فصل ۱۱. اعداد مختلط

۱.۱۱. اعداد مختلط و عمل های دوتایی

در این فصل، می خواهیم میدان بزرگتری به کمک میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ تعریف کنیم. مجموعهٔ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y):\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}.$$

دو زوج (x_1,y_1) و (x_2,y_2) مساوی اند اگر و تنها اگر $x_1=x_2$ و $y_1=y_2$. در این حالت می نویسیم

$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2).$$

برای زوج مرتب $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$، عدد حقیقی x را مختص اول و عدد حقیقی y را مختص دوم نامیم. حال روی مجموعهٔ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ که مشخصاً دارای حداقل دو عضو است، دو عمل دوتایی به صورت زیر تعریف می کنیم.

فرض کنید z_1 و z_2 عناصر دلخواهی از $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ باشند. پس به ازای x_1، y_1، x_2 و y_2ی در $\mathbb{R}$ داریم $z_1=(x_1,y_1)$ و $z_2=(x_2,y_2)$، جمع و ضرب z_1 و z_2 را به ترتیب، به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} z_1+z_2&=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2),\\ z_1z_2&=(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1). \end{aligned} \tag{1}$$

z_1+z_2 و z_1z_2 را به ترتیب جمع و ضرب زوجهای مرتب z_1 و z_2 نامیم. به وضوح حاصل جمع و ضرب دو زوج z_1 و z_2 تعریف شده در (۱)، زوجهای مرتبی در $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ می باشند. بنابراین هر دو عمل جمع و ضرب زوجهای مرتب از اعداد حقیقی، عملهای دوتایی خوش تعریف روی مجموعه $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ هستند.

قضیه ۱. برای زوجهای مرتب z_1، z_2 و z_3 با مولفه های حقیقی داریم:

الف) $z_1+z_2=z_2+z_1$؛

ب) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$.

اثبات. اعداد حقیقی x_1، y_1، x_2، y_2، x_3 و y_3 وجود دارند به طوری که $z_1=(x_1,y_1)$،

$z_2=(x_2,y_2)$ و $z_3=(x_3,y_3)$. پس طبق روابط (۱) داریم

الف)

$$\begin{aligned}
z_1+z_2 &= (x_1,y_1)+(x_2,y_2)\\
&= (x_1+x_2,\ y_1+y_2)\\
&= (x_2+x_1,\ y_2+y_1)\\
&= (x_2,y_2)+(x_1,y_1) = z_2+z_1 .
\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}
z_1+(z_2+z_3) &= (x_1,y_1)+\big((x_2,y_2)+(x_3,y_3)\big)\\
&= (x_1,y_1)+(x_2+x_3,\ y_2+y_3)\\
&= \big(x_1+(x_2+x_3),\ y_1+(y_2+y_3)\big)\\
&= \big((x_1+x_2)+x_3,\ (y_1+y_2)+y_3\big)\\
&= (x_1+x_2,\ y_1+y_2)+(x_3,y_3)\\
&= \big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big)+(x_3,y_3)\\
&= (z_1+z_2)+z_3 .
\end{aligned}$$

مشابه حالت حقیقی، از $z_1+z_2+z_3$ بجای $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$ استفاده می‌کنیم.

برای هر زوج مرتب z از اعداد حقیقی، مثلاً $z=(x,y)$، اگر 0 نشان دهندهٔ زوج مرتب $(0,0)$ باشد، آنگاه

$$z+0=0+z=z .$$

بطور مشابه، برای هر زوج مرتب $z=(x,y)$، زوج مرتب $(-x,-y)$ وجود دارد بطوری که

$$\begin{aligned}
z+(-x,-y) &= (x,y)+(-x,-y)\\
&= (x-x,\ y-y)\\
&= (0,0) = 0 = (-x,-y)+z ,
\end{aligned}$$

بنابراین $(-x,-y)$ معکوس جمعی $z=(x,y)$ است، قرار می‌دهیم

$$-z=-(x,y)=(-x,-y),$$

در نتیجه $z+(-z)=0$. بنابراین نتیجه زیر ثابت شد.

قضیه ۲. زوج مرتب منحصربفرد از اعداد حقیقی، یعنی $0=(0,0)$ وجود دارد به طوری که برای هر $z=(x,y)$ داریم

$$z+0=0+z=z.$$

بعلاوه، برای $z=(x,y)$ داریم $z+(-z)=0$ که در آن $-z=(-x,-y)$.

قضیه ۳. به ازای زوجهای مرتب z_1، z_2 و z_3 از اعداد حقیقی داریم

الف) $z_1z_2=z_2z_1$؛

ب) $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$.

اثبات. فرض کنید $z_1=(x_1,y_1)$، $z_2=(x_2,y_2)$ و $z_3=(x_3,y_3)$، که در آن x_1، y_1، x_2، y_2، x_3 و y_3 اعداد حقیقی‌اند. طبق تعریف ضرب داریم

الف)
$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1) \\ &= (x_2x_1-y_2y_1,\ x_2y_1+x_1y_2) \\ &= (x_2,y_2)(x_1,y_1) \\ &= z_2z_1. \end{aligned}$$

ب) مشابه (الف) است.

فرض کنید $1=(1,0)$. برای هر زوج مرتب $z=(x,y)$ از اعداد حقیقی x و y داریم

$$\begin{aligned} 1z &= (1,0)(x,y) \\ &= (x,y)=z=z1 \end{aligned}$$

به عبارت دیگر 1 همانی ضرب در مجموعهٔ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ است.

بنابراین مجموعهٔ تمام زوج‌های مرتب از اعداد حقیقی با دو عمل دوتایی تعریف شده در (۱) تشکیل یک میدان می‌دهد. فرض کنید $\mathbb{C}$ مجموعهٔ تمام زوج‌های مرتب از اعداد حقیقی است که روی آن دو عمل دوتایی جمع و ضرب به صورت (۱) تعریف شده است.

قضیهٔ ۱۲.۴ . $(\mathbb{C},+,\cdot)$ یک میدان است.

اثبات. برای هر $z_1=(x_1,y_1)$ ، $z_2=(x_2,y_2)$ در $\mathbb{C}$ ، داریم

$$z_1+z_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2),$$

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1).$$

حال با توجه به قضایا و توضیحات ارائه شده، تنها کافی است نشان دهیم که هر عنصر ناصفر در $\mathbb{C}$ دارای معکوس ضربی بوده و برای هر z_1 ، z_2 ، z_3 در $\mathbb{C}$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

عنصر صفر $\mathbb{C}$ دارای معکوس جمعی است، یعنی زوج مرتب $(0,0)=0$. فرض کنید $z=(x,y)\in\mathbb{C}$ ناصفر است، پس حداقل یکی از x ، y ناصفر است. اگر $w=(u,v)\in\mathbb{C}$ چنان باشد که $zw=1=(1,0)$. باید داشته باشیم

$$1=(1,0)=zw$$

$$=(x,y)(u,v)$$

$$=(xu-yv,\ xv+yu).$$

حال تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $xu-yv=1$ و $xv+yu=0$ باشد یا

$$x^2u-xyv=x \quad \text{یا} \quad xyv+y^2u=0.$$

یا $(x^2+y^2)u=x$. پس

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},$$

و در نتیجه

$$v=\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

پس برای هر $z=(x,y)\in\mathbb{C}$، که در آن x و y با هم صفر نیستند، معکوس ضربی z که با z^{-1} نمایش می‌دهیم عبارت است از

$$z^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\,,\,\frac{-y}{x^2+y^2}\right).$$

برقراری شرط توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع واضح است. بنابراین مجموعهٔ زوج‌های مرتب از اعداد حقیقی تحت عمل‌های دوتایی تعریف‌شده در (۱) یک میدان است.

میدان $(\mathbb{C},+,\cdot)$ را میدان اعداد مختلط نامیم که همواره توسط $\mathbb{C}$ نشان داده می‌شود. عضو $z=(x,y)$ از این میدان را یک عدد مختلط نامیم.

توجه کنید که روی مجموعهٔ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ از زوج‌های مرتب اعداد حقیقی، عمل‌های دیگری نیز می‌توان تعریف کرد. به عنوان مثال، عمل‌هایی تعریف می‌کنیم که $\mathbb{C}$ یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد. در هر حال، وقتی از مجموعهٔ اعداد مختلط نام می‌بریم، منظور مجموعهٔ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ با عمل‌های دوگانهٔ تعریف‌شده در (۱) است. یک عدد مختلط نه‌تنها به طور ساده به عنوان یک زوج مرتب از اعداد حقیقی است، بلکه به عنوان عضوی از میدان $\mathbb{C}$ می‌باشد.

زیرمجموعهٔ S از میدان F را یک زیرمیدان F نامیم، هرگاه تحت عمل‌های دوتایی F تحدیدشده به S یک میدان به دست آید. به عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد گویا $\mathbb{Q}$ زیرمیدانی از میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است.

قضیه ۵. مجموعهٔ $S=\{(x,0)\in\mathbb{C} \;:\; x\in\mathbb{R}\}$ شامل اعداد مختلطی که مؤلفهٔ دوم آنها صفر است، تشکیل یک زیرمیدان از میدان $\mathbb{C}$ می‌دهد.

اثبات. فرض کنید $(x,0)$ و $(y,0)$ اعضای دلخواهی از S باشند، در این صورت

$$(x,0)+(y,0)=(x+y,0)\in S,$$

$$(x,0)(y,0)=(xy,0)\in S.$$

همچنین $(0,0)$ و $(1,0)$ متعلق به S هستند و برای $(x,0)\in S$ داریم $(-x,0)\in S$ و

اگر $(x,0)\in S$ و $x\neq 0$، به آسانی معکوس ضربی آن یعنی $\left(\frac{x}{x^2+y^2},0\right)\in S$ ، $\left(\frac{1}{x},0\right)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},0\right)$
دیگر خواص میدان به سادگی برقرارند. پس S یک میدان و در نتیجه زیرمیدانی از $\mathbb{C}$ است.

