فصل ۱۰ معادلات پارامتری و مختصات قطبی

۱.۱۰ معادلات پارامتری

حرکت مستقیم الخط ۱. حرکت یک ذره در امتداد یک منحنی، محدود شده یک یک خط مستقیم را حرکت مستقیم الخط نامیم. در فیزیک، نشان داده می شود که حرکت یک پرتابه در صفحهٔ xy مثلاً یک توپ گلف به طریقی است که شتاب آن در جهت‌های x و y از قوانین

$$a_x=0, \quad a_y=-g \qquad (۱)$$

تبعیت می کند که در آن g شتاب جاذبه و $a_x = d^2x/dt^2$ ، $a_y=d^2y/dt^2$ است.
در $t=0$ داریم $x=0$ و $y=0$ و مولفه‌های x و y سرعت اولیه v_0 عبارتند از

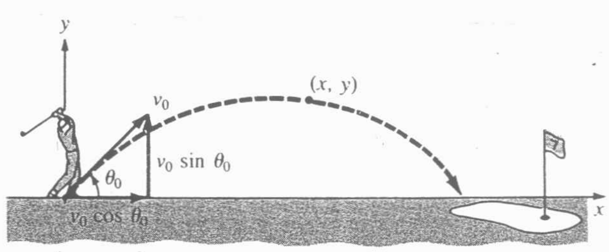
$$v_0\cos\theta_0 , \qquad v_0\sin\theta_0$$

شکل (۱) را ببینید. با درنظرگرفتن دو تابع اولیه در رابطه (۱) و از شرایط اولیه داده شده، نتیجه می شود که مختص x و مختص y توپ در زمان t در صفحه xy عبارتند از

$$x=(v_0\cos\theta_0)t , \qquad y=-\frac{1}{2}gt^2+(v_0\sin\theta_0)t \qquad (۲)$$

این معادلات، موقعیت توپ در صفحهٔ xy در زمان t را مشخص می کنند. آنها را معادلات پارامتریک حرکت پرتابی و متغیر t را پارامتر و فاصله $0 \le t \le T$ محدوده پارامتر است که در آن T زمان طی شده تا رسیدن توپ به زمین است.

درحالت کلی، یک منحنی را می توان برحسب معادلات پارامتری تعریف کرد.



شکل ۱

تعریف ۲. منحنی مسطح. یک منحنی مسطح مجموعه C از زوج های مرتب $(f(t), g(t))$ است که در آن f و g توابعی پیوسته روی فاصله I هستند. معادلات $x=f(t)$ و $y=g(t)$ برای t در I را معادلات پارامتری C نامیم. متغیر t را پارامتر گوییم.

نمودار یک منحنی مسطح C مجموعه تمام نقاط (x,y) در صفحه دکارتی متناظر شده به زوج های مرتب $(f(t), g(t))$ است. از این قسمت به بعد یک منحنی مسطح را به عنوان یک منحنی در نظر می گیریم. علاوه بر آن برای سادگی تمایزی بین منحنی و نمودار منحنی قائل نمی شویم.

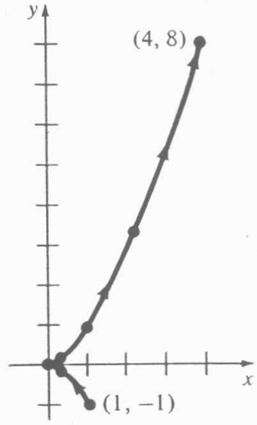
مثال ۱. نمودار منحنی با معادلات پارامتری

$$x=t^2, \quad y=t^3, \quad -1\le t\le 2$$

را رسم کنید.

حل. همان گونه که در جدول زیر نشان داده شده است، برای هر انتخاب t در $[-1,2]$ یک زوج مرتب (x,y) به دست می آوریم. با وصل نمودن این نقاط به وسیله یک منحنی نمودار در شکل (۲) حاصل می شود.

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4
y	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	8



شکل ۲

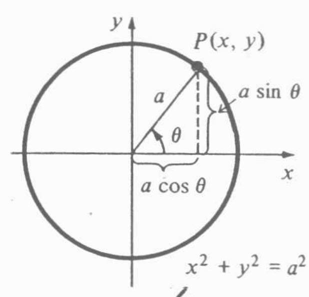
در مثال (۱)، اگر معادلات داده شده، حرکت یک ذره در صفحه و t زمان باشد، آنگاه وقتی t از ۱- تا 2 صعود می‌کند، ذره در نقطه P از (۱-، ۱) شروع به حرکت به سمت پایین و سپس روی شاخه‌ای به طرف بالا می‌کند و نهایتاً در $(4,8)$ متوقف می‌شود، اما چون زمان منفی نداریم با فرض $0\le t\le 3$ موقعیت مکانی متحرک را می‌توان با توابعی از دو ضابطه نوشت (تمرین). بنابراین مسیری برای حرکت روی منحنی مشخص می‌شود که آن را جهت نامیم.

یک پارامتر لزوماً زمان نیست. وقتی فاصله I مشخص شده است، معمولاً محدوده پارامتر را $-\infty<t<\infty$ در نظر می‌گیریم، یا بزرگترین فاصله‌ای را اختیار می‌کنیم که توابع f و g روی آن پیوسته‌اند.

مثال ۲. دایره $x^2+y^2=a^2$ با مرکز مبدأ و شعاع a را می‌توان برحسب زاویه مرکزی θ پارامتری کرد. با استفاده از شکل (۳) و خواص مثلثات، داریم

$$x=a\cos\theta,\quad y=a\sin\theta,\quad 0\le\theta\le 2\pi \qquad (۳)$$

که نقاط روی دایره P را مشخص می‌کنند.



شکل ۳

توجه کنید که جهت روی دایره در مثال (۲) خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است.

مثال ۳. در مثال (۲)، نیم دایره $x^2+y^2=a^2$، $0\le y\le a$ توسط

$$x=a\cos\theta,\quad y=a\sin\theta\quad 0\le\theta\le\pi$$

پارامتری می‌شود.

برای یک مجموعه معادلات پارامتری، گاهی اوقات سعی در حذف پارامتر بین معادلات و به دست آوردن معادله دکارتی داریم. برای حذف پارامتر در (۳)، x و y را مربع کرده و با هم جمع می‌کنیم

$$x^2+y^2=a^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta$$

یا $x^2+y^2=a^2$.

مثال ۴. الف) از معادله (۲) داریم $t=\dfrac{x}{v_0\cos\theta_1}$. با قرار دادن این t در معادله دوم داریم

$$y=-\frac{g}{2(v_0\cos\theta_0)^2}x^2+(\tan\theta_0)x$$

بنابراین مسیر پرتابه در هر زمان از پرتاب با زاویه اولیه $0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$ لزوماً به صورت یک سهمی است.

ب) در مثال (۱)، می‌توان پارامتر را با حل معادله دوم برای t برحسب y و جایگزینی در معادله اول حذف نمود.

$$t=y^{1/3} \Rightarrow x=(y^{1/3})^2=y^{2/3}$$

اما برای $-1\le t\le 2$ داریم $-1\le y\le 8$. بنابراین معادله دکارتی منحنی توسط

$$x=y^{2/3} \quad -1\le y\le 8$$

داده می‌شود.

یک منحنی C می‌تواند دارای بیش از یک فرم پارامتری شده باشد. برای مثال $x=t$، $y=2t^2$ برای $-\infty<t<\infty$ و $x=\frac{t^3}{4}$، $y=\frac{t^6}{8}$ برای $-\infty<t<\infty$ هر دو نشان دهنده $y=2x^2$ هستند. باید دقت کرد که یک نقطه لزوماً به یک مقدار پارامتر در هر مجموعه متناظر نمی‌شود. برای مثال نقطه $(1,2)$ از $t=1$ در مجموعه اول و از $t=\sqrt[3]{4}$ در مجموعه دوم است. اما معمولاً یکی از فرمهای پارامتری شده را در نظر می‌گیریم.

