۵.۲ توابع

۱.۵.۲. تابع

تعریف ۲۷. فرض کنید به هر عضو در مجموعه A یک عضو منحصر به فرد از مجموعه B تناظر شده است. این تناظر را یک تابع نامیم. اگر f نشان دهندهٔ قانون این تناظر باشد آن گاه می‌نویسیم

$$f: A \longrightarrow B$$

و آن را به صورت " f تابعی از A به توی B " می‌خوانیم. مجموعه A را دامنه تعریف (یا به طور ساده‌تر دامنه) تابع f و مجموعه B را بُرد (یا مجموعه مقادیر یا هم‌دامنه) f گوئیم. اگر $a\in A$ باشد آن گاه عضوی در B که به a تناظر شده است را تصویر a نامیده و با $f(a)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲۴. الف) فرض کنید f به هر عدد حقیقی، مجذور آن را متناظر کند، یعنی برای هر عدد حقیقی x، فرض کنید $f(x)=x^2$. دامنه و بُرد f هر دو اعداد حقیقی اند پس می‌نویسیم

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

تصویر -3 برابر 9 است و می‌نویسیم $f(-3)=9$ یا $f: -3 \longmapsto 9$.

ب) فرض کنید f به هر کشور، پایتخت آن را متناظر کند. دامنه f مجموعه تمام کشورهای کره زمین است و بُرد آن مجموعه تمام پایتخت های جهان است. پس تصویر فرانسه، شهر پاریس و تصویر ایران شهر تهران است. یعنی

f(فرانسه) = پاریس ، f(ایران) = تهران

ج) فرض کنید $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{a,b,c\}$. تابع f را توسط

$$f(a)=b,\quad f(b)=c,\quad f(c)=c,\quad f(d)=b,$$

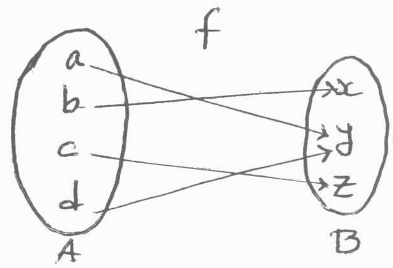
تعریف کرده‌ایم. طبق این تعریف، تصویر b عضو c در B است.

د) فرض کنید $A=\{1,-1\}$ و f به هر عدد گویا عدد 1، و به هر عدد گنگ عدد -1 را در $\mathbb{R}$ تصویر کرده است. بنابراین $f:\mathbb{R}\longrightarrow A$ و می‌توان آن را به صورت

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ -1 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}$$

نمایش داد.

ه) فرض کنید $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{x,y,z\}$ و $f: A\to B$ توسط نمودار زیر تعریف شده است.



برای روشنتر شدن مفهوم یک تابع، می‌توان به صورت زیر نیز عمل کرد.

فرض کنید A و B دو مجموعه دلخواه اند. حاصل ضرب دکارتی A و B که با $A\times B$ نمایش داده می‌شود، مجموعه تمام زوج های مرتب به صورت (a,b) است که $a\in A$ و $b\in B$.

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}.$$

هر زیرمجموعه از $A\times B$ را یک رابطه نامیم. پس اگر R رابطه‌ای از A بتوی B باشد آن گاه $R\subset A\times B$ و برعکس. در این حالت می‌نویسیم $R: A\to B$. بنابراین رابطه‌ها مجموعه‌هایی از زوج های مرتب اند.

رابطه $R\subset A\times B$ را یک تابع نامیم شرط در R هیچ دو زوج مرتبی با مولفه‌های اول یکسان و مولفه‌های دوم غیریکسان وجود نداشته باشد. یعنی اگر $(a,b)\in R$ و $(c,d)\in R$ و $a=c$ آن گاه $b=d$. بنابراین توابع نوعی از رابطه‌هایی از A بتوی B هستند. حال اگر f تابعی باشد از A بتوی B $(f\subset A\times B)$ که شامل زوج‌های مرتب است، می‌توان با داشتن مولفه اول زوج های مرتب متعلق به f به مولفه دوم طبق قانون یا ضابطه‌ای رسید، این قانون را هم f می‌نامیم و داریم

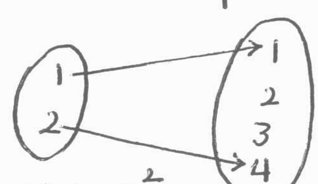
$$(a,b)\in f \Leftrightarrow b=f(a). \qquad (۴۵)$$

پس اگر $y=f(x)$ آن گاه $(x,y)\in f$. مجموعه تمام مولفه‌های اول زوج های مرتب متعلق به تابع f را دامنه تعریف f گوییم و مجموعه تمام مولفه‌های دوم زوج های مرتب متعلق به f را برد f نامیم.

تعریف ۲۸. اگر A و B دو مجموعه در حالت کلی باشند که لزوماً مجموعه هایی از اعداد نیستند در این صورت تابع f از A بتوی B را یک نگاشت از A بتوی B نامیم و گوییم f، مجموعه A را بتوی B می نگارد. اگر دامنه و بُرد تابع f یک مجموعه باشند، گوییم $f: A\to A$ یک عملگر یا تبدیل یا خودنگاشت است.

تعریف ۲۹. فرض کنید f و g توابع تعریف شده روی دامنه مشترک D بوده و برای هر $a\in D$، $f(a)=g(a)$. در این صورت گوییم f و g مساویند و می نویسیم $f=g$.

مثال ۲۴. فرض کنید تابع f توسط دیاگرام



تعریف شده است. فرض کنید تابع g با فرمول $g(x)=x^2$ تعریف شده است که در آن دامنه g مجموعه $\{1,2\}$ است. در این صورت $f=g$، زیرا هر دو دارای دامنه مساوی بوده و تصویر هر عضو از دامنه نیز با هم یکی است.

مثال ۲۵. فرض کنید $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ توابع تعریف شده توسط $f(x)=x^2$ و $g(y)=y^2$ باشند. در این صورت f و g توابعی مساویند یعنی $f=g$. توجه کنید که x و y در فرمولهای تعریف کننده توابع f و g متغیرهای ظاهری (Dummy) هستند.

تعریف ۳۰. فرض کنید f نگاشتی از A بتوی B است. هر عضو B لزوماً تصویر یک عضو از A نیست. بُرد f شامل عناصری از B است که تصویر حداقل یک عضو در A می باشند. بنابراین در حالت کلی بُرد f که با $f(A)$ نمایش می دهیم زیرمجموعه ای از B است.