نمی‌توان یک عدد حقیقی را در یک عدد مختلط ضرب یا جمع نمود به طوری که حاصل آن عضوی از میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد. در هر حال عناصری در $\mathbb{C}$ وجود دارند که می‌توان آنها را با اعداد حقیقی یکسان در نظر گرفت و اعمال جمع و ضرب میدان مختلط را برای آنها اختیار کرد. در قضیه زیر نشان می‌دهیم که میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را می‌توان با زیرمیدانی از $\mathbb{C}$ مانند S یکسان نمود.

قضیه ۶. تناظر دوسویی φ از $\mathbb{R}$ بروی S وجود دارد که عملهای میدان $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ را حفظ می‌کند، که در آن $S=\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$ زیرمیدان $\mathbb{C}$ است.

اثبات. تناظر $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ را توسط $\varphi(x)=(x,0)$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم. واضح است که φ یک دوسویی از $\mathbb{R}$ بروی S است. برای هر $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ داریم

$$\begin{aligned}\varphi(x_1+x_2)&=(x_1+x_2,0)\\&=(x_1,0)+(x_2,0)\\&=\varphi(x_1)+\varphi(x_2)\end{aligned}$$

بطور مشابه

$$\begin{aligned}\varphi(x_1x_2)&=(x_1x_2,0)\\&=(x_1,0)(x_2,0)\\&=\varphi(x_1)\varphi(x_2).\end{aligned}$$

توجه کنید که در قضیه (۶)، x_1+x_2 نشان دهنده جمع اعداد حقیقی x_1 و x_2 در میدان $\mathbb{R}$ است درحالی که $\varphi(x_1)+\varphi(x_2)$ جمع دو عدد مختلط $\varphi(x_1)=(x_1,0)$ و $\varphi(x_2)=(x_2,0)$ در $\mathbb{C}$ است.

بنابراین نه تنها $\mathbb{R}$ در تناظر یک به یک با مجموعه S از $\mathbb{C}$ است، بلکه عملهای روی $\mathbb{R}$ اعمال اعمال روی S را نتیجه می‌دهند. در نتیجه می‌توانیم S را با $\mathbb{R}$ یکسان در نظر بگیریم. پس هر عدد حقیقی x را می‌توان به عنوان عدد مختلط $(x,0)$ اختیار کرد. به دلیل این یکسانی $\mathbb{R}$ با S، گاهی اوقات $\mathbb{R}$ را به عنوان زیرمیدان $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیرند، ولی باید در نظر داشت که $\mathbb{R}$ را می‌توان با زیرمیدانی از $\mathbb{C}$ مانند S یکسان در نظر گرفت. پس اگر بیان شده که عدد حقیقی x یک عدد مختلط است یا $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$، تنها به این معنا است که $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$.

۲.۱۱ یکه‌ی موهومی

عدد مختلط $(0,1)$ را در نظر بگیرید. برای هر عدد مختلط $z=(x,y)$ داریم

$$(0,1)(x,y)=(-y,x).$$

بالاخص برای عدد حقیقی y

$$(0,1)(y,0)=(0,y),$$

حال عدد مختلط $z=(x,y)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)(y,0).$$

تعریف ۷. عدد مختلط $(0,1)$ را با نماد i، ($iota$) نمایش می‌دهیم و آن را یکه‌ی موهومی نامیم.

با توجه به $i=(0,1)$، داریم

$$i^2=(0,1)^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)$$

چون $(-1,0)$ را می‌توان با عدد حقیقی -1 یکسان در نظر گرفت، دیده می‌شود که عدد مختلط $i=(0,1)$ دارای مجذوری برابر -1 است. پس

$$i=(0,1)=\sqrt{-1},$$

همان‌گونه که دیدیم، عدد مختلط $(x,0)$ را می‌توان با عدد حقیقی x یکسان در نظر گرفت. برای

هر عدد مختلط ω و هر عدد حقیقی x ، $x+\omega$ را بجای $\omega+(x,0)$ و $x\omega$ را برای $\omega(x,0)$ می‌نویسیم. چون هر $z=(x,y)\in\mathbb{C}$ را می‌توان بفرم

$$z=(x,0)+(0,1)(y,0)$$

نوشت و $i=(0,1)$ ، پس z را می‌توان به صورت

$$z=x+iy$$

نوشت.

با این توضیحات برای اعداد مختلط، عملا روی آنها را مانند اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم و همواره در ذهن به یاد داریم که $i^2=-1$. پس برای هر $z_1=(x_1,y_1)=x_1+iy_1$ و $z_2=(x_2,y_2)=x_2+iy_2$ داریم

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (x_1+iy_1)+(x_2+iy_2) \\ &= (x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \\ &= (x_1+x_2,\ y_1+y_2), \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) \\ &= x_1x_2+i^2y_1y_2+ix_1y_2+ix_2y_1 \\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1) \\ &= (x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1). \end{aligned}$$

پس عدد مختلط $z=(x,y)$ را می‌توان یا به صورت یک زوج مرتب (x,y) یا به عنوان ترکیب $x+iy$ که در آن $i=\sqrt{-1}$ ، در نظر گرفت.

از مبانی ریاضیات یادآوری می‌کنیم که اگر اصول موضوعه زیر برای میدان F با دو عمل $+$ و $.$ برقرار باشد، این میدان را یک میدان مرتب نامیم، یعنی می‌توان یک رابطه ترتیب روی F داشت. در اینجا ابتدا اصول موضوع ترتیب را یادآوری می‌کنیم

اصل موضوع ۱. دقیقاً یکی از رابطه‌های $x=y$ ، $x<y$ ، $x>y$ برقرار است.
($x>y$ و $y<x$ دارای یک معنی هستند)

اصل موضوع ۲. هرگاه $x<y$ ، آنگاه به ازای هر t ، $x+t<y+t$.

اصل موضوع ۳. هرگاه $x>0$ و $y>0$ ، آنگاه $xy>0$.

اصل موضوع ۴. هرگاه $x>y$ و $y>z$ ، آنگاه $x>z$.

که در تمام اصول موضوع بالا ، x ، y ، z ، t اعضای میدان F و 0 عنصر همانی عمل اول میدان (در اینجا عمل $+$) است.

به عنوان مثالی از یک میدان مرتب ، می‌توان میدان اعداد حقیقی $(\mathbb{R},+,\cdot)$ را داشت.

از این اصلهای موضوع می‌توان قواعدی را که در عمل با نامساوی‌ها متداول هستند بدست آورد. مثلاً هرگاه $x<y$ ، آنگاه چنانچه $t>0$ باشد ، $xt<yt$ ، حال آنکه به ازای $t<0$ ، $xt>yt$. همچنین هرگاه $x>y$ و $z>w$ و در آنها $y>0$ و $w>0$ ، آنگاه $xz>yw$.

مطلب بسیار مهم ، این است که در میدان اعداد مختلط نمی‌توان برای رابطهٔ $>$ تعریفی قائل شد که واجد همه خواص اصول موضوع بالا باشد. به عبارت دیگر ، اگر فرض کنیم قادر به تعریف رابطه‌ای مانند $>$ باشیم که در اصلهای موضوع 1 ، 2 و 3 صدق کند. در این صورت ، چون $i\neq 0$ ، بنابر اصل موضوع ۱ ، باید $i>0$ یا $i<0$. اگر $i>0$ درنظر گرفته شود ، با انتخاب $x=y=i$ ، از اصل موضوع 3 نتیجه می‌گیریم که $i^2>0$ یا $-1>0$. (در اینجا -1 به عنوان یک عدد مختلط است). حال با توجه به اصل موضوع 2 ، عدد 1 را به دو طرف نامساوی اخیر اضافه می‌کنیم ، نتیجه می‌شود که $0>1$ ، از طرف دیگر با بکار بردن اصل موضوع 3 در مورد نامساوی $-1>0$ داریم $1>0$ ، بنابراین هم $0>1$ و هم $1>0$ که بنابر اصل موضوع ۱ چنین وضعی غیرممکن است. لذا فرض $i>0$ به تناقض می‌رسد. بطور مشابه می‌توان دید که فرض $i<0$ نیز به تناقض خواهد رسید. پس اعداد مختلط را نمی‌توان بقسمی مرتب کرد که در اصلهای موضوع

ترتیب صدق کنند.

اما سؤال در اینجا این است که چگونه مفاهیم هندسی را برای اعداد مختلط مطرح کنیم. توجه به نمایش دکارتی زوج مرتب (x,y) در صفحه مختصات، شاید راهگشا باشد. می‌دانیم که هر نقطه در صفحه را می‌توان توسط یک زوج مرتب از اعداد حقیقی نمایش داد و هر زوج مرتب از اعداد حقیقی نشان دهنده یک نقطه در صفحه است. پس تناظری یک به یک بین نقاط صفحه مختصات و زوجهای مرتب در $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ وجود دارد. از طرف دیگر دیدیم که هر زوج مرتب (x,y) عددی مختلط در $\mathbb{C}$ است. پس بین میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ و نقاط واقع در صفحه دکارتی تناظری یک به یک وجود دارد. بنابراین می‌توانیم صفحه دکارتی را با میدان اعداد مختلط یکریخت نامیم و در نتیجه مفاهیم هندسی و کشف توابع مختلط را مطرح کنیم. برای این منظور در بخش بعد، ابتدا توابعی ذاتی روی میدان اعداد مختلط را معرفی کرده و سپس در بخشهای بعدی از این مفاهیم استفاده خواهیم کرد.

