فصل دوم – مفاهیم حساب انتگرال

۱.۲ سیر تاریخی حساب انتگرال

روشی که می توان با آن حساب دیفرانسیل و انتگرال را فهمید، این است که با بحث کاملی از دستگاه اعداد حقیقی شروع کنیم، همان گونه که در فصل اول چنین کردیم و سپس مبحث را قدم به قدم به صورت منطقی و دقیق عرضه نمائیم. با آن که حساب دیفرانسیل و انتگرال اصولاً ابزاری در دست مهندسان، فیزیکدانان، شیمی دانان و ... است، باید با توسل به شهود و حل مسائل متعدد مهارتهای صحیح کاربرد این شاخه از ریاضیات را تقویت کرد. این درس علمی استنتاجی و شاخه ای از ریاضیات با عنوان آنالیز ریاضی است و در عین حال باید توجه داشت که این مبحث ریشه های عمیقی در مسائل فیزیک داشته و قسمت اعظم توانائی خود را از کاربردهای متنوع می گیرد. روش ارائه مطالب، از گسترش تاریخی و فلسفی حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی ناشی شده است. بدین منظور، حساب انتگرال را قبل از مبحث مشتق آورده ایم، که گویای سیر تاریخی این علم نیز می باشد.

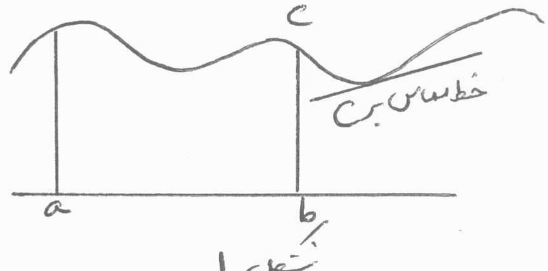
مفهوم انتگرال را ابتدا برای توابع پله ای تعریف می کنیم. چون انتگرال یک تابع پله ای همان به دست آوردن یک مجموع متناهی است و بدین لحاظ نظریه انتگرال گیری در این حالت بسیار ساده خواهد بود. سپس مفاهیم بیان شده، از توابع پله ای به توابع کلی تر تعمیم داده می شود. اما در مسیر ارائه مطالب، ابتدا به تاریخچه علم حساب دیفرانسیل و انتگرال خواهیم پرداخت و با ورود به مبحث توابع، انواع توابع را بررسی کرده و سپس توابع پله ای و افرازها را خواهیم دید. در این رهیافت، گاهی اوقات از کاربردهای حساب انتگرال غافل نخواهیم بود. مباحث مربوط به پیوستگی، مشتق، کاربردهای مشتق، انتگرال های نامعین و تکنیک های انتگرال گیری در فصل های بعد مطرح می شوند.

ابزار مطرح شده در حساب دیفرانسیل و انتگرال، وسیله ای توانا برای حل مسائل متنوعی در فیزیک، هندسه، شیمی، زمین شناسی، زیست شناسی و دیگر علوم است. برای آشنائی بیشتر با مسائل متنوعی که توسط روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال بررسی می شوند، نیاز به

بیان برخی از کاربردهایی است که قرن‌ها مورد توجه متفکرین بوده است. این تفکرات با مفاهیم سرعت، مساحت، حجم، میزان رشد، پیوستگی، خط مماس و مفاهیمی دیگر از مباحث مختلف در ارتباط هستند. حساب دیفرانسیل و انتگرال ما را وادار می‌سازد تا تأمل نموده و به دقت در مورد معانی این مفهوم‌ها فکر کنیم. از توانائیهای دیگر این مبحث، قدرت متحد کننده آن است. می‌توان آنها را چنان تنظیم کرد که در اطراف دو مسئله نسبتاً خاص که دارای طبیعت هندسی اند دور بزنند. ابتدا آگاهی گذرا به این دو مسئله داشته باشیم.

منحنی c در شکل (۱) را در نظر بگیرید. فرض کنید منحنی چنان است که هر خط قائم به آن، منحنی را حداکثر یک بار قطع می‌کند. اولین مسئله تعیین عددی است که نشان دهندهٔ مساحت محصور به این منحنی بالای خط افقی و محدود به دو پاره خط قائم موازی است. حال به خط مماسی که بر منحنی رسم شده، توجه کنید. دومین مسئله تعیین عددی است که شیب این خط را اندازه بگیرد.

اساساً کار حساب دیفرانسیل و انتگرال تنظیم و حل دقیق این دو مسئله خاص است. این مبحث به ما توانائی تعریف مفاهیم مساحت و خط مماس را می‌دهد و این امکان را فراهم می‌کند که سطح ناحیه‌ای مفروض یا شیب خط مماس داده شده‌ای را محاسبه کنیم. حساب انتگرال به مسئله مساحت توجه دارد که در این فصل آن را خواهیم دید و حساب دیفرانسیل با مسئله مماس‌ها سروکار دارد که در فصل‌های بعد مطرح خواهد شد.



شکل ۱

حساب انتگرال بیش از ۲۰۰۰ سال قبل، زمانی پدید آمد که یونانیان به کمک روشی به نام روش استنباع، سعی در تعیین مساحت‌ها داشتند. اگر سطح ناحیه مفروضی را بخواهیم در آن یک ناحیهٔ چندضلعی محاط می‌کنیم که به ناحیه داده شده نزدیک باشد و بتوان مساحت

چند ضلعی را به سادگی حساب کرد. سپس تا حد چند ضلعی دیگری اختیار می کنیم که تقریب بهتری باشد و این عمل را با اختیار چند ضلعی هایی با اضلاع بیشتر و بیشتر ادامه می دهیم تا ناحیه مفروض اشباع گردد. به عنوان مثال، در شکل (۲) روش اشباع برای مساحت یک نیم دایره دیده می شود.

شکل ۲. روش اشباع

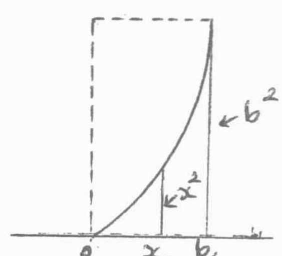
روش دقیق توسط ارشمیدس، جهت یافتن دستورهایی دقیق برای مساحت دایره و تعدادی شکل خاص دیگر با موفقیت بکار رفت.

پس از هجده قرن بعد از ارشمیدس، با ورود نشانه هایی از هند و تاثیر ریاضیدانان ایرانی و بیان علامت های + و - و نمادگذاری اعشاری و بالاخص جبر مقدماتی که اکثر دانش آموزان دبیرستانی امروزه با آن آشنا هستند اما در زمان ارشمیدس کاملاً ناشناخته بود، موفقیت های چشمگیری توسط چند ریاضیدان ایتالیایی، تارتاگلیا، کاردانو و فراری در یافتن جوابهای جبری معادلات درجه سوم و چهارم موجب فعالیت گسترده ای در حوزه ریاضیات شد و به رشد و قبول یک زبان جبری جدید و برتر کمک شود. با معرفی همه جانبه علامت های جبری، توجه به روش اشباع دوباره زنده شد و در قرن ۱۶ میلادی افرادی چون کاوالیری، توریچلی، رابروال، فرما، پاسکال و والیس کشفیاتی در این زمینه بدست آوردند. روش اشباع به تدریج به بحثی تبدیل شد که امروزه آن را حساب انتگرال می نامند و مطالبی جدید و توانا با کاربردهایی بسیار متنوع دارد که نه تنها در مسائل هندسی مربوط به سطح ها و حجم ها مورد استفاده قرار می گیرد بلکه در سایر مسائل علوم نیز کاربرد دارد. این شاخه از ریاضیات که برخی از کیفیات اصلی روش اشباع در آن حفظ شده، عظیم ترین جنبش خود را در قرن هفدهم داشت که مرهون تلاش های اسحق نیوتن و گوتفرید لایب نیتز بوده است و گسترش این بحث تا قرن نوزدهم ادامه یافت تا اینکه توسط آگوستین - لویی کشی و برنهارد ریمان بر پایه

ریاضی تحلیلی استوار گردید. هنوز هم توسیع های دیگری از این نظریه در ریاضیات معاصر صورت می گیرند.

پیش از ورود به بحث حساب انتگرال به صورت منظم، روش اشباع را مستقیماً درمورد یکی از اشکال خاصی که توسط ارشمیدس بررسی شده است، بکار می بریم.

ناحیه مورد نظر در شکل (۳) نمایش داده شده است و آن را می توان چنین توصیف کرد. هر گاه نقطه ای دلخواه بر قاعده این شکل اختیار کرده و فاصله آن تا 0 را x بنامیم آن گاه فاصله قائم این نقطه تا منحنی x^2 است. اگر طول قاعده برابر b باشد ارتفاع شکل مساوی b^2 است. فاصله قائم x تا منحنی را عرض در x نامیم. منحنی نمونه ای است از یک سهمی و ناحیه محصور به آن و دو پاره خط یک قطعه سهمی نامیده می شود.



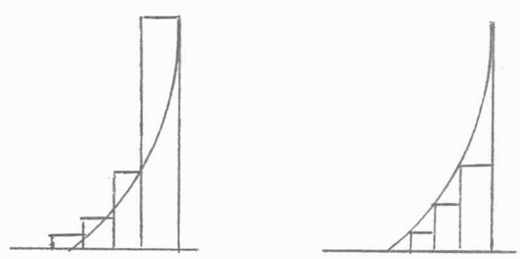
شکل ۳

همان طور که دیده می شود، شکل (۳) را می توان در مستطیلی به قاعده b و ارتفاع b^2 محاط کرد. با مشاهده این شکل در می یابیم که مساحت قطعه سهمی از نصف مساحت مستطیل یعنی $\frac{b^3}{2}$ کمتر است. ارشمیدس کشف حیرت آوری کرد و آن این بود که مساحت قطعه سهمی دقیقاً یک سوم مساحت مستطیل یعنی $A = \frac{b^3}{3}$ است که در آن A مساحت قطعه سهمی است. لازم به ذکر است که قطعه سهمی دقیقاً همان قطعه سهمی که ارشمیدس کشید نیست و جزئیاتی که می آیند درست همان هایی که مورد استفاده او قرار گرفته اند، نمی باشند. معهذا اندیشه اصلی همان اندیشه ارشمیدس است و روش همان روش اشباع منتهی با نمادهای امروزی است.