مثال ۵. منحنی C داده شده توسط معادلات پارامتری

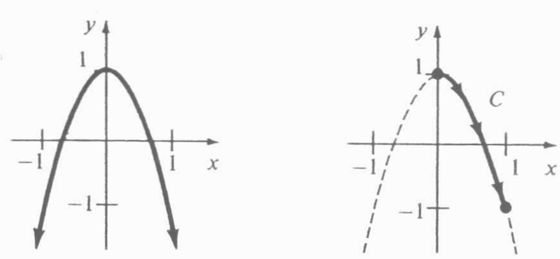
$$x=\sin\theta,\qquad y=\cos 2\theta \qquad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

را در نظر بگیرید. پارامتر را حذف کرده و یک معادله دکارتی به دست آورید که دارای همان نمودار C باشد.

حل. با استفاده از فرمول دو برابر زاویه داریم

$$\begin{aligned} y &= \cos^2\theta-\sin^2\theta \\ &= (1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta \\ &= 1-2\sin^2\theta \\ &= 1-2x^2 \end{aligned}$$

حال منحنی C شرح داده شده توسط معادلات پارامتری شامل همهٔ معادله به دست آمده $y=1-2x^2$ نیست، شکل (۴). برای $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ داریم $0\le\sin\theta\le 1$ و $-1\le\cos2\theta\le 1$ یعنی C تنها قسمتی از سهمی است که مختصات یک نقطه روی آن به صورت $P(x,y)$ در شرایط $0\le x\le 1$ و $-1\le y\le 1$ صدق می‌کند. بنابراین C که در شکل (۴-ب) نشان داده شده، دارای معادله $y=1-2x^2,\ 0\le x\le 1$ است.



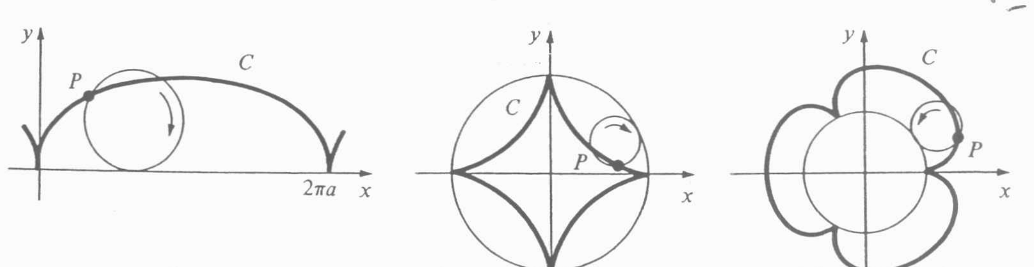
الف) $y=1-2x^2$

ب) $x=\sin\theta,\ y=\cos2\theta,\ 0\le\theta\le\pi$

شکل ۴

می‌توان تقاطع منحنی C را با محورها بدون یافتن معادله دکارتی آن، به دست آورد. برای مثال، در مثال (۵) برخورد x از حل $y=0$ حاصل می‌شود. معادله $\cos2\theta=0$ نتیجه می‌دهد $2\theta=\frac{\pi}{2}$ یا $\theta=\frac{\pi}{4}$، نقطه متناظر روی C محور x ها را در $(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ قطع می‌کند. به طور مشابه برخورد y منحنی C با حل $x=0$ حاصل می‌شود.

منحنی‌های سیکلوئید ۳. منحنی‌های سیکلوئید یکی از مباحث مورد مطالعه توسط ریاضیدانان در قرن هفدهم بود. فرض کنید نقطه $P(x,y)$ روی یک دایره به شعاع a، وقتی قطر دایره در امتداد محور yها است، در مبدأ قرار دارد. وقتی دایره در امتداد محور xها شروع به چرخش می‌کند، نقطه P یک منحنی C رسم می‌کند که آن را سیکلوئید نامیم. شکل (۵ - الف) را ببینید. حال فرض کنید یک دایره به شعاع a داخل دایرهٔ بزرگتری به شعاع b چرخش کند. اگر نقطه $P(x,y)$ روی دایره داخلی از نقطه $(b,0)$ شروع شود منحنی C رسم شده توسط P را هیپو سیکلوئید نامیم. با ملاحظه اگر $b=4a$ باشد آنگاه C یک هیپو سیکلوئید چهار برگ نامیده می‌شود. این منحنی در شکل (۵-ب) نمایش داده شده است. نهایتاً اگر دایره‌ای به شعاع a روی خارج دایره‌ای به شعاع b چرخش کند و از نقطه $(b,0)$ شروع کرده باشیم، منحنی C حاصل را اپیسیکلوئید نامیده می‌شود. یک اپی سیکلوئید سه برگ در شکل (۵-ج) با $b=3a$ نمایش داده شده است. به عنوان تمرین معادلات پارامتری این سه منحنی نمایش داده شده در شکل (۵) را به دست آورید.



الف) سیکلوئید ب) هیپو سیکلوئید چهار برگ ج) اپی سیکلوئید سه برگ

شکل ۵

منحنی‌های هموار ۴. منحنی C با معادلات پارامتری $x=f(t)$ و $y=g(t)$ برای $a\le t\le b$ را هموار نامیم هرگاه f' و g' روی $[a,b]$ پیوسته بوده و باهم روی (a,b) صفر نباشند. منحنی C را هموار تکه‌ای گوئیم هرگاه فاصله $[a,b]$ را بتوان به تعداد متناهی زیرفاصله افراز کرد به طوری که C روی هر زیرفاصله هموار باشد. منحنی‌های مثال‌های (۲)، (۳) و (۵) هموارند. منحنی در مثال (۱) هموار تکه‌ای است.

تبصره ۵. یک منحنی C مشخص داده شده توسط تابع پیوسته $y=f(x)$ را همیشه می‌توان با فرض $x=t$ پارامتری کرد. یک مجموعه معادلات پارامتری برای C در این حالت به صورت $x=t$ و $y=f(t)$ است.

۲.۱ شیب خطوط مماس و طول قوس

همانند نمودارهای توابع به صورت $y=f(x)$، اغلب اطلاعات مفیدی درباره منحنی C تعریف شده توسط معادلات پارامتری با در نظر گرفتن $\frac{dy}{dx}$ به دست می‌آید.

شیب ۶. فرض کنید $x=f(t)$ و $y=g(t)$ معادلات پارامتری منحنی C باشند. شیب خط مماس در نقطه $P(x,y)$ روی C توسط $\frac{dy}{dx}$ داده می‌شود.
برای محاسبه این مشتق، به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\Delta x=f(t+\Delta t)-f(t), \qquad \Delta y=g(t+\Delta t)-g(t)$$

و

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

پس

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

مشروط به اینکه حد در مخرج عبارت صفر نباشد، نتیجه را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم.
اگر $x=f(t)$ و $y=g(t)$ یک منحنی هموار C را تعریف کنند، آنگاه شیب خط مماس در نقطه $P(x,y)$ روی C به صورت

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)} \qquad (4)$$

تعریف می‌شود مشروط به اینکه

$f'(t)\neq 0$.

مثال ۶. معادله خط مماس بر منحنی $x=\frac{1}{t^2+1}$ ، $y=t^3$ در نقطه متناظر به $t=-1$ را به دست آورید.

حل. شیب خط مماس را به دست می‌آوریم. چون

$$\frac{dy}{dt}=3t^2$$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{2t}{(t^2+1)^2}$$

از (۴) داریم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3t^2}{-2t/(t^2+1)^2}=-\frac{3}{2}t(t^2+1)^2$$

و لذا $t=-1$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1}=-\frac{3}{2}(-1)(2)^2=6$$

با جایگذاری $t=-1$ در معادلات پارامتری منحنی، نقطه تماس $(\frac{1}{2},-1)$ به دست می‌آید.
بنابراین معادله خط مماس عبارت است از

$$y-(-1)=6\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

یا

$$y=6x-4.$$

مماس های افقی و قائم ۷. در نقطه (x,y) روی منحنی C با شرط $\frac{dy}{dt}=0$ و $\frac{dx}{dt}\neq 0$ خط مماس لزوماً افقی است زیرا در این نقطه $\frac{dy}{dx}=0$ است. از طرف دیگر، در نقطه‌ای که $\frac{dx}{dt}=0$ و $\frac{dy}{dt}\neq 0$ خط مماس قائم است. وقتی هر دو $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dy}{dt}$ در نقطه‌ای صفر باشند، هیچ نتیجه‌گیری در مورد خط مماس نداریم.