۳.۱۱ توابعی ذاتی روی میدان اعداد مختلط

توابعی را در این بخش مورد مطالعه قرار می‌دهیم که می‌توان آنها را به روشهای طبیعی روی میدان $\mathbb{C}$ تعریف نمود. هر عدد مختلط $z=(x,y)$ زوج مرتبی از اعداد حقیقی x و y است. بنابراین هر عدد مختلط را می‌توان بر روی مختص اولش تصویر نمود که تابعی با مقادیر حقیقی روی $\mathbb{C}$ حاصل می‌شود. بطور مشابه، تصویر هر عدد مختلط بر مختص دوم آن تابع با مقادیر حقیقی دیگری روی $\mathbb{C}$ را نتیجه می‌دهد.

تعریف ۸. برای هر $z=(x,y)\in\mathbb{C}$، تعریف می‌کنیم $Re(z)=x$ و آن را قسمت حقیقی z نامیم. پس Re تابعی روی $\mathbb{C}$ توی $\mathbb{R}$ است. برای $z=(x,y)\in\mathbb{C}$ تعریف می‌کنیم $Im(z)=y$ و آن را قسمت موهومی z نامیم. Im نیز یک تابع روی $\mathbb{C}$ توی

$\mathbb{R}$ است.

برای هر $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$،

$$Re(z_1+z_2) = Re(z_1)+Re(z_2),$$
$$Im(z_1+z_2) = Im(z_1)+Im(z_2).$$

اما در حالت کلی $R(z_1 z_2)$ و $Re(z_1).Re(z_2)$ با هم برابر نمی‌باشند، همچنین $Im(z_1z_2)$ با $Im(z_1)\,Im(z_2)$ یکسان نیست.

مثال ۱. فرض کنید $z_1 = 2+i$ و $z_2 = 1-3i$، در این صورت

$$Re(z_1)=2, \quad Im(z_1)=1, \quad Re(z_2)=1, \quad Im(z_2)=-3$$
$$z_1 z_2 = (2+i)(1-3i) = (2+3)+i(-6+1) = 5-5i$$
$$Re(z_1 z_2) = 5 \neq (2)(1) = Re(z_1).\,Re(z_2),$$
$$Im(z_1 z_2) = -5 \neq (1)(-3) = Im(z_1).\,Im(z_2).$$

مثال ۲. فرض کنید $z = 3+i\sqrt{5}$، آنگاه،

$$Re(z)=3, \quad Im(z)=\sqrt{5},$$
$$Re(z+1)=4, \quad Im(z+1)=\sqrt{5}.$$

تعریف ۹. مزدوج مختلط، عدد مختلط $z=(x,y)=x+iy$ به صورت

$$(x,-y) = x-iy,$$

تعریف می‌شود و آن را با $\bar{z}$ نمایش می‌دهیم. پس اگر $z=x+iy$، آنگاه $\bar{z}=x-iy$.
مزدوج تابعی تعریف شده روی $\mathbb{C}$ به توی خودش است.

قضیه ۱۰. برای هر $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$،

الف) $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$؛

ب) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$؛

ج) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ ، $z_2 \neq 0$؛

د) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$؛

هـ) $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$؛

و) $z\bar{z}$ حقیقی و مثبت است بجز در حالتی که $z=0$ باشد.

ز) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$؛

ح) $\bar{\bar{z}} = z$؛

ط) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$ ، $z_2 \neq 0$.

اثبات. (الف) واضح است. برای (ب)، فرض کنید $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$؛ در نتیجه $\bar{z}_1 = x_1 - iy_1$ ، $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$ و داریم

$$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

پس $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

ج) چون $x_2 + iy_2 = z_2 \neq 0$ ، بنابراین x_2 و y_2 باهم صفر نیستند، یعنی $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$. بنابراین

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = (x_1 + iy_1)\left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2} - i\frac{y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$$

$$= \frac{x_1x_2}{x_2^2+y_2^2} + \frac{y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\left(\frac{x_2y_1}{x_2^2+y_2^2} - \frac{x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$$

و

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} = (x_1 - iy_1)\left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$$

$$= \frac{x_1x_2}{x_2^2+y_2^2} + \frac{y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\left(\frac{x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} - \frac{x_2y_1}{x_2^2+y_2^2}\right)$$

پس

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{x_1x_2}{x_2^2+y_2^2} + \frac{y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} - i\left(\frac{x_2y_1}{x_2^2+y_2^2} - \frac{x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$$

$$= \frac{x_1x_2}{x_2^2+y_2^2} + \frac{y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\left(\frac{x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} - \frac{x_2y_1}{x_2^2+y_2^2}\right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

د) فرض کنید $z=x+iy$. پس $\bar{z}=x-iy$ و داریم

$$z+\bar{z} = x+iy+x-iy = 2x = 2\,\mathrm{Re}(z)$$

ه) با فرض (د) داریم

$$z-\bar{z} = x+iy-x+iy = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}(z).$$

و) $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2,$

اگر $z\neq 0$ باشد آنگاه $z\bar{z}=x^2+y^2>0$ و برای $z=0$ داریم $z\bar{z}=0$.

ز) می‌دانیم که $-z_2=-x_2-iy_2$، از (الف) داریم

$$\overline{z_1-z_2} = \overline{z_1+(-z_2)} = \bar{z}_1 + \overline{(-z_2)}$$

$$= \bar{z}_1 + \overline{(-x_2-iy_2)}$$

$$= \bar{z}_1 + (-x_2+iy_2)$$

$$= \bar{z}_1 - (x_2-iy_2) = \bar{z}_1 - \bar{z}_2.$$

ح) واضح است.

ط) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\cdot 1 = \frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}.$

∎

تعریف ۱۱. برای هر $z=(x,y)=x+iy\in\mathbb{C}$، قدر مطلق z عدد حقیقی نامنفی است که توسط

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2},$$

تولید می‌شود و آن را با $|z|$ نمایش می‌دهیم. پس

$$|z| = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \left((\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

قدر مطلق عدد مختلط z، تابعی حقیقی روی $\mathbb{C}$ است، که $\mathbb{C}$ را به مجموعه اعداد حقیقی

تابعی می‌نگارد و با $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ نمایش داده می‌شود، که در آن قدرمطلق هر $z \in \mathbb{C}$ را با $|z|$ نشان داده‌ایم. اگر x عددی حقیقی باشد، آنگاه x همانند عدد مختلط $(x,0)$ است و

$$|x| = |(x,0)| = +\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

بنابراین نماد قدرمطلق روی $\mathbb{C}$ با نماد متناظر روی $\mathbb{R}$ همخوانی دارد.

قضیه ۱۳. تابع قدرمطلق $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ در خواص زیر صدق می‌کند. برای هر $z \in \mathbb{C}$،

الف) $|z| = |-z| = |\bar{z}| \geq 0$

ب) $|z|^2 = z\bar{z}$

ج) $|Re(z)| \leq |z|$ ، $|Im(z)| \leq |z|$

اثبات. به ازای هر $z = (x,y) = x+iy \in \mathbb{C}$، داریم

$$-z = (-x,-y), \qquad \bar{z} = (x,-y),$$

پس

$$\begin{aligned} |z| = (x^2+y^2)^{1/2} &= ((-x)^2 + (-y)^2)^{1/2} = |-z| \\ &= (x^2 + (-y)^2)^{1/2} = |\bar{z}| \end{aligned}$$

که درستی (الف) را نتیجه می‌دهد. برای (ب) داریم

$$\begin{aligned} z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) &= (x^2+y^2) + i(xy-xy) \\ &= x^2+y^2 \\ &= |z|^2. \end{aligned}$$

و برای (ج)، چون $Re(z) = x$ ، $Im(z) = y$، داریم

$$|Re(z)| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z|,$$
$$|Im(z)| = |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z|.$$

قضیه ۱۳. برای

الف) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

ب) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

ج) $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

اثبات: فرض کنید $z_1 = x_1 + iy_1$

الف)

$$\ldots + i(x_1y_2+x_2y_1)|^2$$

$$\ldots)^2 + (x_1y_2+x_2y_1)^2$$

$$\ldots y_2^2) + y_1^2(x_2^2+y_2^2)$$

$$\ldots + y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$$

$$\ldots z_1|^2 |z_2|^2.$$

ب) با فرض $z_2 \neq 0$ داریم:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \ldots \left(\frac{z_1}{z_2}\right)\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

$$\ldots \left(\frac{z_1}{z_2}\right)\left(\frac{\bar z_1}{\bar z_2}\right)$$

$$= \frac{z_1\bar z_1}{z_2\bar z_2} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}.$$

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}$$

$$= (z_1+z_2)(\bar z_1+\bar z_2)$$

$$= z_1\bar z_1 + z_1\bar z_2 + z_2\bar z_1 + z_2\bar z \ldots$$

$$= |z_1|^2 + 2Re(z_1\bar z_2) \ldots$$

$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1\bar z_2| \ldots$$

$$= |z_1|^2 + 2|z_1| \ldots$$

$$= (|z_1| + |\ldots$$

نامساوی مثلثی را می‌توان با استقراء ریاضی به n عدد مختلط $z_1, z_2, \dots, z_n$ تعمیم داد.

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n| \le |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.$$

قضیه ۱۴. فرض کنید $z_1, z_2, \dots, z_n$ و $w_1, w_2, \dots, w_n$ اعداد مختلط دلخواه هستند.