به زبان ساده، این روش چنین است: شکل را به نوارهایی تقسیم می کنیم و با استفاده از دو مجموعه مستطیل ها که در شکل (۴) نمایش داده شده اند، دو تقریب برای ناحیه، یکی

از پایین و دیگری از بالا، به دست می‌آوریم. استفاده از مستطیل‌ها بجای چندضلعی‌های دلخواه برای ساده کردن محاسبات است. مساحت قطعه سهمی از مساحت همهٔ مستطیل‌های داخلی بیشتر و از مساحت همهٔ مستطیل‌های خارجی کمتر است.

اگر هر نوار را تقسیم کنیم تا تقریبی جدید با تعداد بیشتری نوار به دست آید، مساحت همه مستطیل‌های داخلی افزایش و مساحت کلیه مستطیل‌های خارجی کاهش خواهد یافت. ارشمیدس دریافت که می‌توان با انتخاب تعدادی کافی نوار مستطیلی، مساحت تقریبی قطعه سهمی را تا هر درجه از دقت که مطلوب باشد، به دست آورد.



تقریب از بالا — تقریب از پایین

شکل ۴

در مثال زیر، روش اشباع را با نمادگذاری امروزه و استفاده از خواص جبری مجموع‌ها به دست می‌آوریم.

مثال ۱. مطلوب است مساحت محصور به سهمی $y=x^2$، خطوط $x=0$ و $x=b$.

حل. برای سادگی، قاعده را به n قسمت مساوی (در قسمت‌های بعد از مباحث این فصل، علت انتخاب طول‌های مساوی آمده است) هر یک به طول $\frac{b}{n}$ تقسیم کنیم (شکل (۵)). نقاط تقسیم که به ازای این مقادیر از x به دست می‌آیند عبارتند از

$$0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \ldots, \frac{(n-1)b}{n}, \frac{nb}{n}=b.$$

نقطه گونه تقسیم متناظر به $x=\frac{kb}{n}$ است که در آن k مقادیر متوالی $0, 1, \ldots, n$ را می‌گیرد. در هر نقطه $\frac{kb}{n}$ مستطیل خارجی به ارتفاع $\left(\frac{kb}{n}\right)^2$ را مطابق شکل (۵) می‌سازیم. مساحت این مستطیل برابر است با حاصل ضرب طول قاعده در ارتفاعش یعنی

$$\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{kb}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3}k^2.$$

مجموع مساحت های کلیه مستطیل های خارجی را S_n می نامیم. پس

$$S_n = \frac{b^3}{n^3}\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right). \qquad (۱)$$

به همین صورت، مستطیل های داخلی را می سازیم. یعنی در هر نقطه $\frac{kb}{n}$ مستطیل داخلی به ارتفاع $\left(\frac{(k-1)b}{n}\right)^2$ را مطابق شکل (۵) می سازیم. مساحت این مستطیل برابر است با

$$\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{(k-1)b}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3}(k-1)^2.$$

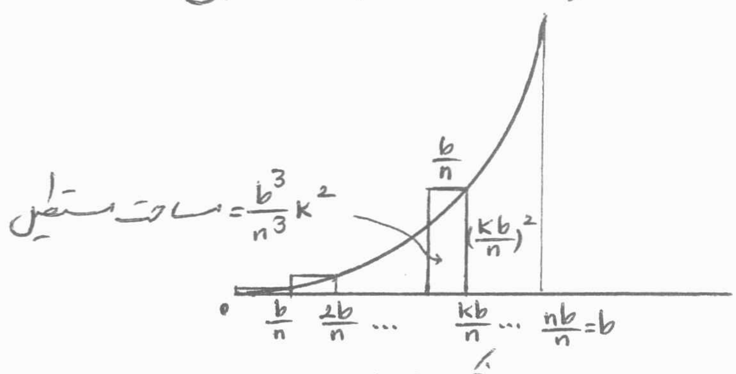
مجموع مساحت های کلیه مستطیل های داخلی را s_n می نامیم. پس

$$s_n = \frac{b^3}{n^3}\left(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right). \qquad (۲)$$

توجه کنید که عاملی که در معادله (۱) در $\frac{b^3}{n^3}$ ضرب شده، مجموع مجذورات n عدد صحیح اولیه است، یعنی

$$1^2+2^2+\cdots+n^2, \qquad (۳)$$

و عامل متناظر در معادله (۲) نیز همان است، جز آن که مجموع فقط $n-1$ جمله دارد.



شکل (۵)

پس کافی است حاصل $1^2+2^2+\cdots+n^2$ را به ازای هر عدد صحیح $n \geq 1$ به دست آوریم. برای این منظور از اتحاد $(k+1)^3 = k^3+3k^2+3k+1$ شروع کرده و آن را به فرم زیر می نویسیم

$$3k^2+3k+1 = (k+1)^3 - k^3$$

با فرض $k=1,2,3,\ldots,n-1$ داریم

$$3(1)^2+3(1)+1 = 2^3-1^3,$$

$$3(2)^2+3(2)+1 = 3^3-2^3,$$

$$\vdots$$

$$3(n-1)^2+3(n-1)+1 = n^3-(n-1)^3.$$

با جمع طرفین نظیر به نظیر، همهٔ جملات طرف راست به غیر از دو جمله حذف می‌شوند و داریم

$$3(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2)+3(1+2+\cdots+(n-1))+(n-1)=n^3-1^3. \qquad (۴)$$

برای به دست آوردن مجموع دومین پرانتز در طرف چپ، که جمع جملات یک تصاعد حسابی است، قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} I &= 1+2+\cdots+(n-1)\\ +\quad I &= (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\\ \hline 2I &= \underbrace{n+n+\cdots+n}_{n-1\ \text{جمله}} = n(n-1) \end{aligned}$$

پس $I=\frac{n(n-1)}{2}$ و از معادلهٔ (۴) داریم

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2 &= \frac{1}{3}\left[n^3-1-n+1-\frac{3n(n-1)}{2}\right]\\ &= \frac{1}{3}\left[n^3-n-\frac{3n^2-3n}{2}\right]\\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{2n^3-3n^2+n}{2}\right]\\ &= \frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} \qquad (۵) \end{aligned}$$

با افزودن n^2 به طرفین (۵)، داریم

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} \qquad (۶)$$

حال با داشتن روابط (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2<\frac{n^3}{3}<1^2+2^2+\cdots+n^2 \qquad (۷)$$

رابطهٔ (۷) به ازای هر عدد صحیح $n\geq 1$ برقرار است. نامعادلهٔ (۷) را در $\frac{b^3}{n^3}$ ضرب کرده و از (۲) و (۳) استفاده می‌کنیم. نتیجه می‌گیریم که به ازای هر n،

$$s_n<\frac{b^3}{3}<S_n, \qquad (۸)$$

نامساوی‌های (۸) بیان می‌کنند که به ازای هر n صحیح، $\frac{b^3}{3}$ بین s_n و S_n قرار دارد. حال ثابت می‌کنیم که $\frac{b^3}{3}$ تنها عددی است که از این خاصیت برخوردار است. به عبارت دیگر ادعا می‌کنیم که اگر A عددی باشد که در نامساوی‌های

$$s_n<A<S_n, \qquad (۹)$$

به ازای هر عدد صحیح مثبت n صدق کند آنگاه $A = \frac{b^3}{3}$. از این مطلب ارشمیدس نتیجه گرفت که مساحت قطعه سهمی برابر $\frac{b^3}{3}$ است.

برای اثبات $A = \frac{b^3}{3}$ از نامساوی های (۷) یکبار دیگر استفاده می کنیم. با افزودن n^2 به دو طرف نامساوی سمت چپ (۷) داریم

$$1^2+2^2+\dots+n^2 < \frac{n^3}{3}+n^2.$$

با ضرب طرفین در $\frac{b^3}{n^3}$ و استفاده از (۲) داریم

$$\bar{S}_n < \frac{b^3}{3}+\frac{b^3}{n}. \qquad (۱۰)$$

به همین ترتیب اگر n^2 را از طرفین نامساوی سمت راست (۷) کم و سپس آن را در $\frac{b^3}{n^3}$ ضرب کنیم، داریم

$$\frac{b^3}{3}-\frac{b^3}{n} < \underline{s}_n, \qquad (۱۱)$$

بنابراین، هر Aیی که در (۹) صدق کند باید در

$$\frac{b^3}{3}-\frac{b^3}{n} < A < \frac{b^3}{3}+\frac{b^3}{n}, \qquad (۱۲)$$

به ازای هر عدد صحیح $n \geq 1$ نیز صدق کند. یکی از سه حالت زیر اتفاق می افتد

$$A > \frac{b^3}{3}, \quad A < \frac{b^3}{3}, \quad A = \frac{b^3}{3}.$$

کافی است نشان دهیم که برقراری هر یک از دو حالت $A > \frac{b^3}{3}$ یا $A < \frac{b^3}{3}$ منجر به تناقض می شود و در نتیجه حالت سوم یعنی $A = \frac{b^3}{3}$ برقرار خواهد شد.

فرض کنید $A > \frac{b^3}{3}$، از دومین نامساوی در (۱۲)، نتیجه می شود که به ازای هر عدد صحیح $n \geq 1$،

$$A - \frac{b^3}{3} < \frac{b^3}{n}.$$

چون $A - \frac{b^3}{3}$ مثبت است می توان طرفین را بر $A - \frac{b^3}{3}$ تقسیم کرده و با ضرب نامساوی حاصل در n، به عبارت

$$n < \frac{b^3}{A-\frac{b^3}{3}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

رسید یعنی اعداد طبیعی از بالا کراندارند و این تناقض است. لذا نامساوی $A > \frac{b^3}{3}$ رد می شود.