مثال ۲۶. فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توسط $f(x)=x^2$ تعریف شده است. برد f شامل اعداد حقیقی مثبت و صفر است.

تعریف ۳۱. فرض کنید f نگاشتی از A به‌توی B است. گوییم f تابعی یک به یک است هرگاه عناصر متمایز در B متناظر شده از عناصر متمایز در A باشد، یعنی هیچ دو عضو متمایز در A دارای تصویرهای یکسان نباشند. پس $f: A \to B$ یک به یک است هرگاه

$$f(a)=f(a') \Rightarrow a=a' \qquad (۴۶)$$

یا

$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a'). \qquad (۴۷)$$

مثال ۲۷. الف) فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با $f(x)=x^2$ تعریف شده است. در این صورت f یک تابع یک به یک نیست، زیرا $f(2)=f(-2)=4$ یعنی تصویر دو عضو متمایز 2 و 2- در دامنه، عضو 4 در برد است.

ب) فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=x^3$ تعریف شده است. f یک به یک است زیرا مکعب دو عدد حقیقی متمایز، متفاوتند.

$$a \neq a' \Rightarrow a^3 \neq a'^3 \Rightarrow f(a) \neq f(a').$$

ج) تابعی که به هر کشور، پایتختش را متناظر می‌کند یک به یک است، زیرا کشورهای متفاوت دارای پایتخت‌های متفاوتند یعنی هیچ شهری پایتخت دو کشور متفاوت نیست.

تعریف ۳۲. فرض کنید f تابعی از A به‌توی B است، در این صورت برد f یعنی $f(A)$ زیرمجموعهٔ B است، $f(A) \subset B$. اگر $f(A)=B$ یعنی هر عضو B تصویر حداقل یک عضو از A باشد، گوییم f تابعی پوشا است و f را نگاشتی از A بروی B نامیم.

پس برای پوشا بودن یک تابع تنها کافی است نشان دهیم

$$B \subset f(A) \qquad (۴۸)$$

یعنی

$$y\in B \Rightarrow y\in f(A)$$

اما با توجه به تعریف $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$ ، داریم

$$y\in B \Rightarrow \exists x\in A,\ y=f(x)$$

پس به طور خلاصه برای بررسی پوشا بودن یک تابع، کافی است نشان دهیم

$$\forall y\in B\ \exists x\in A \ \text{ s.t. }\ y=f(x) \qquad (۴۹)$$

و معمولاً از $y=f(x)$ ، x را برحسب y به دست می‌آوریم.

مثال ۲۸. الف) فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=x^2$ تعریف شده است. f پوشا نیست، زیرا اعداد منفی در برد f قرار ندارند.

ب) فرض کنید $f:A\to B$ تابع تعریف شده توسط

$$f(a)=b,\quad f(b)=c,\quad f(c)=c,\quad f(d)=b$$

است، که در آن $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{a,b,c\}$. چون $f(A)=\{b,c\}$ و $B=\{a,b,c\}$ پس $f(A)\neq B$ یعنی f پوشا نیست.

ج) فرض کنید f تابع تعریف شده در مثال ۲۳ (هـ) است. با توجه به

$$f(A)=\{x,y,z\}=B$$

f نگاشتی پوشا از A بروی B است.

توضیح ۳۳. از این قسمت به بعد تنها توابع با مقدار حقیقی از متغیر حقیقی را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $f:X\to Y$ تابعی تعریف شده بر زیرمجموعه X از اعداد حقیقی با مقادیری در زیرمجموعه Y از اعداد حقیقی است که توسط قانون (ضابطه) $y=f(x)$ تعریف شده است. متغیر x متغیر مستقل ($x\in X$) و متغیر y متغیر وابسته یا تابع ($y\in Y$) می‌باشد.

مثال ۲۹. دامنه و برد تابع $f(x)=7+\sqrt{3x-6}$ را تعیین کنید.

حل. عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد. از حل $3x-6\geqslant 0$ داریم $x\geqslant 2$ و بنابراین $D_f=[2,\infty)$. پس برای $x\geqslant 2$ داریم

$$\sqrt{3x-6}\geqslant 0$$

پس

$$y=7+\sqrt{3x-6}\geqslant 7$$

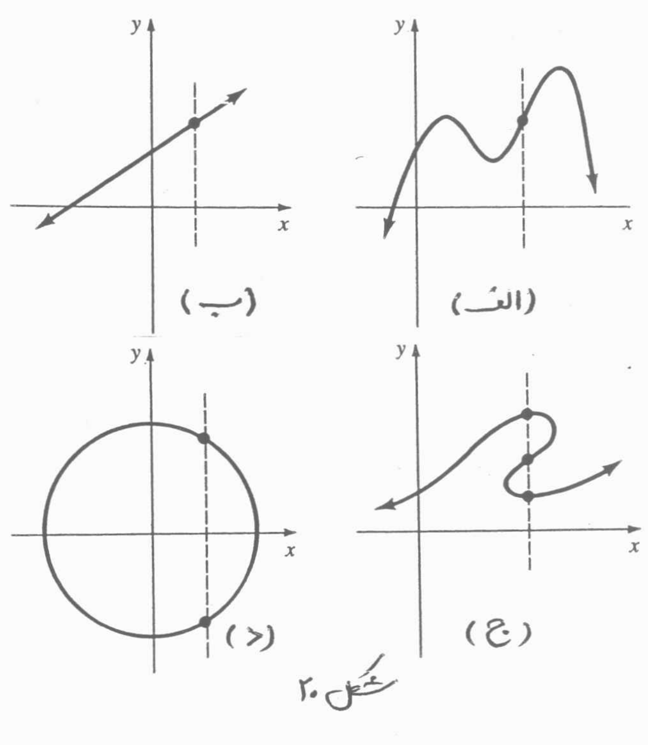
چون $3x-6$ و $\sqrt{3x-6}$ با صعود x افزایش می‌یابند پس برد f مجموعه $[7,\infty)$ است.

تعریف ۳۴. نمودار (گراف) تابع f مجموعه نقاط

$$\{(x,y)\mid y=f(x),\quad x\in D_f\} \qquad (۵۰)$$

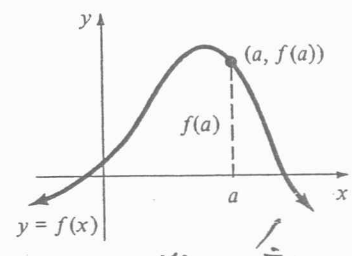
در صفحه دکارتی است.