الف) $||z_1|-|z_2|| \le |z_1-z_2| \le |z_1|+|z_2|$؛

ب) $||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2|$؛

ج) $(|x|+|y|)/\sqrt{2} \le |z| \le |x|+|y|$، که در آن $z=x+iy$؛

د) $\left(\sum_{k=1}^{n} |z_k w_k|\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|\right)^2$؛ (نامساوی شوارتز)

اثبات. الف) برای قسمت دوم نامساوی در (الف) داریم

$$|z_1-z_2| \le |z_1|+|-z_2| = |z_1|+|z_2|,$$

برای قسمت اول نامساوی، داریم

$$|z_1| = |z_1-z_2+z_2| \le |z_1-z_2|+|z_2|,$$

پس

$$|z_1|-|z_2| \le |z_1-z_2|, \qquad (۲)$$

با تغییر جای z_1, z_2 داریم

$$|z_2|-|z_1| \le |z_2-z_1| = |-(z_1-z_2)| = |z_1-z_2|,$$

یا

$$-(|z_1|-|z_2|) \le |z_1-z_2|, \qquad (۳)$$

پس از (۲) و (۳) داریم

$$||z_1|-|z_2|| \le |z_1-z_2|.$$

ب) در (الف)، z_2 را با $-z_2$ عوض می‌کنیم، حکم حاصل می‌شود.

ج) برای قسمت دوم نامساوی، داریم

$$|z| = |x+iy| \le |x|+|iy| = |x|+|i||y| = |x|+|y|$$

برای قسمت اول نامساوی، از ارتباط میانگین هندسی و میانگین حسابی استفاده می‌کنیم. می‌دانیم که همواره میانگین هندسی کوچکتر یا مساوی میانگین حسابی است، یعنی

$$\frac{|x|^2+|y|^2}{2} \geq \left(|x|^2|y|^2\right)^{1/2},$$

یعنی

$$2|x||y| \leq |x|^2+|y|^2.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}|x|^2+|y|^2+2|x||y| &\leq 2\left(|x|^2+|y|^2\right)\\ &= 2\left(x^2+y^2\right)\\ &= 2|z|^2\end{aligned}$$

یا

$$\left(|x|+|y|\right)^2 \leq 2|z|^2$$

در نتیجه

$$\left(|x|+|y|\right)/\sqrt{2} \leq |z|.$$

د) برای هر عدد حقیقی x داریم

$$\sum_{k=1}^{n}\left(|z_k|x+|w_k|\right)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)x^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k||w_k|\right)x+\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2 \geq 0$$

از طرفی در سه جمله‌ای ax^2+bx+c می‌دانیم که اگر برای هر $x\in\mathbb{R}$،

$$ax^2+bx+c \geq 0$$

آنگاه $b^2 \leq 4ac$. با فرض $a=\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2$ و $b=2\sum_{k=1}^{n}|z_k||w_k|$، $c=\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2$ نتیجه می‌شود که باید

$$4\left(\sum|z_k||w_k|\right)^2 \leq 4\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\right),$$

به عبارت دیگر

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k||w_k|\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\right).$$

مثال ۴ . تحت چه شرائطی برای ثابتهای مختلط α, β معادلهٔ درجه دوم

$$z^2+\alpha z+\beta=0$$

دارای

الف) ریشه‌های حقیقی است .

ب) یک ریشه روی دایرهٔ $|z|=1$ است .

حل الف) فرض کنید معادلهٔ درجه دوم دارای ریشهٔ حقیقی، مثلاً $z=x$ است. در نتیجه

$$x^2+\alpha x+\beta=0, \qquad , \qquad x^2+\bar{\alpha}x+\bar{\beta}=0.$$

از حذف x بین این دو معادله، داریم

$$(\beta-\bar{\beta})^2-\alpha(\beta-\bar{\beta})(\alpha-\bar{\alpha})+\beta(\alpha-\bar{\alpha})^2=0$$

و شرط مورد نظر عبارت است از

$$(Im(\beta))^2-(Im(\alpha))\left[Im(\alpha\bar{\beta})\right]=0.$$

برای قسمت (ب) ، فرض کنید z_1 ریشه‌ای از معادله است که روی دایرهٔ $|z|=1$ قرار دارد. پس $|z_1|=1$ ، بنابراین

$$z_1^2+\alpha z_1+\beta=0. \qquad (4)$$

چون $|z_1|=1$ نتیجه می‌دهد که $z_1\bar{z}_1=1$ ، طرفین (۴) را در $\bar{z}_1$ ضرب می‌کنیم، داریم

$$z_1+\alpha+\beta\bar{z}_1=0,$$

یعنی

$$\bar{z}_1+\bar{\alpha}+\bar{\beta}z_1=0.$$

از حذف $\bar{z}_1$ در این دو معادله ، داریم

$$(1-|\beta|^2)z_1=(\alpha-\bar{\alpha}\beta)$$

شرط $|z_1|=1$ نتیجه می‌دهد که باید

$$|\alpha-\bar{\alpha}\beta|=\left|1-|\beta|^2\right|.$$

مثال ۴. کران بالا برای $\left|\dfrac{z^2+3}{z^2-z-6}\right|$ وقتی که $|z|=1$، به دست آورید.

حل: با توجه قسمتهای (الف) و (ب) قضیه ... داریم

$$\left|\frac{z^2+3}{z^2-z-6}\right| = \frac{|z^2+3|}{|(z+2)(z-3)|}$$

$$\leq \frac{|z|^2+3}{\big||z|-2\big|\,\big||z|-3\big|}$$

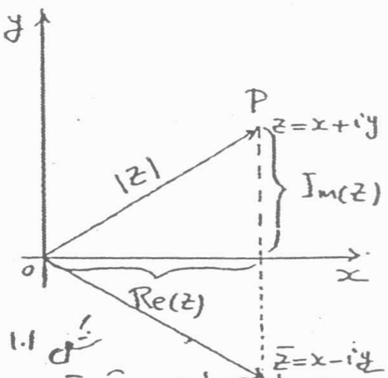
$$= \frac{1+3}{|(-1)|\,|(-2)|}$$

$$= 2.$$

۴.۱۱ صفحه مختلط

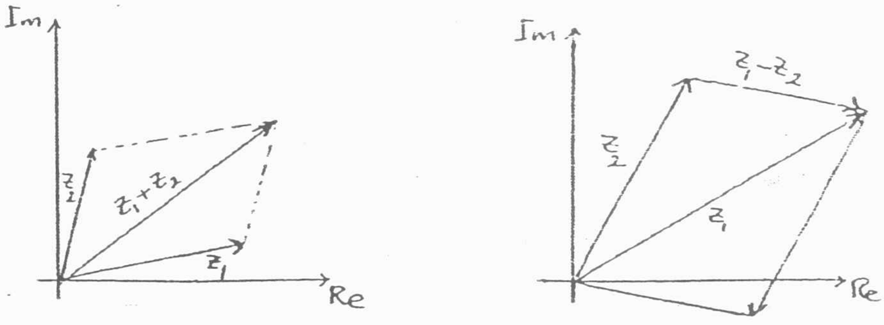
قبل از پرداختن به بیان نمایشهای دیگر اعداد مختلط، که در عمل بسیار مفید می باشند، لازم است که از نظر هندسی عدد مختلط $z \in \mathbb{C}$ را معتبر بشناسیم.

همان گونه که بیان شد، تناظری یک به یک بین نقاط صفحه دکارتی و اعداد مختلط در $\mathbb{C}$ می توان به دست آورد. پس می توانیم هر عدد مختلط $z=(x,y)$ را در صفحه با یک نقطه نمایش دهیم. عدد نامنفی $|z|$ که آن را قدر مطلق یا modulus عدد مختلط $z=(x,y)$ می نامیم، فاصله نقطه نمایش دهنده z در صفحه دکارتی با شروع از ابتدای مختصات است (شکل ۱.۱)



شکل ۱.۱

با توجه به تناظر فوق، محور افقی را محور حقیقی یا Re و محور قائم را محور موهومی یا Im نامیم و بردار نمایش دهنده هر عدد مختلط z در صفحه را با برداری از نقطه شروع مبداء در نظر می گیریم. با این توضیحات، می توان جمع و تفاضل دو عدد مختلط z_1 و z_2 را به طور هندسی نمایش داد (شکل (۲.۱)).



(الف) (ب)

شکل ۲.۱

برای هر عدد مختلط $z=x+iy$، مزدوج مختلط $\bar{z}=x-iy$ قرینهٔ z نسبت به محور حقیقی است. $Re(z)$ و $Im(z)$ به ترتیب طول و عرض نقطهٔ z است، و $|z|$ نشان دهندهٔ فاصلهٔ اقلیدسی نقطهٔ z از مبدأ است (شکل (۱.۱)). برای هر $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$ در $\mathbb{C}$،

$$|z_1-z_2|=\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right]^{1/2},$$

فاصلهٔ بین نقاط z_1 و z_2 در صفحه است.

می‌دانیم که در صفحه، یک خط مستقیم توسط یک معادلهٔ خطی برحسب مختصات نقاطش مشخص می‌شود. بنابراین در $\mathbb{R}^2$ مجموعهٔ

$$L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ ax+by+c=0\},$$

برای ثابتهای حقیقی a، b و c یک خط راست است که یک معادلهٔ خطی می‌باشد. در صفحهٔ مختلط، برای هر عدد مختلط $z=x+iy$، از نمایش x و y برحسب $Re(z)$ و $Im(z)$ استفاده می‌کنیم. بنابراین برای $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ و اعداد ثابت حقیقی a و b و c، با قرار دادن x و y برحسب z در معادلهٔ $ax+by+c=0$ داریم

$$a(z+\bar{z})/2-ib(z-\bar{z})/2+c=0,$$

یا

$$(a-ib)z+(a+ib)\bar{z}+2c=0,$$

که با فرض $d=a-ib$ داریم

$$dz+\bar{d}\bar{z}+n=0, \qquad (۵)$$

که در آن d عددی مختلط و $n=2c$ عددی حقیقی است. برعکس، هر عبارت خطی از این نوع خطی راست را نمایش می‌دهد، که در قضیه بعد آن را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۵. مختصات x و y عدد مختلط $z=(x,y)$ در معادله $ax+by+c=0$ به ازای ثابت‌های حقیقی a، b و c صدق می‌کند اگر و تنها اگر عدد $d\in\mathbb{C}$ و $n\in\mathbb{R}$ وجود داشته باشند به طوری که $dz+\bar{d}\bar{z}+n=0$ باشد.