با استدلالی مشابه، می‌توانیم نامساوی $A < \frac{b^3}{3}$ را رد کنیم. پس باید $A = \frac{b^3}{3}$.

ارشمیدس از محاسباتی شبیه آنچه در مثال (۱) آمد، نتیجه گرفت که مساحت قطعه سهمی مورد بحث $\frac{b^3}{3}$ است. نزدیک به ۲۰۰۰ سال این مطلب به عنوان قضیه‌ای ریاضی مورد قبول بود تا اینکه معلوم شد که باید از دیدگاهی انتقادی‌تر مورد امتحان مجدد قرار گیرد.

می‌دانیم که هر شاخه از معرفت، مجموعه‌ای از اندیشه‌ها است که توسط کلمات و علامت‌ها وصف شده‌اند و زمانی می‌توان پی به این اندیشه‌ها برد که معانی دقیق کلمات و علامت‌ها را بدانیم. دستگاه‌های استنتاجی، شاخه‌هایی از معرفتند که در آنها تعدادی مفهوم "تعریف نشده" از قبل اختیار می‌شوند و بقیه مفاهیم دستگاه برحسب آنها تعریف می‌گردند. چند گزاره درباره این مفاهیم تعریف نشده به عنوان اصول موضوع اختیار می‌شوند و سایر گزاره‌ها را می‌توان از آنها نتیجه گرفت که آنها را قضایا نامیم. آشناترین دستگاه استنتاجی، نظریه اقلیدسی هندسه مقدماتی است. از دیگر دستگاه‌های استنتاجی، دستگاه اعداد حقیقی است که در فصل اول مورد بحث قرار گرفت و همانگونه که دیدیم با در نظر گرفتن اصول موضوعی، دستگاه اعداد حقیقی را شناختیم. مثالی دیگر از چنین وضعیتی، که در فصل اول با آن آشنا شدیم، نظریه مجموعه‌ها بود که بر یک مفهوم تعریف نشده یعنی مجموعه بنیان گذاشته شد.

روح ریاضیات اولیه در یونان، هند و ایران به انضمام تاکیدش بر نظریه و اصل موضوعی بودن هندسه به صورتی که در کتاب اصول (Elements) اقلیدس آمده، تا دوره رنسانس بر افکار ریاضیدانان حاکم بود. با ظهور جبر در قرن ۱۶ میلادی در اروپا و در ایران بعد از اسلام، بالاخص توسط خوارزمی، دوره جدید و پرتوانی در تکامل ریاضیات آغاز شد و سیصد سال بعد شاهد سیلی از کشفیات پراهمیت بود. اما آنچه که در این مرحله به وضوح حضور نداشت، استدلال دقیق منطقی روش استنتاجی و استفاده از اصول موضوع، تعاریف و قضایا بود. وقتی کشفیات جدید رو به کاهش گذارد، دوره‌ای

نو و منتقدانه‌تری پدیدار گشت. ریاضیدانان حس کردند که برای استواری ریاضیات نو بر پایه‌ای محکم باید به اندیشه‌های قدیمی روش استنتاجی رو آورند. این دوره تکامل، که از اوایل قرن نوزدهم شروع و تا به امروز ادامه یافته، به آن درجه از خلوص و تجرید منطقی رسیده که کلیه رشته‌های علمی را تحت الشعاع قرار داده است و همزمان با آن، درک روشنتری از مبانی در تمام ریاضیات را فراهم آورده است.

چنانچه به نتیجه ارشمیدس در مورد مساحت یک قطعه سهمی به صورت جزئی از دستگاه استنتاجی حساب دیفرانسیل و انتگرال نگاه کنیم، نمی‌توان آن را به عنوان یک قضیه پذیرفت، مگر آن که تعریف قابل قبولی از مساحت داده شود. معلوم نیست که اصولاً ارشمیدس آنچه را که او مساحت می‌انگاشت تعریف دقیق کرده باشد. به نظر می‌رسد که او مسلماً می‌دانسته که هر ناحیه‌ای مساحتی مربوط به خود دارد و سپس بر اساس این فرض، مساحتهای نواحی خاصی را محاسبه کرده است. ارشمیدس در محاسباتش از حقایقی در مورد مساحت استفاده کرد که اثبات آنها بدون روشن کردن منظور ما از مساحت امکان پذیر نیست. به عنوان مثال او فرض می‌کرد که اگر یک ناحیه در داخل ناحیه دیگر قرار داشته باشد، مساحت ناحیه کوچکتر نمی‌تواند از مساحت ناحیه بزرگتر، بیشتر باشد. همچنین اگر ناحیه‌ای به چند قسمت تقسیم شود، مجموع مساحت کلیه قسمتها برابر با مساحت کل ناحیه خواهد بود. همه اینها خواصی هستند که ما مایلیم مساحت داشته باشد و مصراً مایلیم که هر تعریف مساحت این خواص را ایجاب نماید. کاملاً امکان دارد که خود ارشمیدس مساحت را به عنوان مفهومی تعریف نشده گرفته و سپس خواصی را که هم اکنون ذکر کردیم به عنوان اصول موضوع مساحت بکار برده باشد. روش ارشمیدس راهی برای تعریف مفهومی به نهایت کلیتر بنام انتگرال پیشنهاد می‌کند. انتگرال نیز به نوبه خود برای محاسبه نه فقط مساحت بلکه کمیاتی نظیر طول قوس، حجم، کار و غیره بکار خواهد رفت. اگر از اصطلاحات حساب انتگرال استفاده کنیم، می‌بینیم که محاسبه‌ای که در مثال (۱) انجام شد، اغلب به این صورت بیان می‌شود:

انتگرال x^2 از 0 تا b برابر $\frac{b^3}{3}$ است.

این محاسبه به طور علامتی به صورت

$$\int_0^b x^2dx = \frac{b^3}{3},$$

نوشته می‌شود. علامت $\int$ (S کشیده) را علامت انتگرال می‌نامند و در سال ۱۶۷۵ توسط لایب‌نیتز معرفی شده است. فرایندی که عدد $\frac{b^3}{3}$ را به دست می‌دهد عمل انتگرال‌گیری خوانده می‌شود. اعداد 0 و b که به علامت انتگرال متصل اند حدود انتگرال‌گیری نام دارند. علامت $\int_0^b x^2dx$ را باید یکجا در نظر گرفت.

برای ورود به بحث اصلی حساب انتگرال، همان‌گونه که در مثال (۱) دیده شد، نیاز به شناخت بهتری از جمع‌بندی داریم. در ادامه مطلب ابتدا به معرفی نماد جمع‌بندی می‌پردازیم سپس ایده‌های اساسی هندسه دکارتی را خواهیم دید. برای ورود به بحث حساب انتگرال، نیاز به مفهوم تابع و شناخت انواع توابع داریم که بحث بعد از هندسه دکارتی را بخود اختصاص داده است. مفهوم مساحت به عنوان یک تابع مجموعه‌ای در ادامه خواهد آمد و با بیان اصل موضوعی مساحت و با شناختی از مفاهیم بازه‌ها از فصل اول داریم در اینجا آن را تکمیل می‌کنیم به سراغ توابع پله‌ای رفته و حساب انتگرال را برای این توابع مطرح کرده و قدم به قدم مفهوم حساب انتگرال را به سرانجام می‌رسانیم.

۲.۲ نماد جمع‌بندی

در محاسبات مربوط به مساحت قطعه سهمی (مثال (۱)) به مجموع

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2, \qquad (۱۳)$$

برخورد کردیم. جمله عمومی در این مجموع به شکل k^2 است و همه جملات با دادن مقادیر 1، 2، 3، ...، n به دست می‌آیند. نماد بسیار مفید و مناسبی وجود دارد که ما را قادر می‌سازد تا مجموعهای این چنینی را به شکل فشرده‌تری بنویسیم. این نماد را نماد جمع‌بندی می‌خوانند و در آن از حرف یونانی سیگما یعنی $\sum$ استفاده می‌شود. با بکار بردن نماد جمع‌بندی

می‌توانیم مجموع (۱۳) را به صورت زیر بنویسیم

$$\sum_{k=1}^{n} k^2,$$

و می‌خوانیم "مجموع k^2 به ازای k از ۱ تا n". اعدادی که در پایین و بالای سیگما ظاهر می‌شوند مبین حدود مقادیری هستند که توسط k گرفته می‌شوند. حرف k را زیرنویس جمعبندی می‌نامند. البته استفاده از حرف k اهمیتی ندارد و هر حرف مناسب دیگری می‌توانند بجای k در نظر گرفته شود. مثلاً بجای $\sum_{k=1}^{n} k^2$ می‌توان نوشت $\sum_{i=1}^{n} i^2$، $\sum_{j=1}^{n} j^2$، $\sum_{m=1}^{n} m^2$ و مانند اینها، که همگی به عنوان نمادهای دیگری برای یک چیز در نظر گرفته می‌شوند. حروف i، j، k، m و مانند اینها را زیرنویس‌های ظاهری می‌خوانند. استفاده از حرف n به عنوان زیرنویس ظاهری در این مثال خاص مناسب نیست زیرا که n قبلاً برای عده جملات به کار رفته است.