مثال ۷. نمودار منحنی با معادلات پارامتری

$$x=t^2-4,\quad y=t^3-3t$$

را رسم کنید.

حل: برخورد x:
$$y=0 \Rightarrow t(t^2-3)=0$$
$$\Rightarrow t=0,\ t=-\sqrt{3},\ t=\sqrt{3}$$

برخورد y:
$$x=0 \Rightarrow t^2-4=0 \Rightarrow t=-2,\ t=2$$

مماس های افقی:
$$\frac{dy}{dt}=3t^2-3,\quad \frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow 3(t^2-1)=0 \Rightarrow t=-1,\ t=1$$

توجه کنید که در $t=\pm 1$ ، $\frac{dx}{dt}\neq 0$.

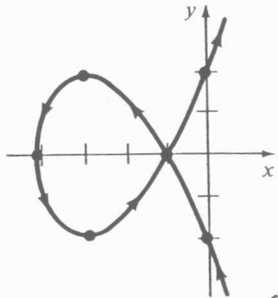
مماس های قائم:
$$\frac{dx}{dt}=2t,\quad \frac{dx}{dt}=0 \Rightarrow t=0$$

توجه کنید که در $t=0$ ، $\frac{dy}{dt}\neq 0$

نقاط (x,y) روی منحنی متناظر به مقادیر پارامتر به دست آمده در بالا ، در جدول زیر خلاصه شده اند.

t	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2
x	0	-1	-3	-4	-3	-1	0
y	-2	0	2	0	-2	0	2
	تقاطع با y	تقاطع با x	مماس افقی	مماس قائم تقاطع با x	مماس افقی	تقاطع با x	تقاطع با y

منحنی با توجه به نقاط بالا رسم شده است. به جهت روی منحنی و مماس ها دقت کنید، شکل (۹).



شکل ۹

نمودار یک تابع مشتق پذیر $y=f(x)$، می تواند تنها یک خط مماس در نقطه ای روی منحنی داشته باشد. چون یک منحنی تعریف شده توسط معادلات پارامتری ممکن است نمودار یک تابع نباشد، پس امکان دارد که چنین منحنی دارای بیش تر از یک مماس در یک نقطه باشد. در مثال (۷) برای $t=-\sqrt{3}$ و $t=\sqrt{3}$ داریم $(-1,0)$، یعنی منحنی خودش را در این نقطه قطع می کند. حال چون

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=-\sqrt{3}}=-\sqrt{3} \quad , \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

پس در نقطه $(-1,0)$ دو خط مماس وجود دارد. این مطلب در شکل (۶) مشاهده می شود.

مشتقات مراتب بالاتر ۸. مشتقات مراتب بالاتر را می توان دقیقاً مشابه روش یافتن $\frac{dy}{dx}$ یافت. فرض کنید (۴) به صورت

$$\frac{d}{dx}(\ ) = \frac{d(\ )/dt}{dx/dt} \qquad (5)$$

نوشته شود، اگر $y'=\frac{dy}{dx}$ تابعی مشتق پذیر از t باشد، از (۵) با جایگزینی ( ) با y' داریم

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}y'=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

به طور مشابه اگر $y''=\frac{d^2y}{dx^2}$ تابعی مشتق پذیر از t باشد آنگاه مشتق مرتبه سوم عبارت است از

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}y''=\frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

و به همین ترتیب.

مثال ۸. مطلوب است $\frac{d^3y}{dx^3}$ هرگاه $x=4t+6$ ، $y=t^2+t-2$.

حل.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{2t+1}{4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{2}{4}}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{0}{4} = 0$$

مثال (۸) نشان می دهد که منحنی دارای یک مماس افقی در $t=-\frac{1}{2}$ یا در $(4,-\frac{9}{4})$ است. علاوه بر آن چون $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ برای همه t، پس نمودار منحنی در هر نقطه دارای تحدب به سمت بالا است.

طول یک منحنی ۹. در بخش ( ) از فصل (۵) طول L نمودار یک تابع هموار $y=f(x)$ توسط یک انتگرال معین به دست آمد. حال نتیجه در فرمول ( ) بخش ( ) را به منحنی های تعریف شده به صورت پارامتری توسیع می دهیم.

فرض کنید $x=f(t)$ و $y=g(t)$ برای $a\le t\le b$ معادلات پارامتری یک منحنی هموار C است که خود را در $a<t<b$ قطع نمی کند. اگر P افرازی از $[a,b]$ به صورت

$$a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_{n-1}<t_n=b$$

باشد، آنگاه همان گونه که در شکل (۷) دیده می شود، متناظر با این افراز، منحنی C را می توان توسط یک مسیر چندبر گذرنده از نقاط $Q_k(f(t_k),g(t_k))$ برای مقادیر $n,\dots,k=0$ تقریب زد. طول پاره خط از Q_{k-1} تا Q_k را با $|Q_{k-1}Q_k|$ نمایش داده و تقریباً برابر است با طول قوس منحنی C روی این فاصله، و برابر طول قوس تقریبی C است، یعنی تقریباً برابر است با

$$\sum_{k=1}^{n} |Q_{k-1}Q_k| \qquad (۹)$$

که در آن

$$|Q_{k-1}Q_k| = \sqrt{[f(t_k)-f(t_{k-1})]^2+[g(t_k)-g(t_{k-1})]^2}$$

حال چون f و g دارای مشتقات پیوسته اند، پس طبق قضیه مقدار میانگین،

اعداد u_k^* و v_k^* در (t_{k-1}, t_k) وجود دارند به طوری که

$$f(t_k)-f(t_{k-1})=f'(u_k^*)(t_k-t_{k-1})$$
$$=f'(u_k^*)\Delta t_k \qquad (۷)$$

و

$$g(t_k)-g(t_{k-1})=g'(v_k^*)(t_k-t_{k-1})$$
$$=g'(v_k^*)\Delta t_k \qquad (۸)$$

با جایگذاری (۷) و (۸) در (۹) و ساده کردن عبارات داریم

$$\sum_{k=1}^{n}|Q_{k-1}Q_k|=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[f'(u_k^*)]^2+[g'(v_k^*)]^2}\;\Delta t_k \qquad (۹)$$

با فرض $\|P\|\to 0$ در رابطه (۹)، فرمول طول قوس برای یک منحنی هموار به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$s=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \qquad (۱۰)$$

باید توجه کرد که حد مجموع در (۹) برابر تعریف معمول انتگرال معین نیست زیرا دو عدد u_k^* و v_k^* در (t_{k-1}, t_k) داریم. در هر صورت، می‌توان نشان داد که (۱۰) از (۹) با $\|P\|\to 0$ به دست می‌آید و این مطلب از قضیه کاوالیری حاصل می‌شود.

مثال ۹. طول منحنی پارامتری $x=4t$ ، $y=t^2$ برای $0\le t\le 2$ را به دست آورید.