به طور هندسی یک تابع با این واقعیت مشخص می‌شود که هر خط قائم نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. در شکل ۲۰ (الف) و (ب) نمودارهای داده شده تابع هستند، اما در شکل ۲۰ (ج) و (د) نمودارهای نمایش داده شده تابع نیستند.

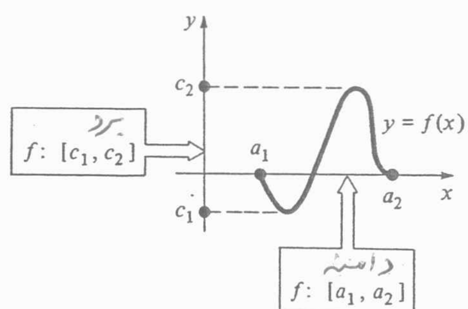


شکل ۲۰

اگر نقطه (a,b) روی نمودار تابع f باشد، آنگاه مختص y یعنی b مقدار تابع در a است، یعنی $f(a)=b$ همانگونه که در شکل (۲۱) دیده می‌شود، مقدار $f(a)$ فاصله مستقیم از محور xها تا نقطه $(a, f(a))$ است. علاوه بر آن، از نمودار تابع می‌توان دامنه و برد آن را مشاهده کرد. در شکل (۲۲) دامنه تابع f یک فاصله روی محور x ها و برد f نیز یک فاصله روی محور y ها است.



شکل ۲۱



شکل ۲۲

۲.۵.۲ انواع توابع و نمودار آنها

توابع چندجمله‌ای ۲۵. از جبر مقدماتی می‌دانیم که عبارتی مانند x^5+10x^2-2x+1 را یک چندجمله‌ای درجه 5 نامیم. در حالت کلی، اگر $a_n \neq 0$ آنگاه

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0, \qquad (51)$$

که در آن n عدد صحیح نامنفی است را یک تابع چندجمله‌ای از درجه n نامیم. ضرایب a_i برای $i=0,1,\dots,n$ اعداد حقیقی اند، دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، است.

توابع چندجمله‌ای از درجه ۰، ۱ و 2، به ترتیب در زیر آورده شده‌اند:

(۵۲) تابع ثابت ، $f(x)=a_0$

(۵۳) تابع خطی ، $a_1\neq 0$ ، $f(x)=a_1x+a_0$

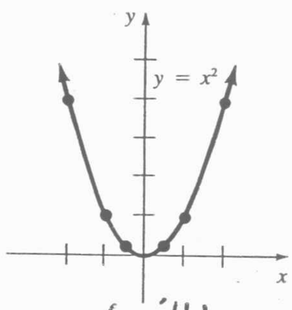
(۵۴) تابع درجه دوم ، $a_2\neq 0$ ، $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$

از مقایسه (۵۳) با شکل شیب-عرض از مبدا یک خط یعنی $y=mx+b$ ، ایده می‌گیریم که نمودار یک تابع خطی ، خطی مستقیم است . البته نمودار تابع ثابت یک خط افقی است . نمودار تابع درجه دوم (۵۴) را یک سهمی نامیم .

مثال ۳۰ . نمودار توابع $f(x)=x^2$ و $f(x)=x^3$ را رسم کنید .

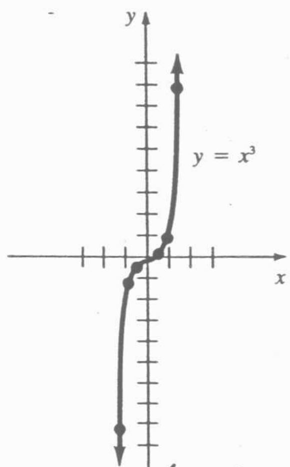
حل . در شکل (۲۴) (الف) و (ب) نقاطی متناظر به مقادیر x و $f(x)$ در جداولی آمده است ، چون دامنه تعریف چنین توابعی مجموعه اعداد حقیقی است ، این نقاط را با یک منحنی متصل و هموار به هم وصل می‌کنیم .

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
2	4



(الف)

x	$f(x)$
-2	-8
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8



(ب)

شکل ۲۴

شکل (۲۳-الف) نوع خاصی از یک سهمی را نشان می‌دهد. شکل (۲۳-ب) نشان دهنده نمودار یک تابع درجه سوم است.

۳۶. تابع توابع گویا

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad (۵۵)$$

را که در آن P و Q توابع چندجمله‌ای اند را یک تابع گویا نامیم. دامنه تعریف تابع گویای (۵۵) مجموعه تمام اعداد حقیقی بجز آن اعداد حقیقی که $Q(x)=0$ می‌باشد. یعنی

$$D_f=\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}\mid Q(x)=0\} \qquad (۵۶)$$

مثال ۳۱. الف) تابع $f(x)=\dfrac{x^3+x+5}{x^2-3x-4}$ یک تابع گویا است، چون

$$x^2-3x-4=(x+1)(x-4),$$

است، پس $(x+1)(x-4)=0$ نتیجه می‌دهد که $x=-1$ یا $x=4$. بنابراین دامنه تعریف تابع f مجموعه تمام اعداد حقیقی بجز ۱- و 4 است، یعنی

$$D_f=\mathbb{R}-\{-1,4\}=(-\infty,-1)\cup(-1,4)\cup(4,\infty).$$

ب) تابع $f(x)=x+x^{-1}$ یک تابع چندجمله‌ای نیست، زیرا توان ۱- که عددی صحیح منفی است، وجود دارد. در واقع با مخرج مشترک گیری داریم

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x},$$

که یک تابع گویا است و دامنه تعریف آن مجموعه تمام اعداد حقیقی بجز ۰ است. یعنی

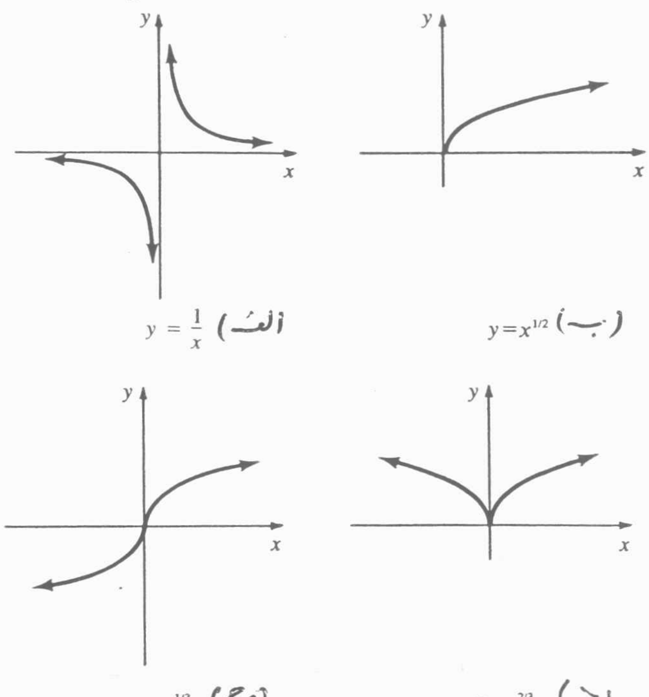
$$D_f=\mathbb{R}-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty).$$

۳۷. تابع توانی تابع

$$f(x)=kx^n, \qquad (۵۷)$$

را که در آن k عددی ثابت و n عددی حقیقی است، یک تابع توانی نامیم.