تعریف ۱. فرض کنید a_k عددی حقیقی وابسته به عدد صحیح k است. مجموع n عدد حقیقی a_1، a_2، ...، a_n یعنی $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ را با نماد $\sum_{k=1}^{n} a_k$ نمایش می‌دهیم یعنی

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \qquad (۱۴)$$

مثال ۲. الف)

$$\sum_{k=1}^{5} (3k-1) = [3(1)-1] + [3(2)-1] + [3(3)-1] + [3(4)-1] + [3(5)-1]$$
$$= 2 + 5 + 8 + 11 + 14.$$

ب)

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2},$$

ج)

$$\sum_{k=1}^{100} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 98^3 + 99^3 + 100^3.$$

مثال ۳. الف) جمع ده عدد صحیح فرد نخست

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 19,$$

را می‌توان به صورت $\sum_{k=1}^{10} (2k-1)$ نوشت.

ب) به سادگی می‌توان دید که مجموع ده عدد زوج نخست

$$2+4+6+\dots+20,$$

به صورت $\sum_{k=1}^{10} 2k$ است.

امکان دارد که اندیس جمعبندی لزوماً از مقدار $k=1$ شروع نشود. برای مثال

$$\sum_{k=3}^{5} 2^k = 2^3+2^4+2^5,$$

$$\sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5.$$

می‌توانیم در قسمت (الف) مثال (۳) جمعبندی را به صورت

$$\sum_{k=0}^{9} (2k+1),$$

بنویسیم. اما معمولاً شروع در را $k=1$ در نظر گرفته می‌شود مگر اینکه به صراحت اعلام شده باشد.

برخی از خواص مهم نماد سیگما در قضیه زیر آورده شده است.

قضیه ۲. برای اعداد صحیح مثبت m و n، عدد ثابت c و اعداد حقیقی a_k و b_k داریم

الف) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

ب) $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

ج) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$ ، $n>m$.

اثبات. با توجه به خواص عمل جمع در اعداد حقیقی، واضح است.

مثال ۴. الف) از قضیه (۲-الف) و (۲-ب) داریم

$$\sum_{k=1}^{20} (3k^2+4k) = 3\sum_{k=1}^{20} k^2 + 4\sum_{k=1}^{20} k.$$

ب) از قضیه (۲-ج) داریم

$$\sum_{k=1}^{50} k^2 = \sum_{k=1}^{3} k^2 + \sum_{k=4}^{50} k^2$$
$$=(1^2+2^2+3^2)+(4^2+5^2+\dots+50^2).$$

اگر c عددی ثابت و مستقل از اندیس جمعبندی k باشد آنگاه $\sum_{k=1}^{n} c$ به معنای

$$c+c+c+\cdots+c,$$

است. چون n دفعه عدد c باهم جمع می‌شوند، پس

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc. \tag{۱۵}$$

مثال ۵. از (۱۵) داریم

$$\sum_{k=1}^{75} 6 = 75\times 6 = 450.$$

مثال ۶. جمع n عدد صحیح مثبت نخست را به صورت $\sum_{k=1}^{n} k$ می‌نویسیم. اگر حاصل جمع را با S نمایش دهیم، آنگاه

$$S = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n, \tag{۱۶}$$

می‌توان آن را به صورت

$$S = n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1, \tag{۱۷}$$

نیز نمایش داد. اگر (۱۶) و (۱۷) را باهم جمع کنیم، آنگاه

$$2S = \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n \text{ دفعه}}$$
$$= n(n+1),$$

پس

$$S = \frac{n(n+1)}{2},$$

یا

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{۱۸}$$

مثال ۷. مجموع ۱۰۰ عدد نخست متوالی صحیح مثبت را بدست آورید.

حل.
$$1+2+3+\cdots+99+100 = \sum_{k=1}^{100} k$$

با $n=100$ از (۱۸) داریم

$$\sum_{k=1}^{100} k = \frac{n(n+1)}{2}\bigg|_{n=100} = \frac{100(101)}{2} = 5050.$$

مثال ۸. مطلوب است $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

حل. برای به دست آوردن جمع مورد نظر، از اتحاد

$$(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

برای $k = 1, 2, 3, \dots, n$ داریم

$$2^4 = 1^4 + 4(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) + 1$$
$$3^4 = 2^4 + 4(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) + 1$$
$$\vdots$$
$$(n+1)^4 = n^4 + 4(n)^3 + 6(n)^2 + 4(n) + 1$$

با جمع نظیر به نظیر طرفین عبارات بالا، با هم داریم

$$(n+1)^4 = 1 + 4(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$$
$$+ 4(1 + 2 + \cdots + n) + (1 + 1 + \cdots + 1) \qquad (۱۹)$$

از مثال های (۱) و (۴) داریم (فرمول های (۴) و (۱۸))

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

با جایگذاری در (۱۹) نتیجه می شود که

$$(n+1)^4 = 1 + 4\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + 6\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + 4\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n$$
$$= 1 + 4\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + 2n^3 + 3n^2 + n + 2n^2 + 2n + n$$

پس

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\left[n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 1 - 2n^3 - 5n^2 - 4n\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[n^4 + 2n^3 + n^2\right]$$
$$= \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

بنابراین

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \qquad (۲۰)$$

قضیه ۳. الف) $\sum_{k=1}^{n} c = nc$.

ب) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

ج) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

د) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ه) $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

مثال ۹. مطلوب است $\sum_{k=1}^{10} k^2$

حل. با $n=10$ در قسمت (ج) قضیه ۳ داریم

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10(11)(21)}{6} = 385.$$

مثال ۱۰. مطلوب است $\sum_{k=1}^{10} (k+2)^3$.

حل. از قضیه دوجمله‌ای داریم

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} (k+2)^3 &= \sum_{k=1}^{10} (k^3 + 6k^2 + 12k + 8)\\ &= \sum_{k=1}^{10} k^3 + 6\sum_{k=1}^{10} k^2 + 12\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 8\\ &= \frac{10^2 \times 11^2}{4} + \frac{10\times 11\times 21}{6}\times 6 + 12\,\frac{10\times 11}{2} + 10\times 8\\ &= 3025 + 2310 + 660 + 80 = 6075.\end{aligned}$$

گاهی مناسب آن است که جمعبندیها را از ۰ یا مقداری بزرگتر از ۱ آغاز کنیم. مثلا

$$\sum_{i=0}^{4} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$

$$\sum_{n=2}^{5} n^3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3,$$

$$\sum_{m=0}^{4} a^{m+1} = a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5,$$

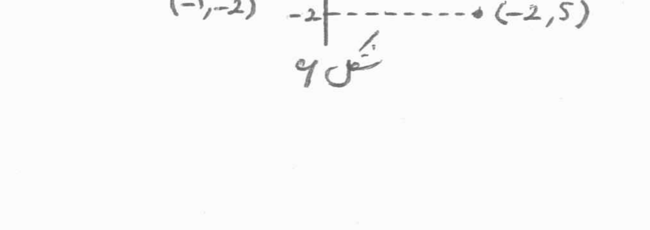
$$\sum_{j=1}^{6} 2^{j-1} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5,$$

$$\sum_{n=1}^{6} 2^{n-1} = \sum_{r=0}^{5} 2^r = \sum_{n=0}^{5} 2^{5-n} = \sum_{k=1}^{6} 2^{6-k}.$$

۳.۲ هندسه دکارتی

همان طور که قبلاً در بخش ۱.۲ بیان شد، یکی از کاربردهای انتگرال محاسبه مساحت است. معمولاً در مورد خود مساحت به تنهایی صحبت نمی‌کنیم بلکه بجای آن از مساحت اشیاء معینی مانند ناحیه‌های چندضلعی، ناحیه‌های مستدیر، قطعه سهمی‌ها و غیره سخن می‌گوئیم و می‌خواهیم مساحت آنها را اندازه بگیریم. برای این منظور ابتدا باید روش موثری را برای وصف این اشیاء بیابیم. ابتدائی‌ترین راه انجام این کار رسم شکل است که توسط یونانیان قدیم انجام می‌شد. راهی به مراتب بهتر توسط رنه دکارت پیشنهاد شد که مبحث هندسه تحلیلی یا هندسه دکارتی را معرفی کرد. دکارت نقاط هندسی را توسط اعداد نمایش داد. نحوه کار برای نقاط در صفحه چنین است:

دو خط متعامد بنام محورهای مختصات اختیار می‌شوند، یکی افقی (بنام محور xها) و دیگری قائم (بنام محور yها) و نقطه برخوردشان را با 0 نمایش داده و مبداء می‌نامیم. بر محور xها نقطه مناسبی سمت راست 0 انتخاب و فاصله آن از 0 فاصله یکه نامیده می‌گردد. فواصل قائم در امتداد محور y نیز معمولاً با همین فاصله یکه اندازه‌گیری می‌شوند، اما گاهی از مقیاس دیگری بر محور y نیز استفاده کرده. حال به هر نقطه در صفحه، که آن را صفحه xy گویند، زوجی از اعداد بنام مختصات آن نقطه تخصیص می‌یابد. این اعداد محل دقیق نقطه را تعیین می‌کنند. در شکل (۶) نقطه با مختصات (2,3) به اندازه دو یکه سمت راست محور y و سه یکه بالای محور xها قرار دارد. عدد 2 مختص x نقطه و عدد 3 مختص y نقطه نامیده می‌شود. نقاط سمت چپ محور yها دارای مختص x منفی اند و نقاط زیر محور xها دارای مختص y منفی اند. گاهی اوقات مختص x را طول نقطه و مختص y را عرض نقطه نامند.



شکل ۶

توافق می‌کنیم که هنگام نوشتن جفتی از اعداد نظیر (a,b)، طول یا مختص x یعنی a را اول نوشته و عرض یا مختص y یعنی b را دوم بنویسیم. به این دلیل، اغلب زوج (a,b) را یک زوج مرتب نامند. به وضوح دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) یک نقطه را نمایش می‌دهند اگر و فقط اگر $a=c$ و $b=d$. نقاطی مانند (a,b) را که در آنها $a>0$ و $b>0$ باشند نقاط واقع در ربع اول (یا ناحیه اول)، نقاطی که در آنها $a<0$ و $b>0$ اند در ربع دوم و نقاطی که در آنها $a<0$ و $b<0$ است در ربع سوم و نقاطی که در آنها $a>0$ و $b<0$ باشند در ربع چهارم قرار خواهند داشت. شکل (۹) در هر ربع نقطه‌ای را نشان می‌دهد.

