پس نامساوی $b^2>a$ امکان پذیر نیست.

اگر $b^2<a$، چون $b>0$، می‌توان عدد c مثبت را طوری اختیار کرد که $c<b$ و $c<\frac{a-b^2}{3b}$. بنابراین

$$(b+c)^2 = b^2+c(2b+c) < b^2+3bc < b^2+(a-b^2) = a.$$

پس $b+c$ در S است. چون $b+c>b$ این با کران بالایی بودن b برای S در تناقض است. یعنی نامساوی $b^2<a$ امکان پذیر نیست و تنها حالتی که می‌ماند $b^2=a$ خواهد بود.

۳۹. نمایش اعداد حقیقی. هر عدد حقیقی به شکل

$$r = a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}, \qquad (۲۱)$$

که در آن a_0 عدد صحیح نامنفی بوده و $a_1, a_2, \ldots, a_n$ اعداد صحیح با شرط $0\le a_i\le 9$ باشند را معمولاً به شکل خلاصه‌تر $r=a_0.a_1a_2\ldots a_n$ نمایش می‌دهیم. این نمایش

را نمایش اعشاری متناهی r نامیم. به عنوان مثال

$$\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=0.5, \qquad \frac{1}{4}=\frac{2}{10}+\frac{5}{100}=0.25,$$
$$\frac{1}{50}=\frac{2}{10^2}=0.02, \qquad \frac{29}{4}=7+\frac{2}{10}+\frac{5}{10^2}=7.25.$$

در این وضعیت r یک عدد گویا است. در واقع اعداد گویا با تعداد ارقام اعشار متناهی، اعدادی به شکل $r=\frac{a}{10^n}$ هستند که در آن a عددی صحیح است. اما لزوماً برای هر عدد گویا نمی‌توان نمایش اعشاری متناهی یافت. به عنوان مثال، اگر عدد گویای $\frac{1}{3}$ دارای نمایش اعشاری متناهی باشد باید به ازای عددی صحیح مانند a داشته باشیم $\frac{1}{3}=\frac{a}{10^n}$ یا

$$3a=10^n,$$

اما این امکان پذیر نیست، زیرا 3 عامل هیچ توانی از 10 نمی‌باشد.

به طور کلی، می‌توان عدد حقیقی دلخواه $x>0$ را با انتخاب n به قدر کافی بزرگ با هر درجه‌ی دقتی که مطلوب ما باشد به مجموعی به شکل (۲۱) نزدیک کرد. زیرا اگر x یک عدد غیرصحیح باشد آن‌گاه دو عدد صحیح متوالی a_0 و a_0+1 وجود دارد به طوری که

$$a_0<x<a_0+1,$$

حال پاره خط واصل بین a_0 و a_0+1 را به ده قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. اگر x یکی از نقاط تقسیم نباشد آن‌گاه x باید بین دو نقطه تقسیم متوالی قرار گیرد. پس نامساوی

$$a_0+\frac{a_1}{10}<x<a_0+\frac{a_1+1}{10},$$

نتیجه می‌شود که در آن a_1 عددی صحیح است $(0\le a_1\le 9)$. حال پاره خط واصل بین $a_0+\frac{a_1}{10}$ و $a_0+\frac{a_1+1}{10}$ را به ده قسمت مساوی (هر یک به طول 10^{-2}) تقسیم می‌کنیم و این عمل را ادامه می‌دهیم. اگر پس از چند مرحله یکی از نقاط تقسیم بر x منطبق شود آن‌گاه x عددی به شکل (۲۱) است. در غیر این صورت این عمل تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد و مجموعه‌ای نامتناهی از اعداد صحیح a_1، a_2، a_3، ... تولید می‌شود. در این حالت گوییم x دارای نمایش اعشاری نامتناهی زیر است

$$x=a_0.a_1a_2a_3\ldots, \qquad (۲۲)$$

و در مرحله nام x در نامساوی های

$$(۲۳)\qquad a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_n}{10^n} < x < a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_n+1}{10^n},$$

صدق می کند.