در این بخش بررسی تابع توانی f برای هر توان حقیقی n را انجام نمی‌دهیم. اما برای یک توان ثابت حقیقی، به عنوان مثال $\sqrt{2}$ داریم $y=f(x)=x^{\sqrt{2}}$ که به ازای هر مقدار $x\in\mathbb{R}$ تنها یک مقدار برای y حاصل می‌شود. دامنه تعریف یک تابع توانی وابسته به مقدار n است. به عنوان مثال، وقتی $k=1$ و $n=\frac{1}{2}$ داریم $y=x^{1/2}=\sqrt{x}$ که تابعی با دامنه تعریف $[0,\infty)$ است، وقتی $k=1$، برای $n=1,2,3$ به ترتیب توابع خطی، درجه دوم و مکعب به صورت $y=x$، $y=x^2$ و $y=x^3$ را داریم. شکل (۲۴) نمودار توابع توانی متناظر به $k=1$ و $n=-1$، $n=\frac{1}{2}$، $n=\frac{1}{3}$ و $n=\frac{2}{3}$ را نشان می‌دهد.



$y=\frac{1}{x}$ (الف) $y=x^{1/2}$ (ب)

$y=x^{1/3}$ (ج) $y=x^{2/3}$ (د)

شکل ۲۴

توابع چند ضابطه‌ای تعریف شده ۳۸. یک تابع ممکن است تنها با یک ضابطه یا قانون تعریف شده باشد. در چنین حالتی معمولاً دامنه تعریف تابع به صورت اجتماعی از فواصل افراز شده و روی هر افراز ضابطه یا قانونی برای تابع بیان می‌شود. این گونه توابع را چند ضابطه‌ای یا تکه‌ای تعریف شده نامند.

مثال ۳۲. نمودار تابع تعریف شده توسط چند ضابطه به صورت زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x+2, & x>0\end{cases}$$

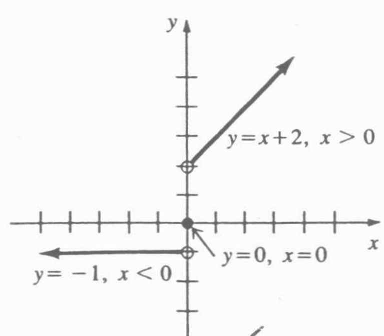
حل. در این مثال باید توجه کرد که f سه تابع نیست بلکه تابعی با دامنه تعریف اعداد حقیقی است. نمودار f شامل سه قسمت است که به صورت زیر بیان شده است.

برای $x<0$ خط افقی $y=-1$ و

برای $x=0$ نقطه $(0,0)$ و

برای $x>0$ خط $y=x+2$ را داریم.

نمودار f در شکل (۲۵) نمایش داده شده است.



شکل ۲۵

برخوردها ۲۹. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ محور yها را قطع کند آنگاه برخورد y برابر $f(0)$ است. برخوردهای x نمودار f جواب‌های حقیقی معادله $f(x)=0$ می‌باشند. مقدارهایی از x که $f(x)=0$ برقرار باشد را صفرهای تابع f نیز می‌نامند.

مثال ۳۲. الف) نمودار تابع چندجمله‌ای $f(x)=x^2-x-6$ دارای برخورد y برابر $f(0)=-6$ است. همچنین از

$$0=f(x)=x^2-x-6=(x-3)(x+2)$$

نتیجه می‌شود که برخوردهای x برابر 3 و 2- می‌باشند.

ب) نمودار تابع گویای $f(x)=\frac{3x-2}{x}$ دارای برخورد y نیست، زیرا $f(0)$ تعریف نشده است (0 در D_f نیست). از طرفی تابع گویای $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ می‌تواند برابر

صفر شود هرگاه $P(x)=0$ و $Q(x)\neq 0$. پس برای تابع داده شده، $3x-2=0$ نتیجه می‌دهد که برخورد x برابر $\frac{2}{3}$ است.

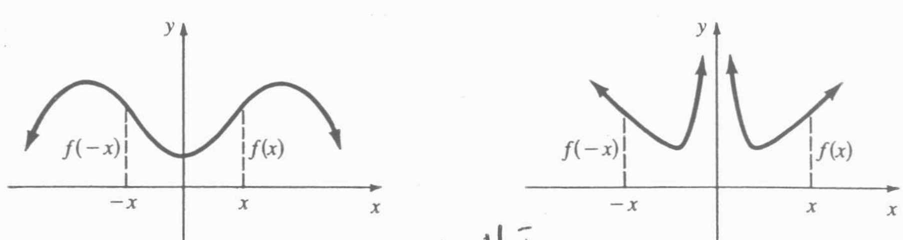
تقارن ۴۰. سه تقارن برای نمودارها در بخش (۳.۲) شرح دادیم. باید توجه کرد که نمودار یک تابع ناصفر نمی‌تواند نسبت به محور xها متقارن باشد، زیرا در چنین حالتی باید هر دو نقطه (x,y) و $(x,-y)$ روی نمودار باشد که با تعریف تابع بودن $y=f(x)$ در تناقض است.

تعریف ۴۱. تابعی که نمودارش نسبت به محور yها متقارن باشد را تابع زوج نامیم. تابعی که نمودار آن نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشد را تابع فرد گوییم. دو آزمون زیر برای تقارن معادل با آزمون‌های تقارن (الف) و (ج) در بخش (۳.۲) هستند.