برای نقاط در فضا نیز به همین نحو عمل می‌کنیم. سه خط دو به دو متعامد در فضا اختیار می‌کنیم که در یک نقطه (بنام مبداء) یکدیگر را قطع کرده باشند. این خطوط سه صفحه دو به دو متعامد را معین می‌کنند و هر نقطه در فضا را می‌توان با تعیین فاصله‌اش از این صفحات، با رعایت علامت مناسب، کاملاً وصف کرد. در ریاضی ۲ هندسه دکارتی سه بعدی با تفصیل بیشتری مورد بحث قرار می‌گیرد.

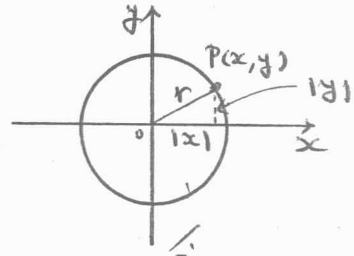
هر شکل هندسی، مانند یک منحنی در صفحه، خانواده‌ای از نقاط است که در یک یا چند شرط ویژه صدق می‌کنند. با ترجمان این شرایط به عباراتی مشتمل بر مختصات x و y یک یا چند معادله به دست می‌آوریم که شکل مورد بحث را مشخص می‌کنند.

مثال ۱۱. دایره‌ای به شعاع r و به مرکز مبداء را در نظر بگیرید. فرض کنید P نقطه دلخواهی بر این دایره بوده و مختصاتش (x,y) است. در این صورت پاره خط OP وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که اضلاعش به طولهای $|x|$ و $|y|$ اند و در نتیجه طبق قضیه فیثاغورث

$$x^2+y^2=r^2, \qquad (۲۱)$$

در این معادله که معادله دکارتی دایره نام دارد، کلیه نقاط (x,y) واقع بر دایره در معادله فوق صدق می‌کنند و برعکس. پس این معادله کاملاً دایره به مرکز مبداء و شعاع r را مشخص می‌کند. این مثال نشان می‌دهد که چگونه از هندسه تحلیلی در تحویل احکام هندسی

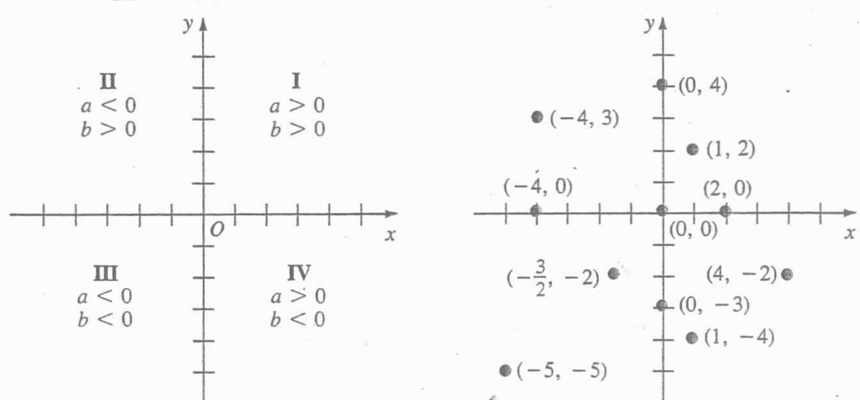
مربوط به نقاط به احکامی تحلیلی در اعداد حقیقی استفاده می‌شود (شکل (۷)).



شکل ۷

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، در طول تکامل تاریخی خود، بسیار بهم آمیخته شده‌اند. کشفیات جدید در یک موضوع به اصطلاحاتی در دیگری می‌انجامید. هدف اصلی ما، مطرح کردن حساب دیفرانسیل و انتگرال است. بدین منظور، هرجا که لازم آید، مفاهیمی از هندسه تحلیلی مورد بحث قرار خواهد گرفت. در واقع برای درک بنیانی حساب دیفرانسیل و انتگرال فقط چند مفهوم بسیار مقدماتی از هندسه تحلیلی مورد نیاز است. برای وسعت بخشیدن به حیطه و کاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال، مطالعه عمیقتری در هندسه تحلیلی لازم است و این مطالعه در فصول بعدی و در درس ریاضی ۲، با استفاده از روشهای برداری و روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال صورت خواهد گرفت. تا آن موقع تنها چیزی که از هندسه تحلیلی لازم است آشنایی مختصری با ترسیم نمودارهای توابع است.

نواحی ۴. همانطور که بیان شد محورهای مختصات صفحه دکارتی را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند. در شکل (۸ ـ الف) نواحی و در شکل (۸ ـ ب) نقاطی در هر یک از نواحی نمایش داده شده است.



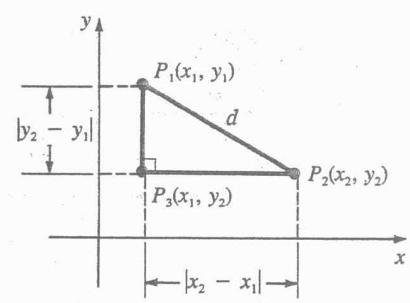
(الف) شکل ۸ (ب)

فرمول فاصله ۵. فاصلهٔ دو نقطهٔ $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ در صفحه را که با $d(P_1,P_2)$ نمایش می‌دهیم، می‌توان از رابطهٔ فیثاغورث به دست آورد. همان طور که در شکل (۹) نمایش داده شده است، سه نقطهٔ P_1، P_2 و P_3 رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه با طول وتر d و طول اضلاع $|x_2-x_1|$ و $|y_2-y_1|$ می‌باشند. بنابراین

$$d^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2,$$

و در نتیجه

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (۲۲)$$



شکل ۹

مثال ۱۲. فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $(-2,3)$ و $(4,5)$ را به دست آورید.

حل. با انتخاب P_1 به صورت $(-2,3)$ و P_2 به عنوان $(4,5)$، از فرمول (۲۲) داریم

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(4-(-2))^2+(5-3)^2}=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

توضیح ۵. چون $(x_2-x_1)^2=(x_1-x_2)^2$ و $(y_2-y_1)^2=(y_1-y_2)^2$، این فاصلهٔ بین P_1 و P_2 با فاصلهٔ بین P_2 و P_1 یکی است، یعنی $d(P_1,P_2)=d(P_2,P_1)$.

نقطهٔ میانی یک پاره خط ۶. معمولاً در ریاضی عمومی از فرمول فاصله به دفعات در تعریف‌ها و قضایا استفاده می‌کنیم. به عنوان اولین کاربرد فرمول فاصله، نشان می‌دهیم که مختصات نقطهٔ میانی پاره خط واصل از نقطهٔ $P_1(x_1,y_1)$ تا نقطهٔ $P_2(x_2,y_2)$ برابر با

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right), \qquad (۲۳)$$

است. با توجه به شکل (۱۰)، اگر M نشان دهنده نقطه‌ای از پاره خط P_1P_2 با مختصات داده شده توسط (۲۳) باشد، آنگاه M نقطه میانی P_1P_2 است مشروط به اینکه

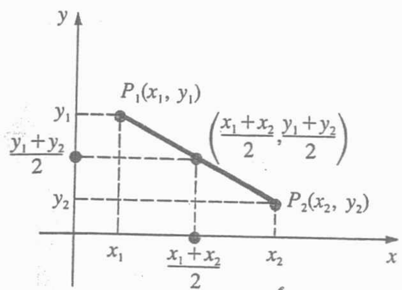
$$d(P_1,M)=d(M,P_2) \quad \text{و} \quad d(P_1,P_2)=d(P_1,M)+d(M,P_2).$$

از (۲۲) داریم

$$\begin{aligned} d(P_1,M) &= \sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_1\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{2}-y_1\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\frac{1}{2}\,d(P_1,P_2), \qquad (۲۴) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(M,P_2) &= \sqrt{\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y_2-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\frac{1}{2}\,d(P_1,P_2). \qquad (۲۵) \end{aligned}$$

پس $d(P_1,M)=d(M,P_2)$ و علاوه بر آن جمع (۲۴) و (۲۵) برابر $d(P_1,P_2)$ است،



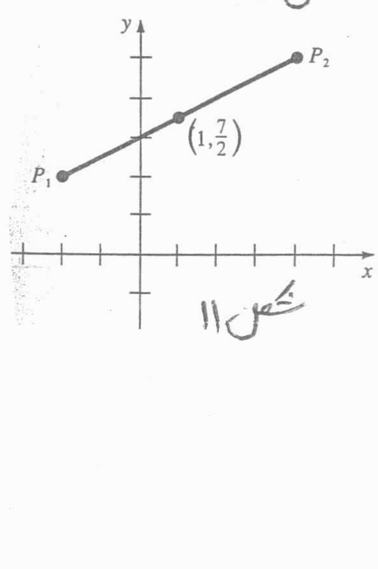
شکل ۱۰

مثال ۱۴. مختصات نقطه میانی پاره خط واصل بین دو نقطه $P_1(-2,2)$ و $P_2(4,5)$ را به دست آورید.

حل. از (۲۳) داریم

$$x=\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}=1, \qquad y=\frac{2+5}{2}=\frac{7}{2}$$

پس $(1,\frac{7}{2})$ نقطه میانی است، شکل (۱۱).



شکل ۱۱

تعریف ۷. نمودار یک نمودار (گراف) مجموعه‌ای از نقاط (x,y) در صفحه مختصات است. یک نمودار می‌تواند مجموعه‌ای نامتناهی از نقاط باشد مانند نقاط روی یک پاره خط P_1P_2 در شکل (۱۱) یا یک مجموعه متناهی از نقاط باشد. نمودار یک معادله مجموعه نقاط (x,y) در صفحه مختصات است که جواب‌های معادله می‌باشند. زوج مرتب (x,y) یک جواب معادله‌ای است هرگاه با جایگزینی x و y در معادله به یک اتحاد برسیم.