حل. چون $f'(t)=4$, $g'(t)=2t$ ، پس از رابطه (۱۰) داریم

$$s=\int_0^2\sqrt{16+4t^2}\,dt=2\int_0^2\sqrt{4+t^2}\,dt$$

حال با جانشانی مثلثاتی $t=2\tan\theta$ انتگرال به صورت

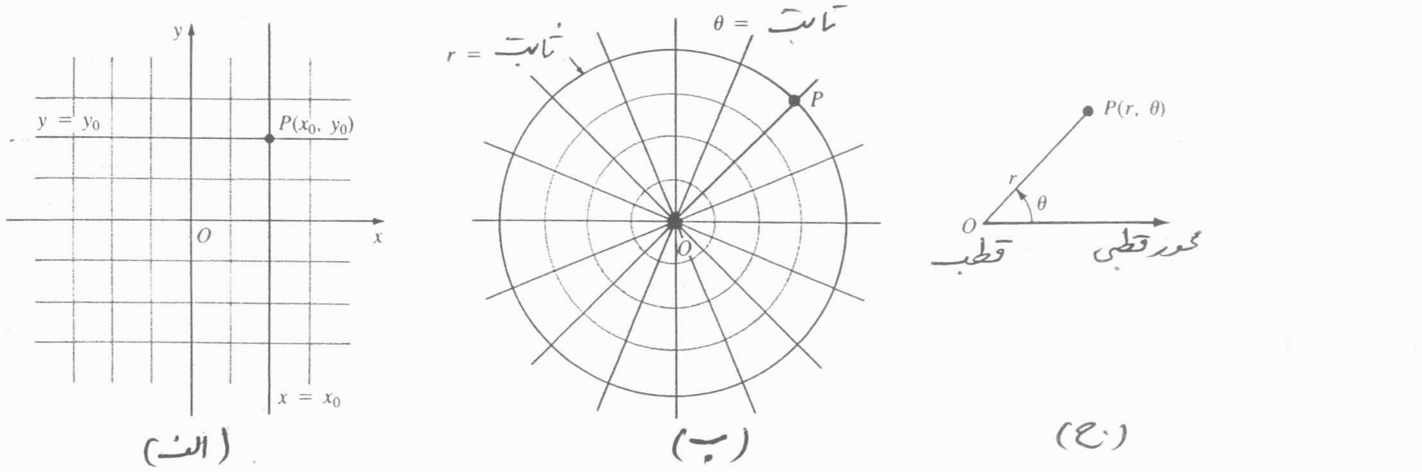
$$s=8\int_0^{\pi/4}\sec^3\theta\,d\theta$$

تبدیل می‌شود. از انتگرال گیری جزء به جزء داریم

$$s=\Big[4\sec\theta\tan\theta+4\ln|\sec\theta+\tan\theta|\Big]_0^{\pi/4}$$
$$=4\sqrt{2}+4\ln(\sqrt{2}+1)\simeq 9.1823$$

۳.۱۵ دستگاه مختصات قطبی

تاکنون با استفاده از دستگاه مختصات دکارتی، مکان نقطه P در صفحه را مشخص می‌کردیم. این دستگاه شامل دو محور، افقی و عمودی است. مختصات نقطه P با فصل مشترک دو خط، یکی عمود بر محور افقی و یکی عمود بر محور قائم، بدست می‌آید. نوع دیگری از دستگاه مختصات، دستگاه مختصات قطبی است. یک نقطه P در صفحه را می‌توان با فصل مشترک یک دایره و یک شعاع در نظر گرفت. شعاع مورد نظر از نقطه‌ای بنام قطب که مرکز دایره نیز می‌باشد رسم می‌شود. این شعاع را محور قطبی نامیم. با مشخص کردن فاصله جهت‌دار r از O و زاویه θ که برحسب رادیان نسبت به محور اولیه واقع بر محور افقی اندازه‌گیری می‌شود، می‌توان نقطه P را تعیین کرد. در این حالت P با زوج مرتب (r, θ) نمایش داده می‌شود. در شکل (۷) مختصات نقطه P در صفحه دکارتی و صفحه قطبی نمایش داده شده است.



(الف) (ب) (ج)

شکل ۷

در مختصات قطبی توضیحات زیر را می‌پذیریم.

الف) زاویه‌های $\theta > 0$ در خلاف حرکت عقربه‌های ساعت نسبت به محور قطبی اندازه‌گیری می‌شوند درحالی که زاویه‌های $\theta < 0$ موافق حرکت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری می‌شوند.

ب) برای رسم نقطه $(-r, \theta)$، $-r < 0$، اندازه $|r|$ واحد را در امتداد شعاع $\theta+\pi$

در نظر می‌گیریم.

ج) مختصات قطب O به صورت $(0,\theta)$ است که در آن θ زاویه دلخواهی است.

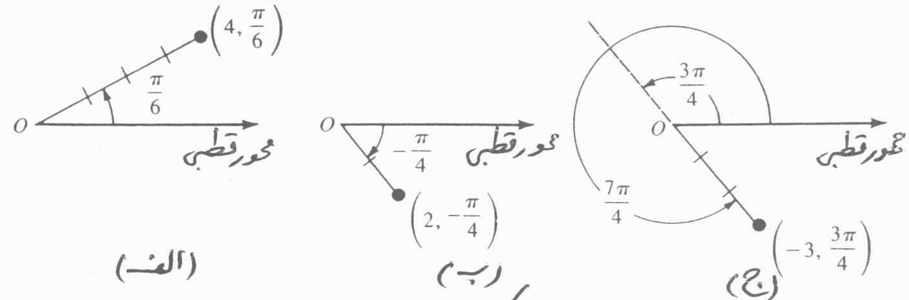
مثال ۱۰. نقاط داده شده در زیر به مختصات قطبی را رسم کنید.

الف) $(4,\frac{\pi}{6})$ ب) $(2,-\frac{\pi}{4})$ ج) $(-3,\frac{3\pi}{4})$

حل. الف) 4 واحد در امتداد شعاع $\frac{\pi}{6}$ را مشخص می‌کنیم. شکل (۸-الف)

ب) 2 واحد در امتداد $-\frac{\pi}{4}$ را مشخص می‌کنیم. شکل (۸-ب)

ج) سه واحد در امتداد شعاع $\frac{3\pi}{4}+\pi=\frac{7\pi}{4}$ را مشخص می‌کنیم. شکل (۸-ج)



شکل ۸

برخلاف دستگاه مختصات دکارتی، توصیف یک نقطه در مختصات قطبی منحصر به فرد نیست. در واقع تمام زوج‌های (r,θ) و $(r,\theta+2n\pi)$ برای $n\in\mathbb{Z}$ معادلند. برای راحتی کار مقادیر منفی r را می‌توان مورد استفاده قرار داد.

مثال ۱۱. زوج‌های زیر همگی نمایش دهندهٔ نقطه $(2,\frac{\pi}{6})$ هستند.

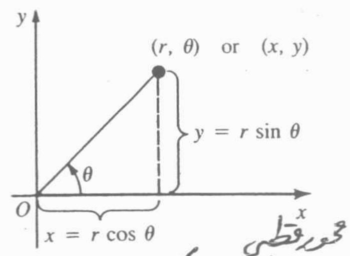
$(2,\frac{13\pi}{6})$ ، $(2,-\frac{11\pi}{6})$ ، $(-2,\frac{7\pi}{6})$ ، $(-2,-\frac{5\pi}{6})$.

تبدیل مختصات دکارتی به قطبی و برعکس ۱۵. با منطبق کردن دو دستگاه مختصات دکارتی روی یک دستگاه مختصات قطبی، شکل (۹)، توصیف قطبی یک نقطه را می‌توان با توصیف دکارتی نقطه با توجه به روابط زیر به یکدیگر تبدیل شود.

تبدیل قطبی به کارتزی

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \qquad (11)$$

این مقادیر را می‌توان برای هر مقدار r در نظر گرفت.



شکل ۹

مثال ۱۲. مختصات قطبی $(2, \frac{\pi}{6})$ را به مختصات دکارتی نقطه تبدیل کنید.

حل. با $r=2$ و $\theta = \frac{\pi}{6}$ از روابط (۱۱) داریم

$$x = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$y = 2\sin\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

بنابراین $(2, \frac{\pi}{6})$ معادل $(\sqrt{3}, 1)$ در مختصات دکارتی است.

تبدیل دکارتی به قطبی. با توجه به شکل (۹)، x و y، r و θ با روابط زیر به هم وابسته‌اند

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad (12)$$

این معادلات برای تبدیل مختصات دکارتی (x, y) به مختصات قطبی (r, θ) مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مثال ۱۳. مختصات دکارتی $(-1, 1)$ را به مختصات قطبی نقطه تبدیل کنید.

حل. با $x=-1$، $y=1$ از معادلات (۱۲) داریم

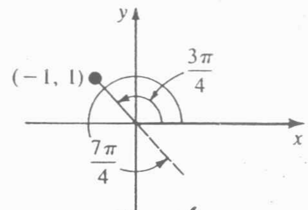
$$r^2 = 2 \quad \text{و} \quad \tan\theta = -1$$

حال $r = \pm\sqrt{2}$ و دو امکان از چندین امکان است که زاویه‌ها در $\tan\theta = -1$ برقرار باشند

یعنی برای $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$ دو نمایش $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$ و $(-\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$ به دست می‌آید.