اثبات. اگر $a,b,c\in\mathbb{R}$ چنان باشند که $ax+by+c=0$ ، آنگاه اعداد d و n را قبل از بیان قضیه شرح دادیم و رابطه $dz+\bar{d}\bar{z}+n=0$ برقرار بود.

حال فرض کنید $d=d_1+id_2$ و n عددی حقیقی باشد به طوری که

$$dz+\bar{d}\bar{z}+n=0$$

آنگاه:

$$(d_1+id_2)(x+iy)+(d_1-id_2)(x-iy)+n=0$$

پس

$$d_1x-d_2y+i(d_1y+d_2x)+(d_1x-d_2y)-i(d_1y+d_2x)+n=0$$

در نتیجه

$$d_1x-d_2y+d_1x-d_2y+n=0$$

یعنی

$$2d_1x-2d_2y+n=0$$

قرار می‌دهیم $a=2d_1$ ، $b=-2d_2$ و $c=n$ و داریم

$$ax+by+c=0$$

∎

با توجه به قضیه (۱۵)، تعریف زیر را داریم.

تعریف ۱۶ . یک خط مستقیم در میدان اعداد مختلط، مجموعهٔ

$$L=\{z\in\mathbb{C} : az+\bar{a}\bar{z}+c=0\},$$

است که در آن a ثابت مختلط و c عددی حقیقی است.

بطور مشابه، یک دایره در $\mathbb{R}^2$ مجموعهٔ تمام نقاط $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ است بطوری که

$$a(x^2+y^2)+2bx+2cy+d=0, \qquad (6)$$

که در آن a، b، c و d ثابتهای حقیقی برقرار در شرط $b^2+c^2>ad$ است. اگر $a>0$ آنگاه شعاع دایره برابر $\frac{(b^2+c^2-ad)^{\frac{1}{2}}}{a}$ و مرکز آن $(-\frac{b}{a}, -\frac{c}{a})$ است. برای $a=0$، معادله (۶) یک خط راست است. بدون لطمه از کلیت بحث می‌توان a را عددی نامنفی در نظر گرفت (چرا؟).

با توجه به روابط

$$z\bar{z}=|z|^2=x^2+y^2,$$

$$x=(z+\bar{z})/2,$$

$$y=(z-\bar{z})/2i,$$

دایرهٔ C در $\mathbb{C}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱۷ . یک دایره در میدان اعداد مختلط C، مجموعهٔ

$$C=\{z\in\mathbb{C} : az\bar{z}+b(z+\bar{z})-ic(z-\bar{z})+d=0\}, \qquad (7)$$

است که در آن a، b، c و d اعداد حقیقی بوده و $b^2+c^2>ad$ می‌باشد.

در حالت خاص، وقتی $b=c=0$، دایره با مرکزی در مبداء و شعاع $\sqrt{-d}/a$ است که توسط $\{z\in\mathbb{C} : |z|=r\}$ برای $r=\sqrt{-d/a}$ نمایش داده می‌شود. اگر $a=0$، آنگاه، دایره C به یک خط راست تبدیل می‌شود. در واقع خط راست، اغلب به عنوان حالت

خاصی از یک دایره با شعاع بینهایت درنظر گرفته می‌شود.

۱۱.۵ فرم قطبی و فرم نمایی

فرض کنید r و θ مختصات قطبی نقطه (x, y) در صفحه $\mathbb{R}^2$ است، که در آن

$$r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}},$$

و θ عددی حقیقی بین ۰ و 2π است، به طوری که

$$\tan\theta = y/x.$$

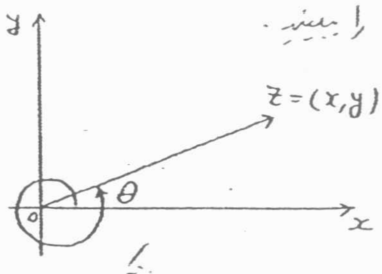
بنابراین عدد مختلط $z = x + iy$ را می‌توان به صورت قطبی (r, θ) نمایش داد، که در آن $r=|z|=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ و $\tan\theta = Im(z)/Re(z)$. پس برای $z \neq 0$، فرض کنید

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

در این صورت z را می‌توان به صورت

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

بیان کرد. دقت کنید که $\theta=\tan^{-1}(y/x)$ تابعی با چند مقدار است که برحسب رادیان اندازه‌گیری می‌شود. شکل ( ) را ببینید.



شکل

نقطه $z=1-i\sqrt{3}$ را درنظر بگیرید. این نقطه دارای فرم قطبی

$$1-i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right],$$

است. دیده می‌شود که هر مقدار

$$\theta = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \qquad n\in\mathbb{Z}$$

را نیز می‌توان برای نمایش $1-i\sqrt{3}$ بکار برد. برای مثال، به ازای $n=1$ داریم

$$1-i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

عدد θ را آوند (آرگومان) z نامید، و با $\arg z$ نمایش می‌دهیم، که برحسب رادیان اندازه‌گیری می‌شود و در جهت مثبت محور حقیقی مشخص می‌گردد. واضح است که آوند تابعی با تعداد نامتناهی مقدار است و تمام این مقادیر باهم دارای اختلافی که مضرب 2π است، می‌باشند. مقدار خاصی از $\arg z$ که در شرط

$$-\frac{\pi}{2} < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$$

صدق کند را مقدار اصلی $\arg z$ نامیده و با $\operatorname{Arg} z$ نمایش می‌دهیم.

گاهی اوقات $\tan\theta = y/x$ را با $\tan(\arg z) = y/x$ نشان می‌دهیم. تابع تانژانت معکوس، یک تابع چندمقداری است. در هر حال، یک و فقط یک مقدار از $\tan^{-1}(y/x)$ شامل α در نامساوی زیر صدق می‌کند

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2},$$

که در این وضعیت α را مقدار اصلی $\tan^{-1}(y/x)$ می‌گیریم. پس

$$\operatorname{Arg} z=\begin{cases}\tan^{-1}\frac{y}{x}, & x>0,\\ \tan^{-1}\frac{y}{x}+\pi, & x<0,\ y\geq 0,\\ \tan^{-1}\frac{y}{x}-\pi, & x<0,\ y<0.\end{cases} \qquad (۸)$$

و اگر $\frac{y}{x}$ بی‌نهایت شود، داریم

$$\operatorname{Arg} z=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0,\\ -\frac{\pi}{2}, & x=0,\ y<0.\end{cases}$$

مثال ۵. آوندهای اصلی چهار عدد مختلط $1+i$، $1-i$، $-1+i$ و $-1-i$ را تعیین کنید.

حل. واضح است که برای دو نقطهٔ $1+i$ و $-1-i$ داریم $\tan\theta = \frac{y}{x} = 1$ و برای دو نقطهٔ $1-i$ و $-1+i$ داریم $\tan\theta = -1$. با توجه به عبارت (۸) می‌توان آوندهای اصلی این نقاط

را به صورت زیر داشت

$z = 1+i, \qquad \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{4},$

$z = 1-i, \qquad \operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4},$

$z = -1+i, \qquad \operatorname{Arg} z = \frac{3\pi}{4},$

$z = -1-i, \qquad \operatorname{Arg} z = -\frac{3\pi}{4}.$

مثال ۹. آوند اصلی و هنگ $z = 1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta$ را برای $-\pi < \theta \leq \pi$ به دست آورید.

حل. داریم

$$z = 1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta$$
$$= 2\cos\theta\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

با توجه به اینکه هنگ z یعنی $|z|$ نامنفی است ولی مقدار $2\cos\theta$ برحسب θ می‌تواند منفی باشد وضعیت‌های زیر را داریم

$\lvert z\rvert$	$\operatorname{Arg} z$
$-2\cos\theta$	$-\pi < \theta < -\frac{\pi}{2}$
$2\cos\theta$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
$-2\cos\theta$	$\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$

به ازای $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ مقدار $z=0$ است و $\operatorname{Arg} z$ نامعین بوده و تعریف نمی‌شود.

نکته ۱۸. فرض کنید $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ یک عدد مختلط در فرم قطبی است. در این صورت

الف) $\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$

ب) $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2n\pi \;, \quad n\in\mathbb{Z}$

ج) اگر z عدد حقیقی منفی باشد، آنگاه $\operatorname{Arg} z = \pi$

د) آوند عدد مختلط صفر تعریف نشده است.

قضیه ۱۹. برای اعداد مختلط z_1 ، z_2 داریم

الف) $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

ب) $\arg z^{-1} = -\arg z \,,\quad z\neq 0$

ج) $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \,,\ z_2\neq 0$

د) برای آرگومان‌های اصلی روابط (الف) و (ج) لزوماً برقرار نیست.

اثبات. الف) فرض کنید $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.
در این صورت

$$\arg z_1 = \theta_1 + 2n_1\pi, \quad \arg z_2 = \theta_2 + 2n_2\pi \qquad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

و

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)), \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \arg z_1 z_2 &= \theta_1 + \theta_2 + 2n\pi \\ &= \theta_1 + 2n_1\pi + \theta_2 + 2(n-n_1)\pi, \qquad n, n_1 \in \mathbb{Z} \\ &= \arg z_1 + \arg z_2; \end{aligned}$$

قرار داده‌ایم $n_2 = n - n_1$.