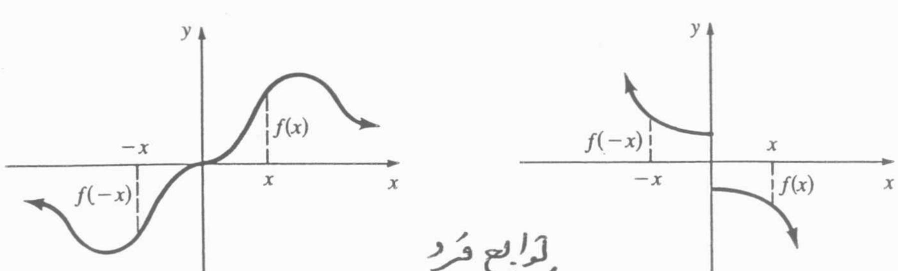
(۵۸) نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور yها متقارن است هرگاه $f(-x)=f(x)$.

(۵۹) نمودار $y=f(x)$ نسبت به مبدأ مختصات متقارن است هرگاه $f(-x)=-f(x)$.

در شکل (۲۶) مثال‌هایی از این گونه توابع آورده شده‌اند.



توابع زوج



توابع فرد

شکل ۲۶

مثال ۳۴. کدامیک از توابع زیر زوج و کدامیک فردند

الف) $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$ ب) $f(x)=\frac{x^2}{x^3+1}$

حل. الف)

$$f(-x)=\frac{3(-x)}{(-x)^2+1}=-\frac{3x}{x^2+1}=-f(x)$$

پس تابع فرد است.

ب)

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^3+1}=\frac{x^2}{-x^3+1}\neq \pm f(x)$$

پس تابع نه زوج و نه فرد است.

مثال ۳۵. نمودار $f(x)=x^3-4x$ را رسم کنید.

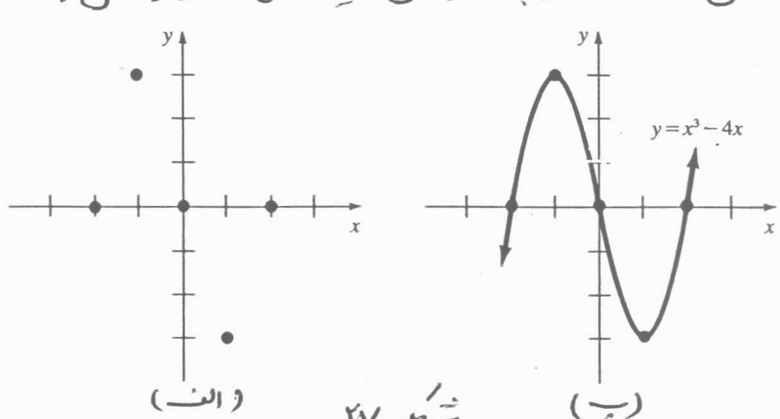
حل. برخورد y برابر $f(0)=0$ است. با نوشتن f به صورت

$$f(x)=x(x^2-4)=x(x+2)(x-2)$$

برخورد x نمودار -2، 0 و 2 است. علاوه بر آن

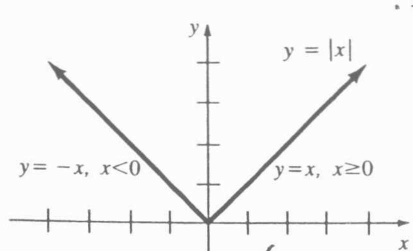
$$f(-x)=(-x)^3-4(-x)=-x^3+4x=-f(x)$$

نشان می دهد که نمودار f نسبت به مبدأ متقارن است، یعنی f یک تابع فرد می باشد. با قرار دادن $x=1$ داریم $f(1)=-3$ پس $(1,-3)$ روی نمودار تابع است و از تقارن نتیجه می شود که $(-1,-f(1))=(-1,3)$ نیز روی نمودار تابع قرار دارد. در شکل (۲۷-الف) نقاط حاصل مشخص شده اند و با گذراندن یک منحنی هموار شکل (۲۷-ب) به دست می آید.



شکل ۲۷

توابع چندجمله‌ای که تنها شامل توان‌های زوج x باشند، لزوماً توابع زوج هستند. و توابع چندجمله‌ای که تنها شامل توان‌های فرد x اند توابعی فردند. بنابراین نمودارهای توابعی مانند $f(x)=x^2$ ، $f(x)=x^4$ و $f(x)=x^6-x^4+x^2+1$ نسبت به محور yها متقارن هستند، در حالی که نمودار توابعی مانند $f(x)=x^3$ ، $f(x)=x^5$ و $f(x)=x^7-x^3$ نسبت به مبدأ متقارن هستند. نمودار تابع چندجمله‌ای $f(x)=x^3+5x^2-x+6$ که هم شامل توان‌های زوج و هم شامل توان‌های فرد است، متقارن نیست. اما باید دقت کرد که نمی‌توان این نوع استدلال را تعمیم داد. به عنوان مثال تابع قدر مطلق $f(x)=|x|$ که تنها شامل یک توان فرد x است را در نظر بگیرید، نمودار این تابع (شکل ۲۸) نسبت به محور yها متقارن است. البته باید دقت کرد که تابع $f(x)=|x|$ یک تابع چندجمله‌ای نیست.



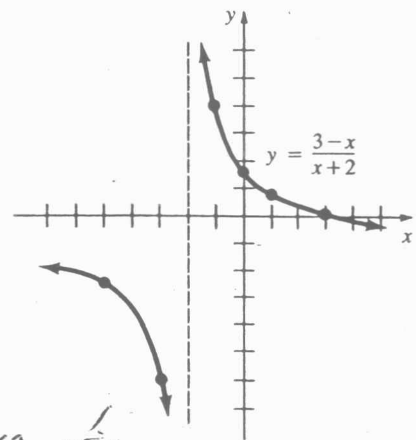
شکل ۲۸

مثال ۳۶. نمودار $f(x)=\frac{3-x}{x+2}$ را رسم کنید.

حل. به سادگی دیده می‌شود که برخورد y برابر $\frac{3}{2}=f(0)$ و برخورد x برابر 3 است. چون $f(-x)$ با $f(x)$ یا $-f(x)$ مساوی نیست است، پس نمودار f نسبت به محور yها و مبدأ متقارن نمی‌باشد. برای رسم نمودار یک تابع گویا، توجه به دامنه تعریف آن اهمیت دارد. در این تابع، دامنه تعریف f مجموعه تمام اعداد حقیقی بجز -2 است. همان‌گونه که در جدول محاسباتی دیده می‌شود، وقتی x نزدیک -2 باشد مقادیر مخرج عبارت، یعنی $x+2$ بسیار نزدیک به صفر است. پس مقادیر تابع، از نظر قدر مطلق، بسیار بزرگ خواهد بود. نمودار تابع f در شکل (۲۹) آورده شده است.

x	$f(x)$
-5	$-\frac{8}{3}$
-3	-6
-2.1	-51
-1.9	49
-1	4
0	$\frac{3}{2}$
1	$\frac{2}{3}$
3	0

جدول محاسباتی



شکل ۲۹

توضیح . در رابطه با نمودار توابع گویا در فصل های بعد به طور مفصل تری صحبت خواهیم کرد.