باید دقت کرد که $(-\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$ و $(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$ نمایش‌های قطبی $(-1, 1)$ نیستند، به عبارت

دیگر، هر زاویه θ و هر مقدار r که در (۱۲) برقرار شوند، این جواب‌ها باید با (۱۱) سازگار باشند. شکل (۱۰) را ببینید.



شکل ۱۰

با توجه به معادلات داده شده در (۱۱)، یک معادله دکارتی را می‌توان به صورت یک معادله قطبی $r=f(\theta)$ شرح داد.

مثال ۱۴. معادله قطبی که دارای همان نمودار دایره $x^2+y^2=4y$ باشد را به دست آورید.

حل. با استفاده از $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$

$$r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=4r\sin\theta$$

$$r(r-4\sin\theta)=0$$

یعنی $r=0$ یا $r=4\sin\theta$، چون $r=0$ تنها قطب را نمایش می‌دهد، پس معادله قطبی دایره به صورت $r=4\sin\theta$ خواهد بود.

مثال ۱۵. معادله قطبی را بیابید که نمودار آن، نمودار سهمی $x^2=8(2-y)$ باشد.

حل.

$$r^2\cos^2\theta=8(2-r\sin\theta)$$

$$r^2(1-\sin^2\theta)=16-8r\sin\theta$$

$$r^2=r^2\sin^2\theta-8r\sin\theta+16$$

$$r^2=(r\sin\theta-4)^2$$

$$r=\pm(r\sin\theta-4)$$

از حل برای r داریم

$$r=\frac{4}{1+\sin^2\theta} \quad \text{یا} \quad r=\frac{-4}{1-\sin\theta} \qquad (۱۳)$$

چون با جایگذاری $(-r, \theta+\pi)$ بجای (r, θ) در معادله دوم از (۱۳) به معادله اول می‌رسیم. پس می‌توان گفت که معادله قطبی سهمی به صورت $r = \frac{4}{1+\sin\theta}$ است.

مثال ۱۶. معادله دکارتی را بیابید که نمودار آن همان نمودار معادله قطبی $r^2 = 9\cos 2\theta$ باشد.

حل. ابتدا از اتحاد مثلثاتی برای کسینوس زاویه دو برابر استفاده می‌کنیم

$$r^2 = 9(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

حال از $r^2 = x^2+y^2$ و $\cos\theta = \frac{x}{r}$ و $\sin\theta = \frac{y}{r}$ داریم.

$$x^2+y^2 = 9\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$(x^2+y^2)^2 = 9(x^2-y^2)$$

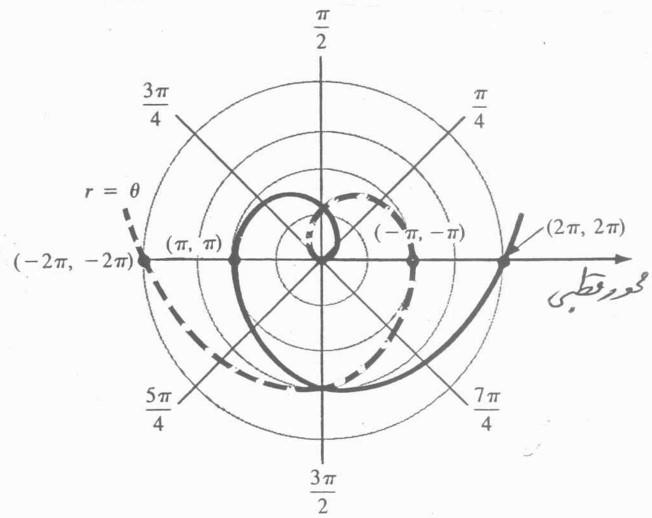
در بخش بعد مفاهیم یک معادله در مختصات قطبی را توسیع می‌دهیم.

۴.۱۰ نمودارهای معادلات قطبی

نمودار یک معادله قطبی $r=f(\theta)$ مجموعه نقاط P است که حداقل یکی از مجموعه مختصاتش در معادله صدق کند، بحث را مشابه با حالت دکارتی ساده $y=x$ شروع می‌کنیم.

مثال ۱۷. نمودار $r=\theta$ را رسم کنید.

حل. وقتی $\theta \geq 0$ صعود می‌کند، r افزایش می‌یابد و نقاط (r,θ) اطراف قطب در خلاف حرکت عقربه‌های ساعت، حرکت می‌کنند. در شکل (۱۱) قسمتی که با خط پررنگ کشیده شده است نشان دهنده این نقاط می‌باشند. در این شکل قسمتی که با خط چین رسم شده، متناظر به $\theta<0$ است.



شکل ۱۱

بسیاری از نمودارها در مختصات قطبی دارای نام های خاصی هستند. نمودار در مثال (۱۷) حالت خاصی از $r=a\theta$ است. نمودار این معادله را حلزون ارشمیدس نامند. برای یک رسم مناسب، تقارن اغلب کمک کننده برای نمودار یک معادله قطبی است.

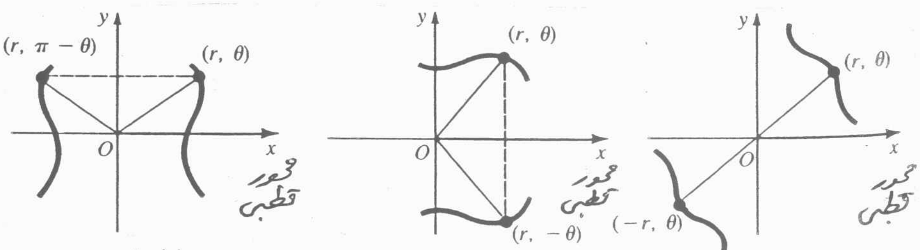
تقارن ۱۱. برای رسم و شرح نمودارهای معادلات قطبی، همان گونه که در شکل (۱۲) دیده می شود، با قرار دادن یک دستگاه دکارتی روی دستگاه مختصات قطبی تقارن را در نظر می گیریم. همان گونه که در شکل مشاهده می شود، یک نمودار قطبی می تواند دارای سه نوع تقارن باشد.

الف) تقارن نسبت به محور yها. اگر (r,θ) نقطه ای از نمودار باشد آنگاه $(r,\pi-\theta)$ نیز نقطه ای از نمودار باشد، گوییم تقارن نسبت به محور yها داریم.

ب) تقارن نسبت به محور xها. اگر وقتی (r,θ) نقطه ای روی نمودار است آنگاه $(r,-\theta)$ نیز نقطه ای روی نمودار باشد، گوییم تقارن نسبت به محور xها داریم.

ج) تقارن نسبت به مبداء. اگر وقتی (r,θ) نقطه ای روی نمودار است، آنگاه $(-r,\theta)$ نیز نقطه ای روی نمودار باشد گوییم نمودار نسبت به مبداء متقارن است.

در شکل (۱۲) دستگاه مختصات قطبی بر یک دستگاه مختصات دکارتی قرار داده شده



(الف) تقارن نسبت به محور y ها

(ب) تقارن نسبت به محور x ها

(ج) تقارن نسبت به مبدا

شکل ۱۲

بنابراین نمودار یک معادله قطبی متقارن نسبت به

الف) محور y ها است هرگاه θ را با $\pi-\theta$ عوض کنیم معادله تغییر نکند.

ب) محور x ها است هرگاه θ را با $-\theta$ عوض کنیم معادله تغییر نکند.

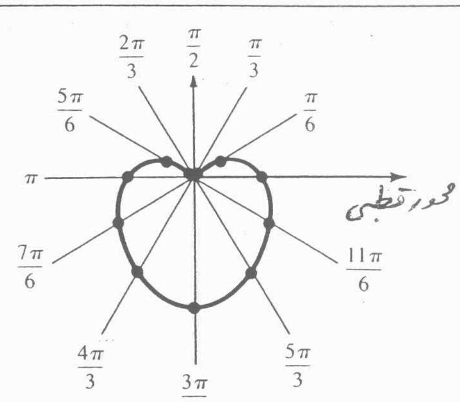
ج) مبدا است هرگاه r را با $-r$ عوض کنیم معادله تغییر نکند.