ب) فرض کنید $z\neq 0$ دارای فرم قطبی $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ است. اگر معکوس ضربی $z = (x, y)$ را در نظر بگیریم، داریم

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

پس با $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ ، $\arg z = \theta + 2n\pi$ برای $n\in\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \left(\frac{r\cos\theta}{r^2}, \frac{-r\sin\theta}{r^2}\right) \\ &= \frac{1}{r}(\cos\theta, -\sin\theta) = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\arg(z^{-1}) &= -\theta + 2n_1\pi \qquad n_1\in\mathbb{Z}\\ &= -\theta + 2(-n)\pi \qquad n\in\mathbb{Z}\\ &= -(\theta + 2n\pi) \qquad n\in\mathbb{Z}\\ &= -\arg(z),\end{aligned}$$

که در آن $n=-n_1$ عددی صحیح است.

ج) برای $z_1=r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ، $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ ، از (ب)، داریم.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1}\\ &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2)\frac{1}{r_2}[\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2)]\\ &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].\end{aligned}$$

بنابراین، اگر $z_2\neq 0$ باشد، داریم

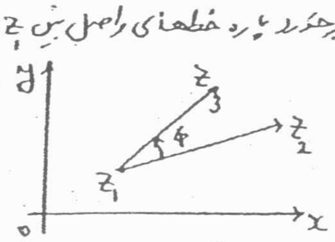
$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

د) فرض کنید $z_1=i$ ، $z_2=-1$. در نتیجه $\operatorname{Arg} z_1=\pi/2$ ، $\operatorname{Arg} z_2=\pi$. اما $z_1z_2=-i$ ، $\operatorname{Arg} z_1z_2=-\pi/2$ ، $z_2/z_1=-i$ ، $\operatorname{Arg}(z_2/z_1)=-\frac{\pi}{2}$ در صورتی که $\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2=\frac{3\pi}{2}$ ، $\operatorname{Arg} z_2-\operatorname{Arg} z_1=\frac{\pi}{2}$.

مثال ۷. $\arg(z-z_1)=\alpha$ نشان دهندهٔ خط گذرنده از نقطهٔ z_1 با ضریب زاویهٔ $\tan\alpha$ است. برعکس

$$\varphi = \arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$$

نشان دهندهٔ زاویهٔ رأس z_1 از برخورد پاره خطهای واصل بین z_1 ، z_3 و z_1 ، z_2 است (شکل).



شکل

مثال ۸. فرض کنید $z_1 z_2 \neq 0$. نشان دهید

الف) $\arg z_1 - \arg z_2 = 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow Re(z_1\bar{z}_2) = |z_1||z_2|$؛

ب) $\arg z_1 - \arg z_2 = (2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$.

و نتایج را بطور هندسی تعبیر کنید.

حل. چون $z_1 z_2 \neq 0$، پس $z_1 \neq 0$ و $z_2 \neq 0$، در نتیجه می‌توان آنها را به فرم قطبی نمایش داد. فرض کنید $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. بنابراین

$$z_1\bar{z}_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

پس برای قسمت (الف) داریم

$$\begin{aligned} Re(z_1\bar{z}_2) = |z_1||z_2| &\Leftrightarrow r_1 r_2\cos(\theta_1-\theta_2) = r_1 r_2 \\ &\Leftrightarrow \cos(\theta_1-\theta_2) = 1 \\ &\Leftrightarrow \theta_1-\theta_2 = 2n\pi \\ &\Leftrightarrow \arg z_1 - \arg z_2 = 2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

نتیجه فوق بیان می‌کند که تحت شرایط داده شده، دو عدد مختلط z_1 و z_2 هم راستا بوده و از خط گذرنده از آن دو از مبداء می‌گذرد و برعکس.

(ب) توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} |z_1-z_2| = |z_1|+|z_2| &\Leftrightarrow |z_1-z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2 \\ &\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| \\ &\Leftrightarrow -2Re(z_1\bar{z}_2) = 2|z_1||z_2| \\ &\Leftrightarrow \cos(\theta_1-\theta_2) = -1 \\ &\Leftrightarrow \theta_1-\theta_2 = (2n+1)\pi,\quad n\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

بطور هندسی، نتیجه می‌شود که هر دو عدد مختلط در یک راستای گذرنده از مبداء و در جهت مخالف هم قرار دارند.

باید دقت کرد که عبارات در (الف) و (ب) مثال ... را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد.

الف) $|z_1 \bar{z}_2| = |z_1||z_2|$ ... $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1||z_2| \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}$ یک عدد حقیقی مثبت باشد.

ب) $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}$ یک عدد حقیقی منفی باشد.

تعریف ۲۰. فرم نمایی. نماد $e^{i\theta}$ یا $\exp(i\theta)$ را نمایی $i\theta$ نامیم و توسط

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

تعریف می‌شود. رابطه فوق را فرمول اویلر نامیم.

اگر $z \neq 0$ باشد، آنگاه

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

که فرم نمایی یک عدد مختلط است. با عملیات ریاضی می‌توان دید که اگر

$$e^{i\theta_1} = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1, \qquad e^{i\theta_2} = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$$

باشند، در این صورت

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \qquad (9)$$

تبصره ۲۱. (۱) اگر در رابطه (۹) قرار دهیم $\theta_1 = \theta$، $\theta_2 = -\theta$، در این صورت

$$e^{i\theta} e^{i(-\theta)} = e^{i(\theta-\theta)} = e^{i0} = 1$$

پس

$$e^{i(-\theta)} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

بنابراین $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.

(۲) اگر $\theta_1 = \theta_2 = \theta$، آنگاه $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$. با استقراء ریاضی می‌توان عبارت فوق را توسیع داد. یعنی

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \qquad n = 0, 1, 2, \dots \qquad (10)$$

(۳) چون $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ پس $\bar{z} = re^{-i\theta}$ است.

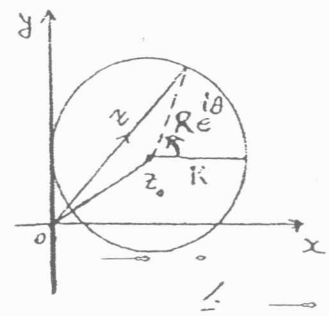
(۴) معکوس ضربی $z = re^{i\theta}$ در فرم نمایی توسط $z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ داده می‌شود.

عدد مختلط $z_1=r_1e^{i\theta_1}$, $z_2=r_2e^{i\theta_2}$ مساویند اگر و تنها اگر $r_1=r_2$ و $\theta_1=\theta_2+2n\pi$ برای $n\in\mathbb{Z}$ باشد.

معادلهٔ $|z|=R$ که در آن $0\le\theta\le 2\pi$, $z=Re^{i\theta}$ نمایش دهندهٔ دایره‌ای پیموده شده در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت (جهت مثبت) به شعاع R و مرکز مبدأ است. بنابراین

$$|z-z_0|=R, \qquad z=z_0+Re^{i\theta}, \qquad 0\le\theta\le 2\pi$$ (۱۱)

دایره‌ای به شعاع R و مرکز z_0 پیموده شده در جهت مثبت است. فرم فوق را شکل پارامتری دایره نامیم و در شکل (   ) نمایش داده شده است.



شکل —— .

دایرهٔ $|z-z_0|=R$ را می‌توان به فرم

$$|z|^2-z_0\bar{z}-\bar{z}_0z+|z_0|^2-R^2=0,$$ (۱۲)

نیز نوشت. بنابراین ضریب منفی $\bar{z}$ مرکز را مشخص می‌کند و مربع شعاع از تفاضل جملات ثابت در (   ) از مربع قدر مطلق مرکز به دست می‌آید:

$$R=\left(|z_0|^2-R^2-|z_0|^2\right)^{1/2},$$

حال می‌خواهیم معادلهٔ

$$az\bar{z}+b\bar{z}+\bar{b}z+c=0, \qquad a\geq 0,\ c\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{C}$$ (۱۳)

را مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم. اگر $a\neq 0$ باشد، معادلهٔ (۱۳) نمایش دهندهٔ دایرهٔ

$$|z|^2+\frac{b}{a}\bar{z}+\frac{\bar{b}}{a}z+\frac{c}{a}=0$$ (۱۴)

است. با مقایسهٔ (۱۴) و (۱۲) دیده می‌شود که در این حالت مرکز دایره عدد مختلط $-\frac{b}{a}$ و شعاع آن $\frac{\sqrt{|b|^2-ac}}{a}$ است.

برای $a=0$، معادله (۱۳) به صورت

$$b\bar{z}+\bar{b}z+c=0,$$

است که معادلهٔ خط $\alpha x+\beta y+c=0$ می‌باشد، که در آن $\alpha=b+\bar{b}$ و $\beta=-(b-\bar{b})i$. در این حالت β یک عدد حقیقی است.

مثال ۹. معادلهٔ پارامتری خط گذرنده از نقطهٔ a در صفحه مختلط را به دست آورید.

حل. معادلهٔ پارامتری خط مورد نظر به صورت

$$z=a+bt,$$

است، که در آن $b\neq 0$ یک عدد مختلط و $t\in\mathbb{R}$ است. می‌توان خط فوق را به صورت

$$\operatorname{Im}\left[\frac{z-a}{b}\right]=0,$$

نیز نمایش داد.

دقت کنید که دو معادلهٔ $z=a+bt$ و $z=a'+b't$ نمایش دهندهٔ یک خط می‌باشند اگر و تنها اگر $a'-a$ و b' مضارب حقیقی b باشند. اگر b' مضرب حقیقی b باشد دو خط موازی اند و هم جهت می‌باشند هرگاه b' مضرب مثبتی از b باشد. جهت یک خط را می‌توان توسط $\arg b$ مشخص نمود. زاویهٔ بین این دو خط در حالت کلی توسط $\arg(b'/b)$ معین می‌شود و توجه کنید که به ترتیب معرفی خطوط وابسته است. دو خط متعامدند، هرگاه b'/b یک عدد موهومی محض باشد.