تابع جزء صحیح ۴۲. از خاصیت LUB 5 فصل اول، دیدیم که برای هر عدد حقیقی x، عدد صحیح منحصر بفرد n وجود دارد به طوری که $n \le x < n+1$. حال تابع f از $\mathbb{R}$ به توی $\mathbb{Z}$ را با ضابطهٔ

$$f(x)=n, \qquad n \le x < n+1 \qquad (۶۰)$$

تعریف می‌کنیم. تابع f تعریف شده توسط (۶۰) را تابع جزء صحیح نامیم و معمولاً با نماد $f(x)=[\![x]\!]$ نمایش می‌دهیم.

در شکل (۳۰) نمودار $f(x)=[\![x]\!]$ برای x در دامنه $[-3,4]$ رسم شده است:

$-3 \le x < -2, \quad f(x)=[\![x]\!]=-3$

$-2 \le x < -1, \quad f(x)=[\![x]\!]=-2$

$-1 \le x < 0, \quad f(x)=[\![x]\!]=-1$

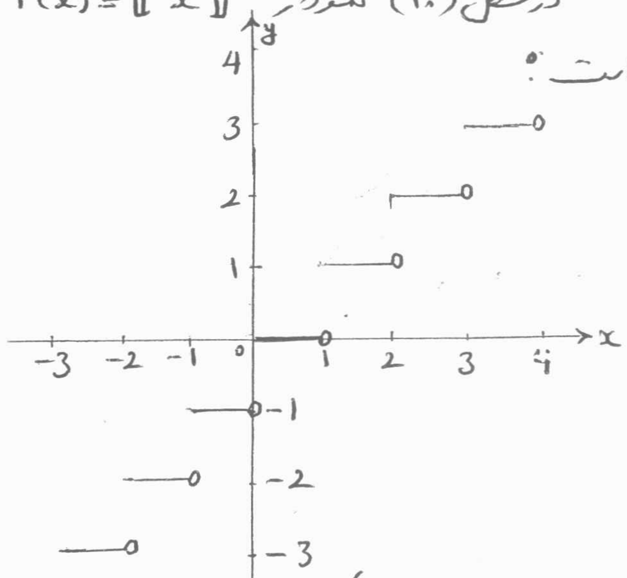
$0 \le x < 1, \quad f(x)=[\![x]\!]=0$

$1 \le x < 2, \quad f(x)=[\![x]\!]=1$

$2 \le x < 3, \quad f(x)=[\![x]\!]=2$

$3 \le x < 4, \quad f(x)=[\![x]\!]=3$

$4 = x, \quad f(x)=[\![4]\!]=4$



شکل ۳۰

۳.۵.۲ جبر توابع

تابع f را می‌توان با تابع دیگری مانند g با توجه به عمل‌های حساب عمل کرد و حاصل تابع دیگری است. جمع $f+g$ ، تفاضل $f-g$ ، حاصل‌ضرب fg و خارج قسمت f/g به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۴۳. فرض کنید f و g دو تابع اند.

الف) جمع دو تابع f و g، تابعی است که با $f+g$ نمایش داده و

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \tag{۴۱}$$

ب) تفاضل دو تابع f و g، تابعی است که با $f-g$ نمایش داده و

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x) \tag{۴۲}$$

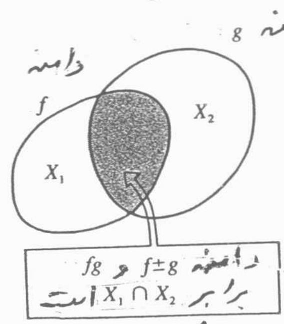
ج) ضرب دو تابع f و g، تابعی است که با fg نمایش داده و

$$(fg)(x)=f(x)\,g(x) \tag{۴۳}$$

د) خارج قسمت دو تابع f و g، تابعی است که با $\frac{f}{g}$ نمایش داده و

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \tag{۴۴}$$

دامنه تعریف $f+g$ ، $f-g$ و fg اشتراک دامنه تعریف f با دامنه تعریف g است. شکل (۳۱) را ببینید. دامنه تعریف $\frac{f}{g}$ اشتراک دامنه‌های f و g است بجز آن مقادیری از x در دامنه g که به ازای آنها $g(x)=0$ باشد.



شکل ۳۱

مثال ۳۷. فرض کنید $f(x)=2x^2-5$ و $g(x)=3x+4$. مطلوب است $f+g$، $f-g$، fg و f/g.

حل. از تعریف (۴۲) داریم

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(2x^2-5)+(3x+4)=2x^2+3x-1$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(2x^2-5)-(3x+4)=2x^2-3x-9$$

$$(fg)(x)=f(x)\,g(x)=(2x^2-5)(3x+4)=6x^3+8x^2-15x-20$$

$$(f/g)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x^2-5}{3x+4},\qquad x\neq-\frac{4}{3}$$

مثال ۳۸. فرض کنید $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=\sqrt{2-x}$. مطلوب است دامنه تعریف توابع fg و f/g.

حل. دامنه های تعریف f و g به ترتیب $[1,\infty)$ و $(-\infty,2]$ است. پس دامنه تعریف حاصل ضرب

$$(fg)(x)=\sqrt{x-1}\,\sqrt{2-x}=\sqrt{(x-1)(2-x)}$$

برابر اشتراک دامنه ها، یعنی $[1,2]$ است. درحالی که دامنه تعریف خارج قسمت

$$(f/g)(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}=\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$$

برابر $[1,2)$ است، زیرا در $x=2$ داریم $g(x)=0$.

اگر f یک تابع ثابت، مثلا $f=c$ باشد، از تعریف (۴۲-ج) تابع cg توسط

$$(cg)(x)=c\cdot g(x)$$

تعریف می شود. دامنه cg همان دامنه تابع g است. برای مثال، اگر $g(x)=4x^3-3x$ آن گاه تابع $5g$ توسط $(5g)(x)=20x^3-15x$ تعریف می شود.

یکی دیگر از طرق تشکیل یک تابع، ترکیب دو تابع دیگر است.