مثال ۱۴. نقطه $(-2,2)$ روی نمودار $y=1-\frac{1}{8}x^3$ قرار دارد، زیرا

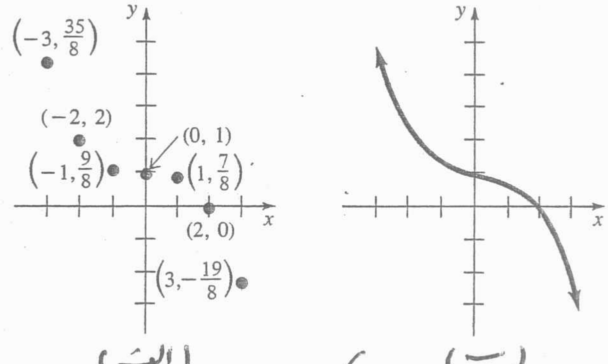
$$2=1-\frac{1}{8}(-2)^3=2.$$

توضیح ۸. یکی از روش‌های رسم نمودار یک معادله، رسم نقاط نمودار است. با رسم نقاطی واقع بر نمودار و اتصال این نقاط با یک منحنی هموار، معمولاً شمایلی از نمودار حاصل می‌شود، اما باید در ابتدا خواص حاکم بر نمودار مانند پیوستگی نقاط، مشتق‌پذیری تابع مورد نظر و نظایر آن را داشته باشیم که در فصل‌های بعد به این خواص خواهیم پرداخت.

مثال ۱۵. نمودار $y=1-\frac{1}{8}x^3$ را رسم کنید.

حل. با اختصاص مقادیری به x در یافتن مقادیری از y که در معادله صدق کنند، جدولی از نقاط را تشکیل داده و سپس این نقاط را در صفحه رسم کرده و با یک منحنی هموار به هم متصل می‌کنیم (شکل (۱۲)).

x	y
-3	$35/8$
-2	2
-1	$7/8$
0	1
1	$7/8$
2	0
3	$-\frac{19}{8}$



شکل ۱۲

تقارن ۹. قبل از رسم نقاط یک نمودار، می‌توانیم به تقارن موجود در معادله داده شده توجه کنیم. در صورت وجود تقارن در معادله، معمولاً رسم نمودار ساده‌تر خواهد بود.

الف) تقارن نسبت به محور y ها. اگر نقاط (x,y) و $(-x,y)$ هر دو روی نمودار واقع باشند، گوییم نمودار نسبت به محور y ها متقارن است.

ب) تقارن نسبت به محور x ها. اگر نقاط (x,y) و $(x,-y)$ هر دو روی نمودار واقع باشند، گوییم نمودار نسبت به محور x ها متقارن است.

ج) تقارن نسبت به مبدأ. اگر نقاط (x,y) و $(-x,-y)$ هر دو روی نمودار واقع باشند، گوییم نمودار نسبت به مبدأ متقارن است.

با توجه به تعریف تقارن، برای بررسی وجود تقارن در یک نمودار، نیاز به آزمونی برای تأیید تقارن داریم.

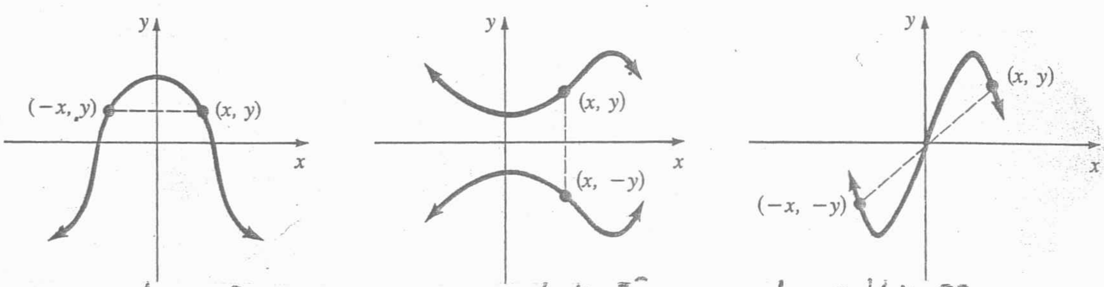
آزمون های تقارن ۱۰. برای یک معادله، (الف)، (ب) و (ج) در بالا منجر به سه آزمون برای تقارن خواهند شد. یک نمودار معادله‌ای متقارن نسبت به

الف) محور y هاست، اگر در معادله بجای x، $-x$ قرار دهیم به رابطه‌ای هم ارز معادله داده شده برسیم، یعنی y تغییری نکند.

ب) محور x هاست، اگر در معادله بجای y، $-y$ قرار دهیم به رابطه‌ای هم ارز معادله داده شده برسیم، یعنی x تغییری نکند.

ج) مبدأ مختصات است، اگر در معادله x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل کنیم به رابطه‌ای هم ارز معادله داده شده برسیم.

در شکل (۱۴) وضعیت تقارن نسبت به محور y ها، نسبت به محور x ها، نسبت به مبدأ مختصات نمایش داده شده است.



الف) تقارن نسبت به yها　　ب) تقارن نسبت به xها　　ج) تقارن نسبت به مبدأ

شکل ۱۳

مثال ۱۶. وضعیت تقارن نمودار $x=|y|-2$ را مشخص کرده و آن را رسم کنید.

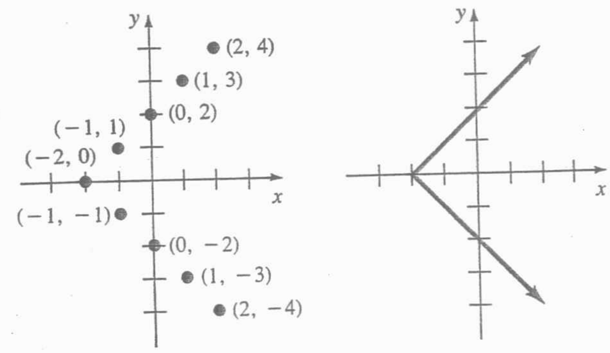
حل. آزمون (الف). $-x=|y|-2$ یا $x=-|y|+2$ معادل با معادله داده شده نیست. پس نمودار نسبت به محور yها متقارن نیست.

آزمون (ب). $x=|-y|-2$ معادل با معادله داده شده است، زیرا $|-y|=|y|$
پس نمودار نسبت به محور xها متقارن است.

آزمون (ج). $-x=|-y|-2$ یا $-x=|y|-2$ یا $x=-|y|+2$ معادل با معادله داده شده نیست. پس نمودار نسبت به مبدأ متقارن نیست.

شکل (۱۴) را ببینید.

x	y
2	4
1	3
0	2
-1	1
-2	0

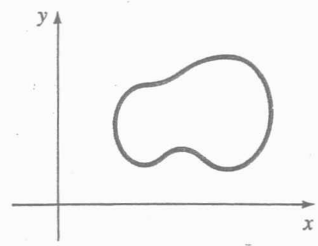


(الف)　　(ب)

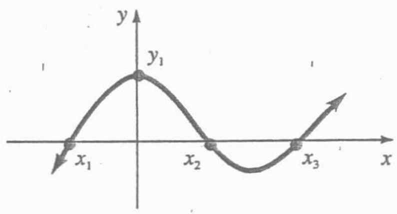
شکل ۱۴

تلاقی‌ها ۱۱. برای رسم نمودار یک معادله، تعیین محل‌های تلاقی نمودار با محورهای x و y بسیار سودمند است. مختص x نقطه‌ای که نمودار محور xها را قطع می‌کند، تلاقی-x نامند، مختص y نقطه‌ای که نمودار محور yها را قطع می‌کند، تلاقی-y نامیده می‌شود. در شکل (۱۵) تلاقی‌های-x نمودار در x_1، x_2 و x_3 است و تلاقی-y آن تنها y_1 می‌باشد. در شکل

(۱۶) نمودار با محورهای مختصات تلاقی ندارد. در شکل (۱۵) تلاقی - x نمودار 2 است و تلاقی - y آن ۱ می باشد. در شکل (۱۶) تلاقی - x نمودار در $2-$ و تلاقی های - y نمودار در $2-$ و 2 است.



شکل ۱۶



شکل ۱۵

چون برای هر نقطه روی محور x ها، $y=0$ است و برای هر نقطه روی محور y ها، $x=0$ است، برای تعیین تلاقی های یک نمودار با محورها می توان به صورت زیر عمل کرد:

(۲۴)
تلاقی های - x : در معادله قرار می دهیم $y=0$ و آن را برای x حل می کنیم.
تلاقی های - y : در معادله قرار می دهیم $x=0$ و آن را برای y حل می کنیم.

مثال ۱۷. تلاقی های نمودارهای معادلات

الف) $y=4x-3$ و

ب) $y=\frac{x^2+1}{x^2+5}$

را به دست آورید.

حل. الف) قرار می دهیم $y=0$ داریم $0=4x-3$ پس $x=\frac{3}{4}$. قرار می دهیم $x=0$ داریم $y=-3$. پس تلاقی های x و y معادله به ترتیب $\frac{3}{4}$ و $3-$ است.

ب) قرار می دهیم $y=0$. باید $x^2+1=0$ و $x^2+5\neq 0$. چون برای هر عدد حقیقی x همواره $x^2+5\neq 0$ است پس برای تلاقی x نمودار معادله داده شده باید $x^2+1=0$ یعنی $x^2=-1$ باشد. اما این معادله در اعداد حقیقی دارای جواب نیست. بنابراین نمودار معادله با محور x ها تلاقی ندارد. برای تلاقی - y قرار می دهیم $x=0$ داریم $y=\frac{1}{5}$. بنابراین تلاقی y برابر $\frac{1}{5}$ است.