توجه می‌کنیم که خط جهت‌دار مشخص $a+bt$ یک نیم صفحه راست را که شامل تمام نقاط z (که روی خط قرار ندارند) که در نابرابری صدق می‌کنند را مشخص می‌نماید

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)<0. \qquad (۱۵)$$

مجموعهٔ تمام نقاط z که در (۱۵) صدق می‌کنند، همواره در طرف راست شخصی که در امتداد خط

در جهت b حرکت می‌کند قرار دارند. بنابراین نیم‌صفحه طرف چپ خط مجموعه تمام نقاطی است که در شرط

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)>0 \qquad (۱۶)$$

صدق می‌کند.

در فصل دوم، تحت تبدیلات خطی و تبدیلات دوخطی را بطور کاملتری مطرح خواهیم کرد و مثال (۹) را مجدداً مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۶.۱۱ توانها و ریشه‌ها

در بخش (۵.۱۱) دیدیم که چگونه یک عدد مختلط در فرم قطبی یا نمائی نوشته می‌شود. با توجه به این نمایش‌ها در این بخش می‌خواهیم توانها و ریشه‌های اعداد مختلط را بدست آوریم. در کل بخش حاضر، اعداد مختلط مورد بحث را ناصفر در نظر گرفته‌ایم.

تعریف ۲۱. برای هر عدد مختلط ناصفر z، تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} &z^0=1, \\ &z^{n+1}=z^n.z, && n\geq 0, \\ &z^{-n}=(z^{-1})^n, && n>0,\ z\neq 0, \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

قضیه ۲۲. برای هر عدد مختلط $z=re^{i\theta}$ و $n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$ داریم

$$z^n=r^n e^{in\theta}. \qquad (۱۸)$$

اثبات. برای $n=0$ حکم بوضوح برقرار است زیرا $z^0=1$. برای $n=1,2,3,\dots$ حکم از استقرای ریاضی حاصل می‌شود. اگر $n=1$ باشد، آنگاه $z=r^1e^{i1\theta}=re^{i\theta}$، که نمایش عدد

مختلط z است. فرض کنید برای n داریم $z^n = r^n e^{in\theta}$. به ازای $n+1$ نتیجه می‌شود که

$$z^{n+1} = z^n . z$$
$$= r^n e^{in\theta} r e^{i\theta}$$
$$= r^n e^{i(n+1)\theta},$$

حال برای $n = -1, -2, \ldots$ ، فرض کنید $n = -m$ که در آن $m = 1, 2, 3, \ldots$. از تعریف (۲۱) دیده می‌شود که

$$z^n = z^{-m} = \left(\frac{1}{z}\right)^m = \left(\frac{1}{r} e^{-i\theta}\right)^m = \left(\frac{1}{r}\right)^m e^{-im\theta} = r^{-m} e^{i(-m)\theta} = r^n e^{in\theta}.$$

■

رابطه (   ) را به ازای $r=1$ مورد بررسی قرار می‌دهیم، یعنی

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \qquad n\in\mathbb{Z},$$

طبق فرمول اویلر

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta), \qquad n\in\mathbb{Z} \qquad (۱۹)$$

رابطه (۱۹) به فرمول دموآور برای توان صحیح معروف است.

تبصره ۲۳. در زیر برخی از نتایج فرمول دموآور، (۱۹)، را خواهیم دید.

۱) اگر n عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه طرف چپ (۱۹) را با توجه به بسط دوجمله‌ای نیوتن به دست می‌آوریم، داریم

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos^{n-k}\theta)(i\sin\theta)^k. \qquad (۲۰)$$

با مقایسه قسمت‌های موهومی و حقیقی در دو طرف (۲۰)، نتیجه می‌شود که

$$\cos n\theta = \sum_{\substack{k=0 \\ k\ \text{زوج}}}^{n} (-1)^{k/2} \binom{n}{k} (\cos^{n-k}\theta)(\sin^k\theta), \qquad (۲۱)$$

و

$$\sin n\theta = \sum_{\substack{k=0 \\ k\ \text{فرد}}}^{n} (-1)^{(k-1)/2} \binom{n}{k} (\cos^{n-k}\theta)(\sin^k\theta). \qquad (۲۲)$$

۲) با فرض $z=e^{i\theta}$ ، از فرمول دموآور داریم

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,$$
$$z^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta,$$

بنابراین

$$z^n + z^{-n} = 2\cos n\theta,$$
$$z^n - z^{-n} = 2i\sin n\theta.$$

از این عبارات برای به دست آوردن $\cos^n\theta$ برحسب بسط $(z+z^{-1})^n$ توسط بسط دوجمله‌ای نیوتن می‌توان استفاده کرد. به عنوان مثال

$$(z+z^{-1})^5 = (z^5+z^{-5}) + 5(z^3+z^{-3}) + 10(z+z^{-1}),$$

بنابراین

$$(2\cos\theta)^5 = 2\cos5\theta + 10\cos3\theta + 20\cos\theta,$$

یا

$$\cos^5\theta = 2^{-4}[\cos5\theta + 5\cos3\theta + 10\cos\theta].$$

به طور مشابه، بسط $(z-z^{-1})^n$ ، توانهای $\sin\theta$ یعنی $\sin^n\theta$ را نتیجه می‌دهند.

دقت می‌کنیم که در انتگرال توابع برحسب توانهای بالای $\cos\theta$ و $\sin\theta$ می‌توان از عبارت بالا و مشابه آنها استفاده کرد.

۳) فرمول دموآور در یافتن مجموع سری‌های سینوسی و کسینوسی بسیار مفید است. مطلوب است مجموع سری‌های زیر

$$a_0\sin\alpha + a_1\sin(\alpha+\beta) + a_2\sin(\alpha+2\beta)+\cdots \qquad (۲۳)$$

و

$$a_0\cos\alpha + a_1\cos(\alpha+\beta) + a_2\cos(\alpha+2\beta)+\cdots \qquad (۲۴)$$

برای یافتن مجموع سری‌های (۲۳) و (۲۴)، جمع مورد نظر را به ترتیب با S برای (۲۳) و C

برای (۲۴) ترتیب می‌دهیم و $C+iS$ را محاسبه می‌کنیم. بعد از تعیین $C+iS$، قسمتهای حقیقی و موهومی حاصل مجموعهای مورد نظر را به دست می‌دهند.

به عنوان مثال، مطلوب است مجموع سری زیر

$$1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cdots+\cos n\alpha,$$

و مجموع سری سینوسی متناظر با آن. برای یافتن این مجموعها، آنها را به ترتیب C و S می‌نامیم.

$$C = 1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha,$$

$$S = \sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin n\alpha.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} C+iS &= 1+e^{i\alpha}+e^{i2\alpha}+\cdots+e^{in\alpha} \\ &= \frac{1-e^{i(n+1)\alpha}}{1-e^{i\alpha}} \\ &= \frac{e^{i(n+1)\alpha/2}\left[e^{-i(n+1)\alpha/2}-e^{i(n+1)\alpha/2}\right]}{e^{i\alpha/2}\left(e^{-i\alpha/2}-e^{i\alpha/2}\right)} \\ &= e^{in\alpha/2}\,\frac{\sin[(n+1)\alpha/2]}{\sin(\alpha/2)} \end{aligned}$$

از مقایسهٔ قسمتهای حقیقی و موهومی داریم

$$C = \frac{\cos(n\alpha/2)\sin[(n+1)\alpha/2]}{\sin(\alpha/2)}, \qquad 0<\alpha<2\pi,$$

$$S = \frac{\sin(n\alpha/2)\sin[(n+1)\alpha/2]}{\sin(\alpha/2)}, \qquad 0<\alpha<2\pi.$$

بعد از ساده کردن طرف راست دو عبارت بالا، داریم

$$C=\frac{1}{2}+\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \tag{۲۵}$$

و

$$S=\frac{1}{2}\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

دقت کنید که به ازای $\alpha=0$ یا $\alpha=2\pi$، داریم

$$C=n+1, \qquad S=0$$

∎

قضیه ۲۴. به ازای $z_0\neq 0$ داده شده، تعداد n مقدار برای z وجود دارد که در معادله $z^n=z_0$، صدق می‌کنند.

اثبات. معادله $z^n=z_0$ را می‌توان به صورت $z=(z_0)^{1/n}$ نوشت. فرض کنید $z_0=r_0e^{i\theta_0}$ برای $-\pi<\theta_0\leq\pi$ بوده و $z=re^{i\theta}$ است. پس باید داشته باشیم

$$(re^{i\theta})^n=r_0e^{i\theta_0}$$

در نتیجه

$$r^ne^{in\theta}=r_0e^{i\theta_0}$$

حال با توجه به تساوی دو عدد مختلط در فرم نمایی، داریم

$$r^n=r_0 \quad , \quad n\theta=\theta_0+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

در نتیجه

$$r=\sqrt[n]{r_0}, \qquad \theta=\frac{\theta_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}, \qquad (۲۶)$$

که در آن $\sqrt[n]{r_0}$ نشان دهنده ریشه n ام مثبت r_0 است. با توجه به (۲۶) دیده می‌شود که به ازای $k=0,1,2,\dots,n-1$، مقادیر θ متمایزند، پس تعداد n عدد مختلط z برقرار در معادله $z^n=z_0$ وجود دارد.