تعریف ۴۴. فرض کنید f و g دو تابع اند.

الف) ترکیب f و g که به صورت $f\circ g$ نمایش داده می‌شود، تابع

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) \qquad (۶۵)$$

است.

ب) ترکیب g و f که به صورت $g\circ f$ نمایش داده می‌شود، تابع

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) \qquad (۶۶)$$

است.

ترکیب دو تابع، مثلاً تابع مرکب $f\circ g$ را گاهی اوقات "تابع یک تابع" نامیده می‌شود. در قسمت (الف) تعریف (۴۴)، باید دقت کرد که عدد نمایش دهنده $g(x)$ باید متعلق به دامنه تعریف تابع f باشد. به عبارت دیگر دامنه تعریف $f\circ g$ زیرمجموعه‌ای از دامنه g است به طوری که $g(x)$ در دامنه f باشد. یعنی

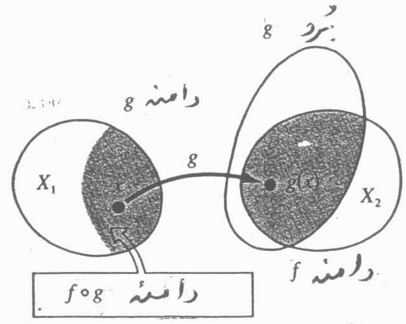
$$D_{f\circ g} = \{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\} \subset D_g \qquad (۶۷)$$

به طور مشابه

$$D_{g\circ f} = \{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\} \subset D_f \qquad (۶۸)$$

به عبارت دیگر زمانی تابع $f\circ g$ با معنی است که $R_g \subset D_f$ یا $R_{f\circ g} \subset R_g \cap D_f$ شود. شکل (۴۲) را ببینید.

درضمن باید دقت کرد که لزوماً توابع $f\circ g$ و $g\circ f$ باهم مساوی نیستند.



شکل ۴۲

مثال ۳۹. فرض کنید $f(x)=x^2$ و $g(x)=x^2+1$. مطلوب است $f\circ g$ و $g\circ f$.

حل. از تعریف (۴۴) داریم

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+1)$$
$$=(x^2+1)^2=x^4+2x^2+1$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)$$
$$=(x^2)^2+1=x^4+1$$

در این مثال دیده می‌شود که $f\circ g\neq g\circ f$.

مثال ۴۰. فرض کنید $f(x)=3x-\sqrt{x}$ و $g(x)=2x+1$. مطلوب $D_{f\circ g}$.

حل. از تعریف (۴۴) قسمت (الف) داریم

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+1)$$
$$=3(2x+1)-\sqrt{2x+1}$$
$$=6x+3-\sqrt{2x+1}$$

برای تعریف $f\circ g$ باید توجه داشت که شرط $g(x)\geqslant 0$ یا $2x+1\geqslant 0$ الزامی است.
یعنی دامنه تعریف $f\circ g$ مجموعه $[-\frac{1}{2},\infty)$ است.

مثال ۴۱. تابع $F(x)=\sqrt{2x^2+5}$ را به صورت ترکیب $f\circ g$ از دو تابع f و g شرح دهید.

حل. اگر قرار دهیم $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=2x^2+5$ آنگاه

$$F(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$$
$$=\sqrt{g(x)}=\sqrt{2x^2+5}$$

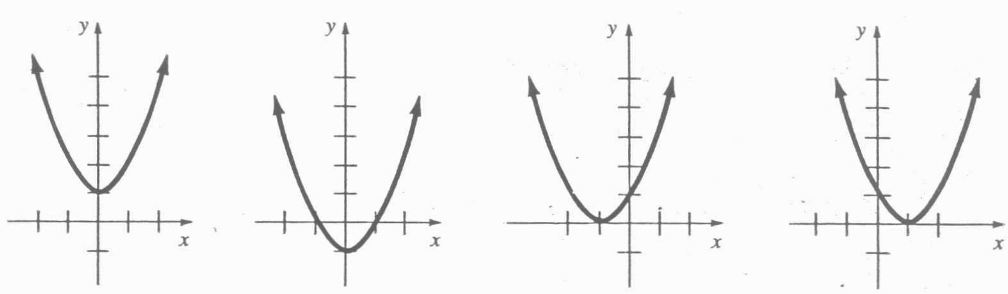
می‌توان قرار داد $f(x)=\sqrt{2x+5}$ و $g(x)=x^2$. در این صورت

$$F(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$$
$$=\sqrt{2g(x)+5}=\sqrt{2x^2+5}$$

انتقال نمودارها ۴۵. گاهی اوقات می‌توان با انتقال نمودار یک تابع ساده‌تر، نمودار تابع مورد نظر را به دست آورد. اگر c عددی ثابت باشد، نمودارهای $y=f(x)+c$ و $y=f(x)-c$ را می‌توان از نمودار $y=f(x)$ با یک انتقال قائم به دست آورد. نمودارهای تابع مرکب $y=f(x+c)$ و تابع مرکب $y=f(x-c)$ با یک انتقال افقی از نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شوند. این اطلاعات را برای $c>0$ در جدول زیر خلاصه کرده‌ایم.

تابع	نمودار
$y=f(x)+c$	نمودار $y=f(x)$ به اندازه c واحد به طرف بالا منتقل شود.
$y=f(x)-c$	نمودار $y=f(x)$ به اندازه c واحد به طرف پایین منتقل شود.
$y=f(x+c)$	نمودار $y=f(x)$ به اندازه c واحد به طرف چپ منتقل شود.
$y=f(x-c)$	نمودار $y=f(x)$ به اندازه c واحد به طرف راست منتقل شود.

مثال ۴۲. نمودارهای $y=x^2+1$، $y=x^2-1$، $y=(x+1)^2$ و $y=(x-1)^2$ در شکل (۴۳) از نمودار $f(x)=x^2$ با انتقال به اندازه ۱ واحد به بالا، پایین، چپ و راست به ترتیب حاصل شده‌اند.



$y=x^2+1$ $y=x^2-1$ $y=(x+1)^2$ $y=(x-1)^2$

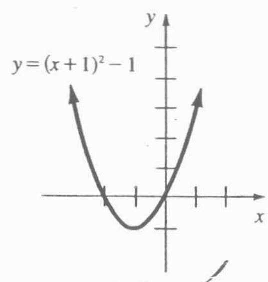
شکل ۴۳

نمودار تابع $y=f(x\pm c_1)\pm c_2$ برای $c_1>0$ و $c_2>0$ ترکیب‌هایی از انتقال افقی (چپ یا راست) با انتقال قائم (بالا یا پایین) است. برای مثال، نمودار $y=f(x-c_1)+c_2$، نمودار $y=f(x)$ است که به اندازه c_1 واحد به راست و c_2 واحد به بالا منتقل

شده است.