مقاطع مخروطی ۱۲. معادله‌ای به صورت

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0, \qquad (۲۷)$$

را در نظر بگیرید که در آن A، B، C، D و E اعداد حقیقی‌اند و A و B باهم صفر نیستند. این معادله را یک مقطع مخروطی نامیم و برحسب نوع ضرایب نمودارهایی خاص را نتیجه می‌دهد. در مثال (۱۱) حالت خاصی از این معادله به صورت $x^2+y^2=r^2$ را دیدیم که یک دایره به مرکز مبدأ و شعاع r است.

درحالتی که در معادله (۲۷) ضرایب x^2 و y^2 برابر صفر باشند، $A=B=0$، معادله (۲۷) به فرم

$$Cx+Dy+E=0 \qquad (۲۸)$$

تبدیل می‌شود که گوییم یک معادله خطی است. در قسمتهای بعد به این نوع معادلات توجه خاصی داریم و به طور کامل مورد بررسی قرار می‌گیرند.

در (۲۷) اگر $A=B\neq 0$ باشد، می‌توان فرض کرد $A=B=1$ است و معادله به صورت

$$x^2+y^2+cx+dy+e=0 \qquad (۲۸)$$

تبدیل می‌شود. با تشکیل مربعات کامل و برقراری شرایط وجود جواب، نهایتاً معادله (۲۸) به شکل ساده‌تر

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \qquad (۲۹)$$

تبدیل می‌شود. با توجه به فرمول فاصله (۲۲)، معادله (۲۹) مکان هندسی کلیه نقاطی است که فاصله آنها تا نقطه ثابت (h,k) برابر عدد ثابت $r>0$ است. و این معادله دایره‌ای به مرکز (h,k) و شعاع $r>0$ است. درحالت خاص که نقطه ثابت (h,k) در مبدأ قرار دارد، معادله دایره به مرکز $(0,0)$ و شعاع $r>0$ را داریم که در مثال (۱۱) بررسی گردید شکل (۱۷).

در (۲۷)، اگر $A\neq 0$، $B\neq 0$ و $AB>0$ (A و B هم علامت) باشد، با عملیاتی جبری و تشکیل مربعات کامل در (۲۷)، معادله‌ای به صورت

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1, \qquad (۳۰)$$

حاصل می شود که مکان هندسی کلیه نقاطی است که مجموع فواصل هر نقطه از دو نقطه ثابت، مقداری ثابت است. نمودار معادله (۳۰) یک بیضی با مرکز (h,k) است. در حالت خاص، اگر $a=b$ باشد، معادله (۳۰) به معادله (۲۹) تبدیل می شود به عبارت دیگر دایره حالت خاصی از بیضی است.

در (۲۷)، اگر $A\neq 0$، $B\neq 0$ و $AB<0$ (A و B مختلف العلامه) باشد، با عملیاتی جبری و تشکیل مربعات کامل معادله ای به صورت

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1, \tag{۳۱}$$

یا

$$\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(x-h)^2}{a^2}=1, \tag{۳۲}$$

حاصل می شود که مکان هندسی کلیه نقاطی است که تفاضل فواصل هر نقطه از دو نقطه ثابت، مقداری ثابت است. نمودار معادلات (۳۱) یا (۳۲) هذلولی هایی با مرکز (h,k) است.

در (۲۷)، اگر $A=0$ و $B\neq 0$ یا $A\neq 0$ و $B=0$ باشد (یعنی از x و y، یکی درجه دو و دیگری درجه یک) باشد. با عملیاتی جبری و تشکیل مربعات برای متغیر درجه دوم، معادله ای به صورت

$$(y-k)^2=\pm 4a(x-h) \tag{۳۳}$$

یا

$$(x-h)^2=\pm 4a(y-k) \tag{۳۴}$$

حاصل می شود که مکان هندسی کلیه نقاطی است که فاصله آنها از یک نقطه ثابت و یک خط ثابت مقداری ثابت است. نمودار معادلات (۳۳) یا (۳۴) سهمی هایی با مرکز (h,k) است.

توضیح ۱۳. در بخش مربوط به مسائل حل شده، تعدادی متنوع مثال و مسئله در هر یک از موارد بالا ارائه خواهد شد.

حال به بررسی دقیقتر معادله (۲۸) خواهیم پرداخت.

۴.۲ خط‌ها

از مفاهیم مهمی که در ریاضیات عمومی نقش اساسی دارد، مفهوم خط است که در این بخش نگاهی اجمالی به آن داریم.

تعریف ۱۷. نموها. اگر $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ دو نقطه دلخواه در صفحه دکارتی باشند نمو x را به صورت تفاضل مختصات x دو نقطه و نمو y را به صورت تفاضل مختصات y دو نقطه تعریف می‌کنیم و به ترتیب با Δx و Δy نشان می‌دهیم، پس

$$\Delta x = x_2 - x_1 ,$$
$$\Delta y = y_2 - y_1 .$$

مثال ۱۸. نموهای x و y را برای زوج نقاط زیر به دست آورید

الف) $P_1(4, 6)$ ، $P_2(9, 7)$.

ب) $P_1(10, -2)$ ، $P_2(3, 5)$.

ج) $P_1(8, 14)$ ، $P_2(8, -1)$.

حل. الف) $\Delta y = 7 - 6 = 1$ ، $\Delta x = 9 - 4 = 5$.

ب) $\Delta y = 5 - (-2) = 7$ ، $\Delta x = 3 - 10 = -7$.

ج) $\Delta y = -1 - 14 = -15$ ، $\Delta x = 8 - 8 = 0$.

مثال ۱۸ نشان می‌دهد که نموها می‌توانند مثبت، منفی یا صفر باشند.

تعریف ۱۹. فرض کنید L نشان دهنده یک خط غیرقائم در صفحه دکارتی است. متناظر به این خط عددی به نام شیب خط یا ضریب زاویه خط را داریم. اگر $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ نقاط متمایزی روی L باشند، در این صورت شیب m خط به وسیله

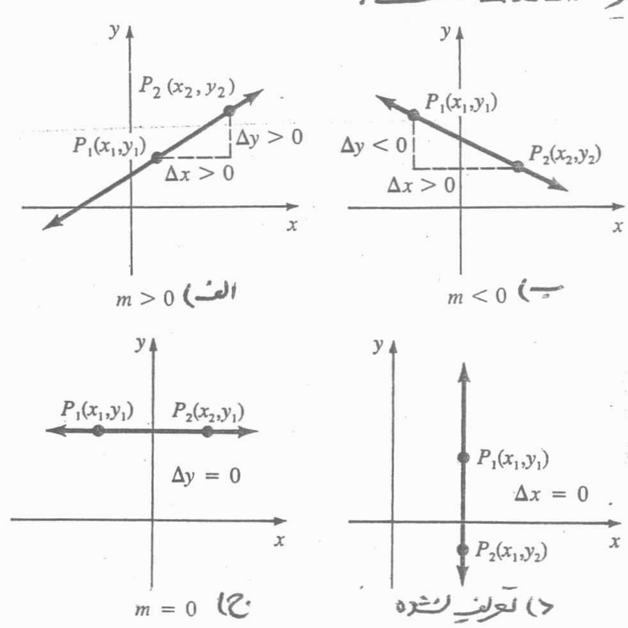
خارج قسمت

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad (۳۵)$$

تعریف می‌شود. نمو x، $\Delta x = x_2 - x_1$ را تغییر در x و نمو y، $\Delta y = y_2 - y_1$ را تغییر در y نامیم. پس

$$m = \frac{\text{تغییر در } y}{\text{تغییر در } x}.$$

توضیح ۲. فرض کنید $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ روی خط L چنان انتخاب شده‌اند که $x_1 < x_2$. در شکل (۱۷-الف) شیب خط L مثبت و در شکل (۱۷-ب) شیب خط L منفی و در شکل (۱۷-ج) شیب خط صفر و در شکل (۱۷-د) شیب تعریف نشده است. اگر یک خط دارای شیب مثبت باشد آنگاه مختصات نقاط روی خط با افزایش طول صعود می‌کند. برای خطوط با شیب منفی مختصات عرض نقاط با افزایش طول آنها کاهش می‌یابد. در حالت شیب صفر، خط افقی است یعنی $\Delta y = 0$. شیب خطوط قائم تعریف نشده‌اند زیرا $\Delta x = 0$ است.



شکل ۱۷

مثال ۱۹. شیب خط گذرنده از نقاط داده شده را در هر حالت به دست آورید.

الف) $(6,3)$ ، $(-2,5)$.

ب) $(7,-2)$ ، $(4,-2)$.

ج) $(1,5)$ ، $(1,-3)$.

حل. با استفاده از (۳۵) در دو حالت اول داریم

الف) $m=\frac{5-3}{-2-6}=\frac{2}{-8}=-\frac{1}{4}$

ب) $m=\frac{-2-(-2)}{4-7}=\frac{0}{-3}=0$. خط گذرنده از این دو نقطه افقی است.

ج) چون $\Delta x = 1-1=0$ شیب خط گذرنده از $(1,5)$ و $(1,-3)$ تعریف نشده است، پس خط قائم می‌باشد.

نکته ۲۱. شیب یک خط منحصر به فرد است. زیرا اگر برای هر زوج از نقاط روی خط شیب آن را تعیین کنیم این مقدار ثابت است. فرض کنید

$$\Delta x = x_2-x_1 \,,\qquad \Delta y = y_2-y_1 \,,$$

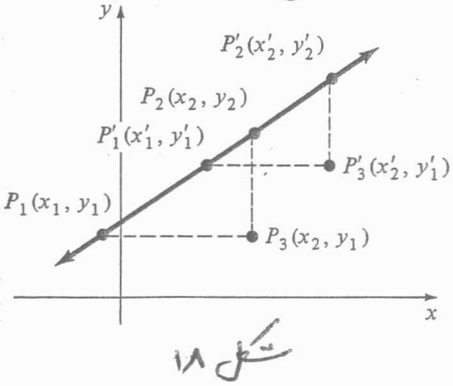
و

$$\Delta x' = x_2'-x_1' \,,\qquad \Delta y = y_2'-y_1' \,,$$

در این صورت مثلث‌های قائم‌الزاویه $P_1P_2P_3$ و $P_1'P_2'P_3'$ متشابه‌اند و در نتیجه

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2'-y_1'}{x_2'-x_1'} \,,$$

یا $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$. شکل (۱۸) را مشاهده کنید.