مثال ۱۸. چون $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$، پس نمودار $r=3-3\sin\theta$ نسبت به محور y ها متقارن است، با جایگزینی $-\theta$ بجای θ و $-r$ بجای r معادله اولیه به دست نمی آید. پس در مورد تقارن های دیگری نمودار نتیجه ای به دست نمی آید.

مثال ۱۹. نمودار $r=3-3\sin\theta$ را رسم کنید.

حل. از مثال (۱۸) دیده می شود که نمودار نسبت به محور y ها متقارن است. با در نظر گرفتن برخی از نقاط خاص در جدول زیر نمودار در شکل (۱۳) رسم شده است.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$	2π
r	3	$\frac{3}{2}$	0.4	0	0.4	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{9}{2}$	5.6	6	5.6	$\frac{9}{2}$	3

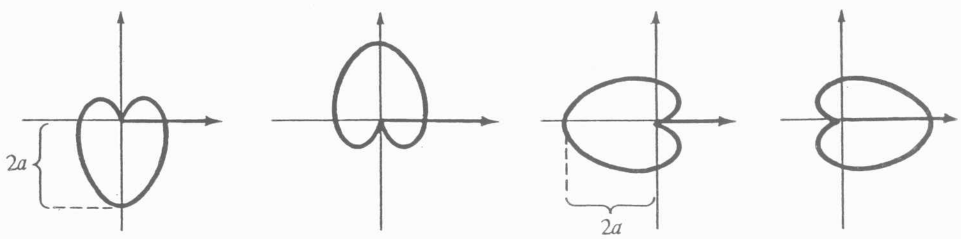


شکل ۱۳

کاردیود ۱۲. معادله در مثال (۱۹) عضوی از یک خانواده از معادلات قطبی است که دارای شکل قلب می باشد و از مبداء می گذرد. نمودار هر معادله به صورت قطبی

$$r = a \pm a\sin\theta \quad \text{یا} \quad r = a \pm a\cos\theta$$

را یک کاردیود نامیم. تنها تفاوت نمودارهای این چهار معادله تقارن نسبت به محور yها ($r = a \pm a\sin\theta$) یا تقارن نسبت به محور xها ($r = a \pm a\cos\theta$) است. شکل (۱۴) را ببینید.



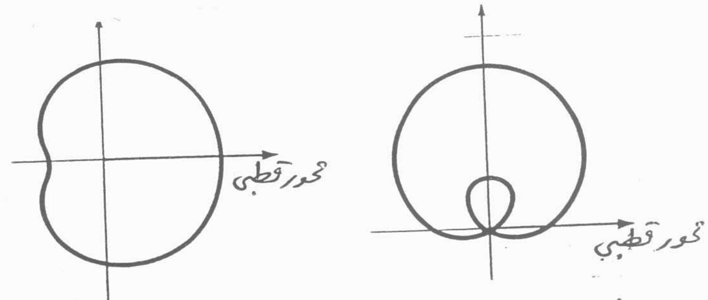
$r = a - a\sin\theta$ (الف) — $r = a + a\sin\theta$ (ب) — $r = a - a\cos\theta$ (ج) — $r = a + a\cos\theta$ (د)

شکل ۱۴

لیماکنها ۱۳. کاردیودها حالت خاصی از منحنی های قطبی به نام لیماکنها هستند

$$r = a \pm b\sin\theta \,, \quad \text{یا} \quad r = a \pm b\cos\theta$$

وقتی $|b|<|a|$ ، لیماکن مشابه با کاردیود است با این تفاوت که از مبداء نمی گذرد. وقتی $|a|<|b|$ ، لیماکن دارای یک حلقه داخلی است. منحنی های لیماکن در شکل (۱۵) نمایش داده شده اند.



(الف) $r = a + b\cos\theta$، $a > b > 0$ — (ب) $r = a + b\sin\theta$، $0 < a < b$

شکل ۱۵

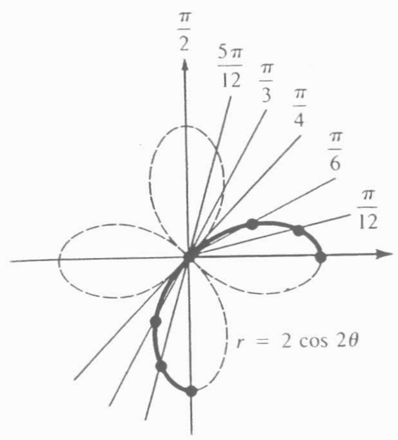
مثال ۲۰. نمودار $r = 2\cos 2\theta$ را رسم کنید.

حل. چون

$$\cos(-2\theta)=\cos 2\theta \quad , \quad \cos 2(\pi-\theta)=\cos 2\theta$$

پس نمودار نسبت به محور xها و محور yها متقارن است. معادله دارای دوره تناوب π است. پس با توجه به انعکاس، تنها فاصله $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ را در نظر می‌گیریم. داده‌ها در جدول زیر خلاصه شده‌اند. نمودار حاصل را یک منحنی رز با چهار برگ نامیم. شکل (۱۶)

θ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
r	2	1.7	1	0	−1	−1.7	−2

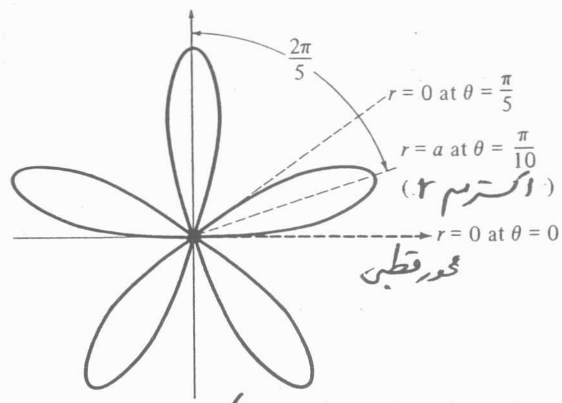


شکل ۱۶

منحنی‌های رز ۱۴. در حالت کلی، اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد، نمودارهای

$$r=a\sin n\theta \quad \text{یا} \quad r=a\cos n\theta \qquad n \geq 2$$

را منحنی‌های رز نامیم. اگر n زوج باشد آنگاه $2n$ برگ وجود دارد و اگر n فرد باشد تعداد حلقه‌ها یا برگ‌ها برابر n است. برای رسم یک منحنی رز می‌توان با رسم یک برگ شروع کرد. برای شروع، زاویه θهایی را می‌یابیم که برای آن r یک اکسترمم است. این خط مرکزی برگ را نمایش می‌دهد. سپس مقادیری از θ را به دست می‌آوریم که منحنی به قطب می‌رسد $(r=0)$. برای تکمیل نمودار از این واقعیت که خطوط مرکزی برگ‌ها به فاصله $\frac{2\pi}{n}$ از یکدیگرند ($\frac{360}{n}$ درجه) تعداد برگ‌ها را رسم می‌کنیم. در شکل (۱۷) نمودار $r=a\sin 5\theta$ ، $a>0$ رسم شده است. فضای بین برگ‌ها با خطوط مرکزی $\frac{2\pi}{5}$ رادیان (یعنی 72°) می‌باشند. نمودار دارای 5 برگ است.



شکل ۱۷

دایره ها ۱۵. نمودارهای $r=a\sin n\theta$ یا $r=a\cos n\theta$ برای حالت خاص $n=1$ به صورت

$$r=a\sin\theta, \quad \text{یا} \quad r=a\cos\theta$$

دایره هایی گذرنده از مرکز با قطر $|a|$ و مراکزی روی محور y ها و محور x ها به ترتیب هستند، شکل (۱۸) نمودارهای $r=a\sin\theta$ و $r=a\cos\theta$ در حالت $a>0$ را نمایش می دهند.