∎

ریشه‌های n ام به دست آمده در قضیه (۲۴) برای معادله $z^n=z_0$، که در آن $z_0=r_0e^{i\theta_0}$ است، را در نظر می‌گیریم

$$z=\sqrt[n]{r_0}\ \exp\left[i\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right], \quad k=0,1,\dots,n-1 \qquad (۲۷)$$

هر یک از این اعداد مختلط را ریشه n ام z_0 نامیم. به ازای $k=0,1,2,\dots,n-1$ در (۲۷) تعداد n ریشه متمایز حاصل می‌شود. مشخصاً به ازای $k=0$ داریم

$$c = \sqrt[n]{r_0}\; e^{i\theta_0/n}, \qquad (۲۸)$$

c را ریشه اصلی نامیم. پس با توجه به ضرب اعداد مختلط در فرم قطبی و با قرار دادن

$$\omega = e^{i2\pi/n}$$

ریشه‌های معادله $z^n = z_0$ عبارتند از

$$c,\ c\omega,\ c\omega^2,\ \dots,\ c\omega^{n-1} \qquad (۲۹)$$

و این ریشه‌ها متمایزند.

تعبیر هندسی، با توجه به اینکه

$$|e^{i\alpha}| = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^{1/2} = 1$$

نتیجه می‌شود که طول شعاع حامل هر یک از این n ریشه برابر $\sqrt[n]{r_0}$ است. پس ریشه‌ها رئوس یک n ضلعی منتظم است که روی دایره‌ای به شعاع $\sqrt[n]{r_0}$ و مرکز مبداء قرار دارند و این دایره، دایره محیطی n ضلعی منتظم مورد نظر است.

قضیه ۲۵. مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های متمایز معادله $z^n = z_0$ به ترتیب صفر و $(-1)^{n-1} z_0$ است.

اثبات. همان گونه که در (۲۹) دیده شد، ریشه‌های متمایز معادله $z^n = z_0$ عبارتند از

$$c,\ c\omega,\ c\omega^2,\ \dots,\ c\omega^{n-1}$$

که در آن $\omega = e^{i2\pi/n}$. بنابراین

$$c + c\omega + c\omega^2 + \dots + c\omega^{n-1} = c(1+\omega+\omega^2+\dots+\omega^{n-1})$$

$$= \begin{cases} \dfrac{c(1-\omega^n)}{1-\omega}, & \omega \neq 1, \\ 0, & \omega^n = 1, \end{cases}$$

و

$$c \cdot c\omega \cdot c\omega^2 \cdot \dots \cdot c\omega^{n-1} = c^n(\omega \cdot \omega^2 \cdot \dots \cdot \omega^{n-1})$$

$$= c^n \omega^{1+2+\cdots+(n-1)}$$
$$= \left(\sqrt[n]{r_0}\, e^{i\theta_0/n}\right)^n \omega^{n(n-1)/2}$$
$$= r_0 e^{i\theta_0} \omega^{n(n-1)/2}$$
$$= (-1)^{n-1} z_0 \qquad n\in\mathbb{N}$$

ریشه های واحد ۲۶. ریشه های معادله $z^n=1$ را ریشه های n ام واحد نامیم. با توجه به رابطه (۲۸) و $1 = 1e^{i0}$ داریم

$$c = \sqrt[n]{1}\; e^{i0/n} = 1$$

پس تعداد n ریشه عدد مختلط واحد عبارت است از

$$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1} \qquad (۳۰)$$

که در آن $\omega = e^{i2\pi/n}$. از رابطه جمع ریشه های n ام داریم

$$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=0 \qquad (۳۱)$$

زیرا $\omega \neq 1$، بنابراین

$$1+e^{i2\pi/n}+e^{i4\pi/n}+\cdots+e^{i2(n-1)\pi/n}=0$$

$$1+\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\left(\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=0$$

در نتیجه

$$1+\sum_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=0$$

یعنی

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=-1, \qquad \sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=0 \qquad (۳۲)$$

مثال ۱۰. تمام ریشه های $(-8-8\sqrt{3}\,i)^{1/4}$ را بدست آورده و آنها را بطور هندسی تعبیر کنید.

حل. عدد مختلط $-8-8\sqrt{3}\,i$ را بفرم نمائی می نویسیم، داریم

$$z_0 = 16 e^{-i2\pi/3}$$

در نتیجه $r_0 = 16$ ، $\theta_0 = -2\pi/3$ و $n=4$. از رابطه (۲۷) داریم

$$z = 2\exp\left[i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right)\right], \quad k=0,1,2,3$$

برای $k=0,1,2,3$ ، چهار ریشه مورد نظر عبارتند از

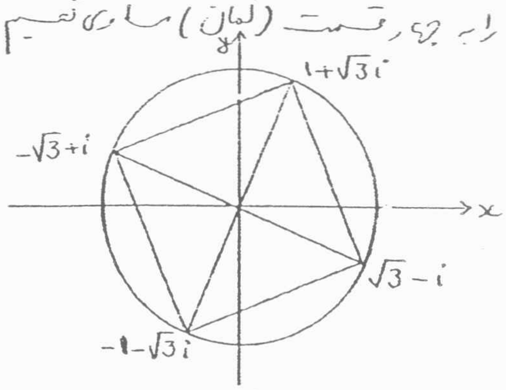
$$2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{3}-i,$$

$$2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+i\sqrt{3},$$

$$2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}+i,$$

$$2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=-1-i\sqrt{3}.$$

این ریشه‌ها رئوس مربع محاط شده در دایره‌ای به شعاع 2 و مرکز مبدا است، همچنین این چهار ریشه دایره را به چهار قسمت (کمان) مساوی تقسیم می‌کنند. شکل ( ).



شکل

□

مثال ۱۱. درستی رابطه زیر را ثابت کنید

$$\frac{n}{2^{n-1}} = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad n\geq 2.$$

حل. فرض کنید 1 ، ρ_1 ، ρ_2 ، ... ، ρ_{n-1} ریشه‌های nام واحد باشند، که در آن

$$\rho_k = e^{i2\pi k/n}, \quad k=1,2,\dots,n-1$$

بنابراین

$$z^n-1=(z-1)(z-\rho_1)(z-\rho_2)\cdots(z-\rho_{n-1})$$

طرفین عبارت فوق را بر $z-1$ تقسیم کرده و برای $z \to 1$ حد می‌گیریم، داریم

$$n=(1-\rho_1)(1-\rho_2)\cdots(1-\rho_{n-1}),$$

بنابراین

$$n=(1-\bar{\rho}_1)(1-\bar{\rho}_2)\cdots(1-\bar{\rho}_{n-1}).$$

پس

$$\begin{aligned} n^2 &= \prod_{k=1}^{n-1}(1-\rho_k)(1-\bar{\rho}_k) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1}(1-e^{2\pi ik/n})(1-e^{-2\pi ik/n}) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1}\left[2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)\right] \\ &= \prod_{k=1}^{n-1}\left[4\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right], \end{aligned}$$

یا

$$n^2 = 2^{2(n-1)}\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right), \qquad n>1$$

اکنون با در نظر گرفتن جذر مثبت دو طرف عبارت به دست آمده، داریم

$$n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \qquad n>1$$

و حل تمام است.

□

تمرین ۲۷. ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $az^2+bz+c=0$، $a\neq 0$ توسط رابطهٔ

$$z=\frac{-b+(b^2-4ac)^{1/2}}{2a}$$

به دست می‌آیند. توجه کنید که در حالت حقیقی از $\pm$ برای $(b^2-4ac)^{1/2}$ در اینجا استفاده نکرده‌ایم، زیرا در حالت مختلط $(b^2-4ac)^{1/2}$ همواره دارای دو ریشهٔ متمایز است، و به این دلیل نیز از علامت $\sqrt{b^2-4ac}$ استفاده نکرده‌ایم و با $(b^2-4ac)^{1/2}$ نمایش داده‌ام، زیرا عبارت $z^{1/2}$ برای z مختلط دو مقدار را نتیجه خواهد داد.

مثال ۲.۱. معادله $z^3 - i = 0$ را در اعداد مختلط حل کرده و تعبیر هندسی جواب را بدست آورید.

حل. از $z^3 - i = 0$ داریم $z^3 = i$. حال فرض کنید $z = re^{i\theta}$. بنابراین در فرم نمایی داریم

$$r^3 e^{3i\theta} = 1 . e^{\pi i/2}.$$

بنابراین

$$r^3 = 1, \quad , \quad 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2,$$

درنتیجه

$$r = 1, \quad و \quad \theta_k = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k = 0, 1, 2,$$

با فرض $k = 0, 1, 2$ داریم

$$\theta_0 = \frac{\pi}{6}, \quad \theta_1 = \frac{5\pi}{6}, \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{2}.$$

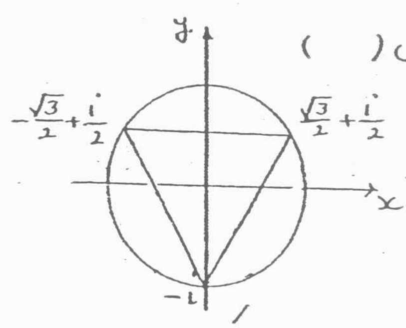
درنتیجه

$$z_0 = 1 . e^{i\pi/6} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$

$$z_1 = 1 . e^{5i\pi/6} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$

$$z_2 = 1 . e^{3\pi i/6} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

ریشه های z_0، z_1 و z_2 بر دایره‌ای به شعاع ۱ و مرکز مبداء واقع است، که رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع می‌باشند. شکل ( )



شکل

قرارداد ۲۸. عبارت $\cos\theta + i\sin\theta$ را برای سادگی در بیان مطالب با $\operatorname{cis}\theta$ نمایش می‌دهیم.

$$\operatorname{cis}\theta = \cos\theta + i\sin\theta. \qquad (۴۳)$$