شکل ۱۸

در دو قضیه بعد فرض می‌کنیم که خط‌های l_1 و l_2 دارای شیب هستند، یعنی هیچ یک از خطوط قائم نمی‌باشند و m_1 و m_2 اعداد متناهی‌اند. قضیه اول در رابطه با خط‌های موازی است. البته دو خط قائم هر دو موازی محور yها و در نتیجه با هم موازی‌اند، اما شیب تعریف نشده است.

قضیه ۲۲. خط‌های موازی. دو خط l_1 و l_2 با شیب‌های m_1 و m_2 موازی‌اند اگر و تنها اگر $m_1=m_2$.

اثبات. واضح است.

قضیه ۲۳. دو خط l_1 و l_2 با شیب‌های m_1 و m_2 متعامدند اگر و تنها اگر $m_1m_2=-1$.

اثبات. فرض کنید l_1 و l_2 خط‌های عمود بر هم با شیب‌های m_1 و m_2 به ترتیب باشند. از شکل (۱۹) دیده می‌شود که

$$m_1=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}, \qquad m_2=\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}.$$

از قضیه فیثاغورث داریم $c^2=b^2+a^2$. با توجه به فرمول فاصله دو نقطه داریم

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2+(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2$$

بعد از ساده کردن داریم

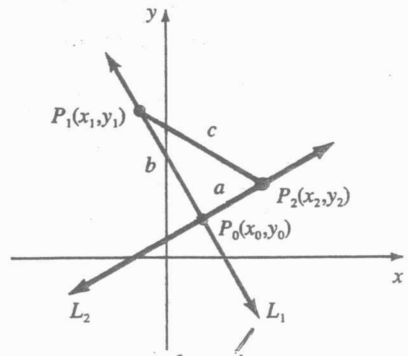
$$(y_1-y_0)(y_2-y_0)=-(x_1-x_0)(x_2-x_0)$$

پس

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}=-1 \qquad (۳۶)$$

یا $m_1m_2=-1$.

برعکس اگر (۳۶) برقرار باشد، با برگشت روابط بالا نتیجه می‌گیریم l_1 و l_2 بر هم عمودند.



شکل ۱۹

معادله خط ۲۴. مفهوم شیب به ما اجازه یافتن معادله خط را می دهد. فرض کنید $P_1(x_1, y_1)$ نقطه ای واقع بر خط L با شیب m است. برای یافتن معادله خط L، نقطه دلخواه $P(x, y)$ را روی خط L اختیار می کنیم به طوری که $x \neq x_1$. با قرار دادن شیب ها برابرهم، داریم

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = m,$$

پس $y-y_1 = m(x-x_1)$. چون نقطه $P(x, y)$ روی خط به دلخواه اختیار شد معادله حاصل، معادله خط مورد نظر است. دیده می شود که $P_1(x_1, y_1)$ نیز در معادله صدق می کند. این معادله را شکل نقطه-شیب خط نامند. پس به طور خلاصه داریم

شکل نقطه-شیب خط گذرنده از (x_1, y_1) با شیب m عبارت است از

$$y-y_1 = m(x-x_1). \qquad (۳۷)$$

مثال ۲۰. معادله خط گذرنده از نقطه $(6, -2)$ با شیب 4 را بدست آورید.

حل. از شکل نقطه-شیب معادله خط، فرمول (۳۷) داریم

$$y-(-2) = 4(x-6)$$

یا $y+2 = 4x-24$ یا $y = 4x-26$.

از رابطه (۳۷) می توان دو شکل مهم دیگر برای معادلات خط ها به دست آورد. اگر خط L محور y ها را در نقطه $(0, b)$ قطع کند و دارای شیب m باشد آنگاه (۳۷) نتیجه می دهد که

$$y-b = mx \quad \text{یا} \quad y = mx+b.$$

عدد b را عرض از مبداء خط نامیم. علاوه بر آن اگر L خط افقی گذرنده از $P_1(x_1, y_1)$ باشد، قرار می دهیم $m=0$ و داریم

$$y-y_1 = 0(x-x_1) \quad \text{یا} \quad y = y_1.$$

به طور خلاصه:

شکل شیب-عرض از مبدأ خط عبارت است از

$$y = mx + b. \qquad (۳۸)$$

معادله خط افقی گذرنده از $P_1(x_1,y_1)$ عبارت است از

$$y = y_1. \qquad (۳۹)$$

حال دو نقطه متمایز $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ نیز یک خط منحصر به فرد را تعیین می‌کنند. اگر خط دارای شیب باشد، آنگاه معادله آن را می‌توان از (۳۷) با محاسبه m از رابطه $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ و استفاده از هر یک از نقاط P_1 یا P_2 به دست آورد. نهایتاً، اگر خط گذرنده از P_1 و P_2 عمودی باشد آنگاه هر نقطه واقع بر خط دارای مختص x یکسانی است. بنابراین اگر $P(x,y)$ روی خط قائم گذرنده از $P_1(x_1,y_1)$ باشد، باید

$$x = x_1,$$

شود. به طور خلاصه داریم:

معادله خط قائم گذرنده از $P_1(x_1,y_1)$ عبارت است از

$$x = x_1, \qquad (۴۰)$$

و معادله خط گذرنده از دو نقطه $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ با $x_1 \neq x_2$ عبارت است از

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x}. \qquad (۴۱)$$

مثال ۲۱. معادله خط گذرنده از نقاط $(2,-3)$ و $(-4,1)$ را به دست آورید.

حل. از معادله (۴۱) با فرض $(x_1,y_1)=(2,-3)$ و $(x_2,y_2)=(-4,1)$ داریم

$$\frac{y-(-3)}{x-2} = \frac{1-(-3)}{-4-2} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

پس $y+3 = -\frac{2}{3}(x-2)$ یا $y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ یا $2x+3y+5=0$.

معادله خطی ۲۵. هر معادله به صورت

$$ax+by+c=0 \qquad (۴۲)$$

که در آن x و y از آن یک هستند و a، b و c ثابتند را یک معادله خطی نامیم.
همان گونه که از نام گذاری مشخص است، منظور از یک معادله به شکل (۴۲) یک خط
مستقیم است. باید دقت کرد که در حالت دو بعدی چنین است.
با داشتن معادله خطی (۴۲) می‌توان حالات زیر را در نظر گرفت:
الف) اگر $a=0$، $b\neq 0$ باشند، حاصل خط افقی $y=-\frac{c}{b}$ است.
ب) اگر $a\neq 0$، $b=0$ باشند، حاصل خط قائم $x=-\frac{c}{a}$ است.
ج) اگر $a\neq 0$، $b\neq 0$ باشند، از (۴۲) داریم

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}, \qquad (۴۳)$$

که خطی با شیب $m=-\frac{a}{b}$ و عرض از مبداء $y=-\frac{c}{b}$ است.

برای رسم خط (۴۲)، محل تلاقی خط با محورهای مختصات را به دست می‌آوریم یعنی
در (۴۲) قرار می‌دهیم $x=0$ داریم $y=-\frac{c}{b}$ $(b\neq 0)$ پس نقطه $(0,-\frac{c}{b})$ عرض
از مبداء خط را نشان می‌دهد. با فرض $y=0$ داریم $x=-\frac{c}{a}$ $(a\neq 0)$ پس نقطه
$(-\frac{c}{a},0)$ طول از مبداء خط را نشان می‌دهد.
با داشتن عرض از مبداء و طول از مبداء، با توجه به معادله (۴۱) داریم

$$\frac{y-(-\frac{c}{b})}{x-0}=\frac{0-(-\frac{c}{b})}{-\frac{c}{a}-0}=-\frac{a}{b}$$

$$y+\frac{c}{b}=-\frac{a}{b}x$$

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

$$by+ax+c=0$$

که همان معادله (۴۲) است.

اگر تلاقی خط L با محور xها و yها به ترتیب نقاط $(\alpha,0)$ و $(0,\beta)$ باشد آنگاه

$$\frac{y-0}{x-\alpha}=\frac{\beta-0}{0-\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$$

$$y = -\frac{\beta}{\alpha}x + \beta$$

$$\beta x + \alpha y = \alpha\beta$$

با تقسیم عبارت بر $\alpha\beta$ داریم

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1 \qquad (۴۴)$$

که معادله عرض از مبداء ـ طول از مبداء خط نامیده می شود. (با فرض $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$).

مثال ۲۲. معادله خط گذرنده از $(-1, 5)$ عمود بر خط $2x + y + 4 = 0$ را بدست آورید.

حل. با نوشتن معادله $2x + y + 4 = 0$ به صورت $y = -2x - 4$ دیده می شود که شیب خط -2 است. حال از قضیه (۲۴)، شیب خط مطلوب برابر $\frac{1}{2}$ است در نتیجه

$$y - 5 = \frac{1}{2}(x - (-1))$$

یا $x - 2y + 11 = 0$.

توضیح. با توجه به ثابت بودن شیب یک خط، اگر خط با جهت مثبت محور x ها در خلاف حرکت عقربه های ساعت زاویه θ بسازد، در این صورت، واضح است که شیب خط

$$m = \tan\theta$$

است ($\tan\theta$ یکی از نسبت های مثلثاتی است که بعداً از بیان مفهوم تابع به شرح آنها خواهیم پرداخت).