$r = a\sin\theta,\ a > 0$ (الف)　　$r = a\cos\theta,\ a > 0$ (ب)

شکل ۱۸

شیب مماس به یک نمودار قطبی ۱۶. شیب خط مماس به نمودار یک معادله قطبی $r=f(\theta)$ مشتق $\frac{dr}{d\theta}$ نیست. شیب خط مماس به نمودار در مختصات دکارتی $\frac{dy}{dx}$ است. حال با فرض $r=f(\theta)$، $x=r\cos\theta$، $y=r\sin\theta$، در فرم پارامتری داریم

$$x=f(\theta)\cos\theta, \qquad y=f(\theta)\sin\theta$$

پس

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta}$$

مثال ۲۱. شیب خط مماس به نمودار $r=4\sin3\theta$ در $\theta=\frac{\pi}{6}$ را به دست آورید.

حل. از معادلات پارامتری داریم

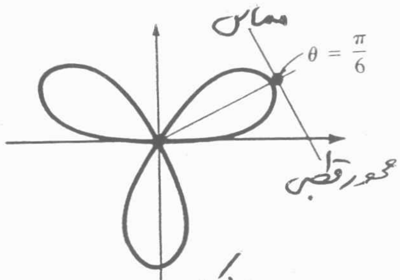
$$x = 4\sin 3\theta \cos\theta, \qquad y = 4\sin 3\theta \sin\theta$$

پس

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$
$$= \frac{4\sin 3\theta \cos\theta + 12\cos 3\theta \sin\theta}{-4\sin 3\theta \sin\theta + 12\cos 3\theta \cos\theta}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/6} = -\sqrt{3}$$

نمودار معادله که یک رز سه برگ است و خط مماس بر آن در $\theta=\frac{\pi}{6}$ در شکل (۱۹) نمایش داده شده است.



شکل ۱۹

مثال ۲۲. نقاطی روی نمودار $r = 3 - 3\sin\theta$ بیابید که خط مماس در آن نقاط افقی اند و نقاطی را بیابید که خط مماس قائم هستند.

حل. خطوط مماس افقی در نقاطی رخ می دهند که $\frac{dy}{d\theta} = 0$ و $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$ درحالیکه مماس های قائم در نقاطی رخ می دهند که $\frac{dx}{d\theta} = 0$ و $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$. حال از معادلات پارامتری داریم

$$x = (3 - 3\sin\theta)\cos\theta, \qquad y = (3 - 3\sin\theta)\sin\theta$$

در نتیجه

$$\frac{dx}{d\theta} = (3 - 3\sin\theta)(-\sin\theta) + \cos\theta\,(-3\cos\theta)$$
$$= -3\sin\theta + 3\sin^2\theta - 3\cos^2\theta$$
$$= -3 - 3\sin\theta + 6\sin^2\theta$$

$$= 3(2\sin\theta + 1)(\sin\theta - 1)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = (3 - 3\sin\theta)\cos\theta + \sin\theta\,(-3\cos\theta)$$

$$= 3\cos\theta\,(1 - 2\sin\theta)$$

از این معادلات ، دیده می‌شود که

در $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، $\theta = \frac{5\pi}{6}$ و $\theta = \frac{3\pi}{2}$ داریم $\frac{dy}{d\theta} = 0$ و $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$

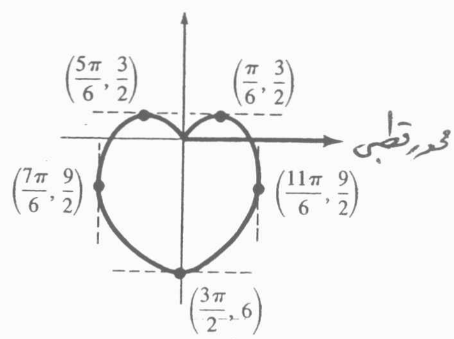
در $\theta = \frac{7\pi}{6}$ و $\theta = \frac{11\pi}{6}$ داریم $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$ و $\frac{dx}{d\theta} = 0$

بنابراین

مماس‌های افقی در نقاط : $(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2})$ ، $(\frac{5\pi}{6}, \frac{3}{2})$ و $(\frac{3\pi}{2}, 6)$ رخ می‌دهند و

مماس‌های قائم در نقاط $(\frac{7\pi}{6}, \frac{9}{2})$ و $(\frac{11\pi}{6}, \frac{9}{2})$ رخ می‌دهند .

این نقاط همراه با خطوط مماس در آنها ، در شکل (۲۰) نمایش داده شده‌اند .



شکل ۲۰

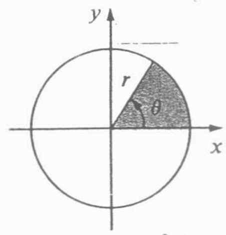
توجه کنید که در مثال (۲۲) به ازای $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $\frac{dy}{d\theta} = 0$ و $\frac{dx}{d\theta} = 0$. بنابراین در قطب $(0, \frac{\pi}{2})$ هیچ اطلاعاتی در مورد خط مماس نداریم .

5.10 مساحت در مختصات قطبی و طول قوس

می‌دانیم که مساحت یک قطاع از دایره ، نشان داده شده در شکل (۲۱) توسط

$$\text{مساحت} = \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)(\pi r^2) = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

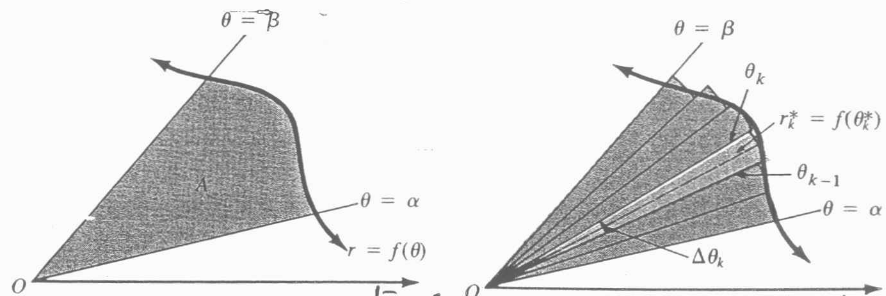
به دست می‌آید که در آن θ برحسب رادیان اندازه‌گیری شده است .



شکل ۲۱

مساحت ۱۷. فرض کنید $r=f(\theta)$ که تابع نامنفی پیوسته روی $[\alpha,\beta]$ است، که در آن $0\le\alpha<\beta\le 2\pi$ ، برای یافتن مساحت A ناحیه محصور نشان داده شده در شکل (۲۲-الف) به نمودار f و شعاع های $\theta=\alpha$ و $\theta=\beta$ از افراز P فاصله $[\alpha,\beta]$ شروع می کنیم

$$\alpha=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n=\beta$$



(الف) (ب)

شکل ۲۲

اگر θ_k^* عددی در kامین زیرفاصله $[\theta_{k-1},\theta_k]$ باشد، آنگاه مساحت قطاعی از دایره به شعاع $r_k=f(\theta_k^*)$ مشخص شده در شکل (۲۲-ب) برابر است با

$$\Delta A_k=\frac{1}{2}[f(\theta_k^*)]^2\Delta\theta_k$$

که در آن $\Delta\theta_k=\theta_k-\theta_{k-1}$ یک زاویه مرکزی است. جمع ریمان

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}[f(\theta_k^*)]^2\Delta\theta_k \qquad (۱۴)$$

یک تقریب برای A است. A را حد (۱۴) وقتی نرم افراز به صفر میل می کند، تعریف می کنیم. پس

$$A=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}[f(\theta_k^*)]^2\Delta\theta_k$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta$$

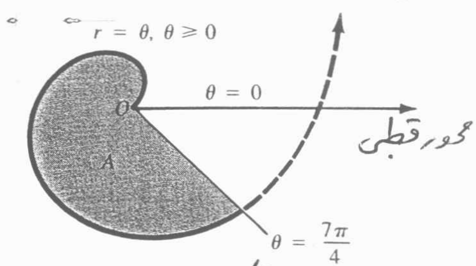
یا به طور ساده‌تر

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^{2}\,d\theta \qquad (۱۵)$$

مثال ۲۳. مساحت ناحیه محصور به فنر $r=\theta$ ، $\theta\geq 0$ بین شعاع‌های $\theta=0$ و $\theta=\frac{7\pi}{4}$ را به دست آورید.