این دو تقریب در (۲۳) برای x، یکی از پایین و دیگری از بالا، به وسیله دو نمایش اعشاری متناهی که به اندازه 10^{-n} باهم اختلاف دارند به دست می آید. پس با اختیار n به قدر کافی بزرگ، می توانیم در تقریب های حاصل به هر درجه ای از دقت که مطلوب ما باشد، برسیم.

مثال ۳۳. برای $x=\frac{1}{3}$ داریم

$$a_0=0,\quad a_n=3,\quad n\geq 1$$

پس $\frac{1}{3}$ دارای نمایش اعشاری نامتناهی $\frac{1}{3}=0.333\ldots$ است.

مثال ۳۴. هر عدد گنگ دارای نمایش اعشاری نامتناهی است. به عنوان مثال، عدد $x=\sqrt{2}$ را می توان با آزمایش و خطا هر تعداد رقم در سطح محاسبه کرد. عدد $\sqrt{2}$ بین 1.4 و 1.5 قرار دارد، زیرا $(1.4)^2<2<(1.5)^2$. به همین ترتیب، با مجذور کردن و مقایسه نمودن با 2، تقریب های دیگر را می توان به دست آورد.

$$1.41<\sqrt{2}<1.42,$$

$$1.414<\sqrt{2}<1.415,$$

$$1.4142<\sqrt{2}<1.4143,$$

باید توجه کرد که فرآیند فوق، دنباله ای از بازه ها به طول های $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots$ را تولید می کند که هر یک محتوا در بازه قبلی است و هر کدام حاوی نقطه x می باشد. این بازه ها را بازه های تودرتو نامند و برای ساختن اعداد گنگ از اعداد گویا به عنوان روشی پایه ای به کار می روند.

۴۰. روش یافتن نمایش اعشاری اعداد حقیقی با استفاده از اصل تمامیت. فرض کنید x عدد حقیقی مثبتی است. a_0 را بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x می‌گیریم. با انتخاب a_0، فرض کنید a_1 بزرگترین عدد صحیح برقرار در شرط

$$a_0+\frac{a_1}{10}\le x,$$

است. به طور کلی، اگر a_0، a_1، ...، a_{n-1} اختیار شده باشند، فرض کنید a_n بزرگترین عدد صحیح برقرار در شرط

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\dots+\frac{a_n}{10^n}\le x, \qquad (۲۴)$$

است. حال S را مجموعه‌ی تمام اعداد به فرم

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\dots+\frac{a_n}{10^n} \qquad (۲۵)$$

به ازای $n=0,1,2,\dots$ می‌گیریم. در این صورت S ناتهی و از بالا کراندار است و به آسانی دیده می‌شود که x کوچکترین کران بالای S است. اعداد صحیح $a_0, a_1, \dots$ حاصل را می‌توان به کار برد و بسط اعشاری x را تعریف کرده و نوشت

$$x=a_0.a_1a_2a_3\dots,$$

یعنی رقم nام آن، بزرگترین عدد صحیحی است که در (۲۴) صدق می‌کند.

۴۱. توضیح. چنانچه علامت نامساوی $\le$ در (۲۴) را با $<$ عوض کنیم، تعریف بسط‌های اعشاری، اندکی متفاوت است. کوچکترین کران بالای کلیه اعداد به شکل (۲۵) مجدداً x است، گرچه اعداد صحیح $a_0, a_1, \dots$ لزوماً همان‌هایی که در (۲۴) صدق می‌کنند، نمی‌باشند. به عنوان مثال در مورد $x=\frac{1}{8}$ داریم $a_0=0$، $a_1=1$، $a_2=2$، $a_3=5$ و به ازای هر $n\geq 4$، $a_n=0$، پس

$$\frac{1}{8}=0.125$$

اما با در نظر گرفتن علامت $<$ در (۲۴) داریم $a_0=0$، $a_1=1$، $a_2=2$، $a_3=4$ و به ازای هر $n\geq 4$، $a_n=9$ و نمایش اعشاری $\frac{1}{8}=0.124999\dots$ را داریم.