حل. از شکل (۲۳) داریم

$$A=\frac{1}{2}\int_{0}^{7\pi/4}\theta^{2}\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\theta^{3}}{3}\Big|_{0}^{7\pi/4}=\frac{343}{384}\pi^{3}\simeq 27.70$$



شکل ۲۳

مثال ۲۴. مساحت ناحیه محصور به درون‌های کاردیوید $r=2-2\cos\theta$ و لیماسون $r=2+\cos\theta$ را به دست آورید.

حل. ناحیه مورد نظر در شکل (۲۴) نمایش داده شده است. ناحیه نشان می‌دهد که نیاز به دو انتگرال داریم. معادلات زیر را به طور همزمان حل می‌کنیم

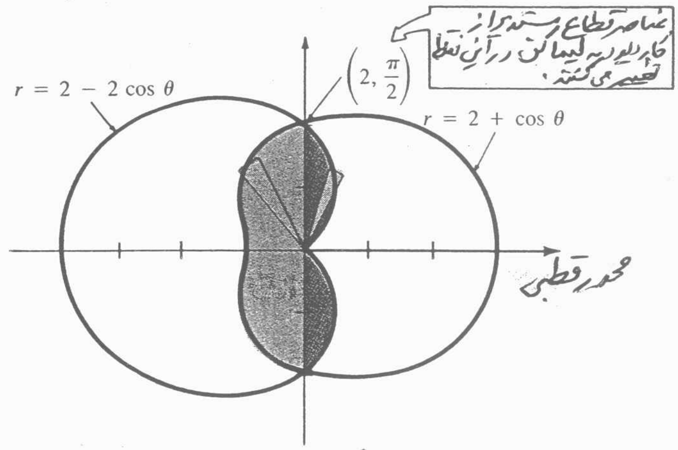
$$2-2\cos\theta=2+\cos\theta \quad \text{یا} \quad \cos\theta=0$$

پس $\theta=\frac{\pi}{2}$. بنابراین نقطه $(2,\frac{\pi}{2})$ یک نقطه تلاقی دو منحنی است. با توجه به تقارن داریم

$$A=2\left\{\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2}(2-2\cos\theta)^{2}d\theta+\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}(2+\cos\theta)^{2}d\theta\right\}$$
$$=4\int_{0}^{\pi/2}(1-2\cos\theta+\cos^{2}\theta)\,d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}(4+4\cos\theta+\cos^{2}\theta)\,d\theta$$
$$=4\int_{0}^{\pi/2}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}\left(4+4\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= 4\left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{9}{2}\theta + 4\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{21}{4}\pi - 12 \simeq 4.49$$



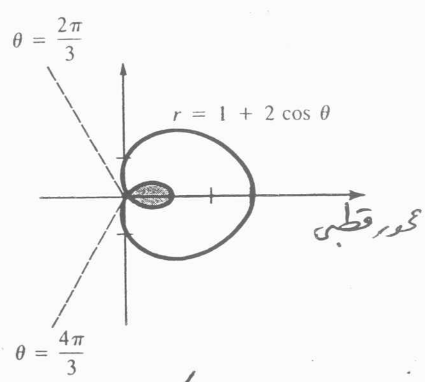
شکل ۲۴

مثال ۲۵. مساحت حلقه داخلی لیماکن $r = 1 + 2\cos\theta$ را به دست آورید.

حل. همان گونه که در شکل (۲۵) دیده می‌شود، حلقه داخلی متناظر به $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3}$ است. گرچه برای این مقادیر θ، $r \leq 0$، از (۱۵) را با $r^2 \geq 0$ و در نتیجه

$$A = \frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (1 + 2\cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \simeq 0.54$$



شکل ۲۵

مساحت محصور به دو نمودار ۱۸. مساحت A، ناحیه سایه خورده در شکل (۲۴) را می‌توان با کم کردن مساحت‌ها از یکدیگر به دست آورد. اگر f و g روی $[\alpha, \beta]$ پیوسته بوده و روی $[\alpha, \beta]$، $f(\theta) \geq g(\theta)$، آن گاه مساحت محصور به نمودارهای $r = f(\theta)$ و

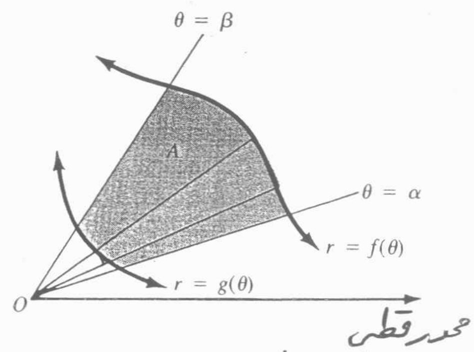
$r=g(\theta)$ ، $\theta=\alpha$ و $\theta=\beta$ برابر

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\theta)]^2d\theta-\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[g(\theta)]^2d\theta$$

است، که می‌توان آن را به صورت

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left([f(\theta)]^2-[g(\theta)]^2\right)d\theta \qquad (۱۶)$$

نوشت،



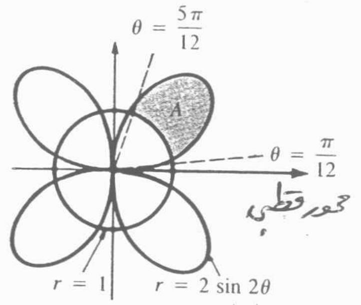
شکل ۲۶

مثال ۲۶، مساحت ناحیه محصور در ربع اول خارج از دایره $r=1$ و داخل منحنی رز $r=2\sin 2\theta$ را به دست آورید.

حل. دو معادله را همزمان حل می‌کنیم

$$1=2\sin 2\theta, \Rightarrow \sin 2\theta=\frac{1}{2}$$

پس $2\theta=\pi/6$ و $2\theta=\frac{5\pi}{6}$، بنابراین دو نقطه تلاقی در ناحیه اول $(1,\frac{\pi}{12})$ و $(1,\frac{5\pi}{12})$ است. مساحت مورد نظر در شکل (۲۷) نمایش داده شده است.



شکل ۲۷

پس

$$A=\frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12}[(2\sin 2\theta)^2-1^2]d\theta=\frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12}[4\sin^2\theta-1]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12}\left[4\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)-1\right]d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 4\theta\right]_{\pi/12}^{5\pi/12}$$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\simeq 0.96$$

طول قوس برای منحنی‌های قطبی ۱۹. اگر $r=f(\theta)$ معادله منحنی C در مختصات قطبی باشد آنگاه معادلات پارامتریک C عبارتند از

$$x=f(\theta)\cos\theta,\quad y=f(\theta)\sin\theta,\quad \alpha\le\theta\le\beta$$

حال اگر f دارای مشتق پیوسته باشد، آنگاه به روش مستقیم می‌توان فرمولی برای طول قوس در مختصات قطبی به دست آورد. چون

$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta$$

پس

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=[f'(\theta)]^2+[f(\theta)]^2=\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2$$

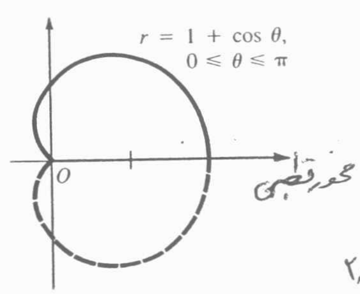
بنابراین

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}\,d\theta \qquad (۱۷)$$

مثال ۲۷. طول کاردیود $r=1+\cos\theta$ برای $0\le\theta\le\pi$ را به دست آورید.

حل. قسمتی از نمودار در شکل (۲۸) نمایش داده شده است، چون $\frac{dr}{d\theta}=-\sin\theta$ پس

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2=\sin^2\theta+(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)$$
$$=2+2\cos\theta$$
$$s=2\sqrt{2}\int_0^\pi\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta$$
$$=2\int_0^\pi\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=4\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi=4$$



شکل ۲۸

چرا در این مثال طول کامل کاردیود ($0\le\theta\le2\pi$) برابر $s=2\int_0^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$ نیست؟