مثال ۴۳. نمودار $y=(x+1)^2-1$ را رسم کنید.

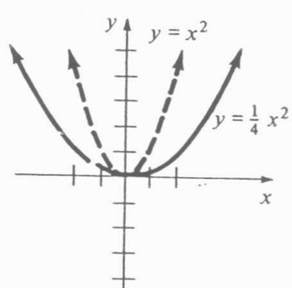
حل. از شرح بالا، دیده می‌شود که تابع داده شده به صورت $y=f(x+c_1)-c_2$ با $c_1=1$ و $c_2=1$ است، بنابراین نمودار $y=(x+1)^2-1$ همان نمودار تابع $f(x)=x^2$ است که ۱ واحد به سمت چپ و ۱ واحد به طرف پایین منتقل شده است. شکل (۳۴) را ببینید.



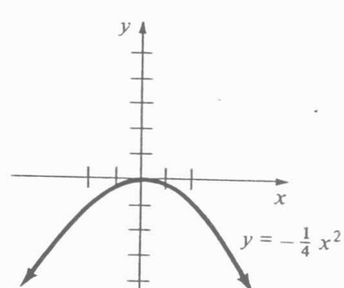
شکل ۳۴

انعکاس نمودارها ۴۶. برای $c>0$ نمودار $y=cf(x)$ دارای همان شکل نمودار $y=f(x)$ است با این تفاوت که نمودار گسترده‌تر یا بازتر شده است. درحالی که نمودار $y=-cf(x)$ برای $c>0$ انعکاس نمودار $y=cf(x)$ نسبت به محور xها است.

مثال ۴۴. در شکل (۳۵) نمودارهای $y=x^2$ و $y=\frac{1}{4}x^2$ نمایش داده شده است. نمودار $y=-\frac{1}{4}x^2$ در شکل (۳۶) نمایش داده شده است که قرینه نمودار $y=\frac{1}{4}x^2$ نسبت به محور xها است.



شکل ۳۵



شکل ۳۶

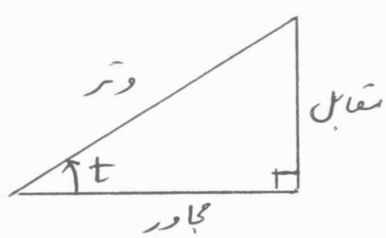
۴.۵.۲ توابع مثلثاتی

کسینوس و سینوس ۴۷. توابع کسینوس و سینوس زاویه t که با $\cos t$ و $\sin t$ نمایش می‌دهیم را می‌توان به دو روش تعبیر کرد.

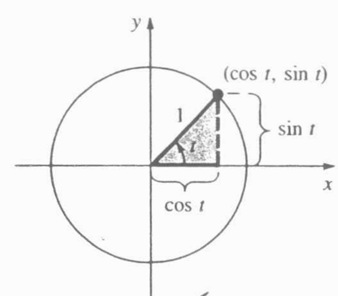
الف) به عنوان مختصات x و y یک نقطه روی دایره واحد، همان گونه که در شکل (۳۷) نشان داده شده است، یا

ب) به صورت خارج قسمت طول اضلاع یک مثلث قائم الزاویه، همان گونه که در شکل (۳۸) نشان داده شده است.

(۶۹) $\sin t = \dfrac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$ $\qquad$ $\cos t = \dfrac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$



شکل ۳۸



شکل ۳۷

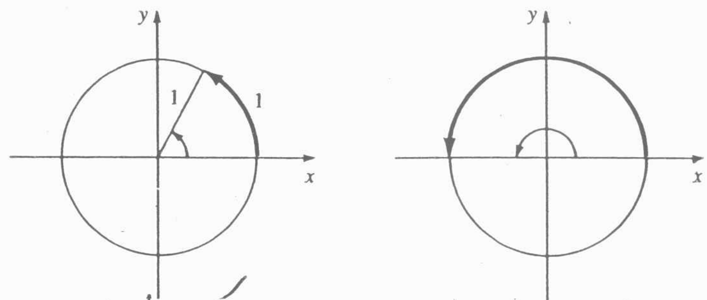
اندازه زوایا ۴۸. یک زاویه یا برحسب درجه یا برحسب رادیان اندازه گیری می‌شود. همان گونه که در شکل (۳۹) دیده می‌شود یک زاویه یک رادیان قوسی به اندازه یک واحد روی محیط دایره واحد است. نصف محیط معادل با زاویه‌ای به اندازه π رادیان است که در آن π عدد ثابت $3.1415926\ldots$ است. معادله زیر

(۷۰) π رادیان $=$ ۱۸۰ درجه (180°)

را می‌توان به فرم

(۷۱) ۱ رادیان $= \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$ یا $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ رادیان

به شکل دیگر تبدیل نمود. با تقسیم عبارت بالا مقدار تقریبی ۱ رادیان برابر 57.296° است.



یک رادیان   π رادیان یا ۱۸۰ درجه

شکل ۳۹

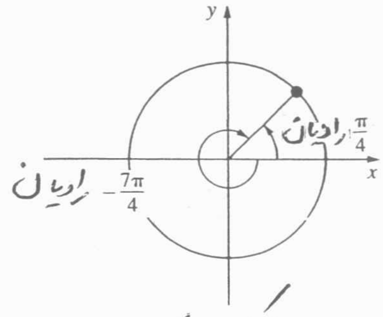
مثال ۴۵. الف) $\frac{\pi}{9}$ رادیان $= (\frac{\pi}{9})(\frac{180}{\pi}) = 20^\circ$

ب) $\frac{\pi}{12}$ رادیان $= 15(\frac{\pi}{180}) = 15^\circ$

چون در ریاضی عمومی معمولاً از اندازه رادیان استفاده می‌شود، باید بتوانیم به راحتی اندازه زاویه‌ها را برحسب درجه و رادیان به یکدیگر تبدیل نماییم. برخی از زاویه‌های مهم در جدول زیر آورده شده است.

درجه	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
رادیان	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

روی یک دایره واحد، گردش زاویه مرکزی t در موقعیت استاندارد است، هرگاه راس آن در مبدا بوده و ضلع اولیه زاویه منطبق بر جهت مثبت محور xها باشد. زاویه‌هایی که در خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شوند دارای اندازه مثبت اند درحالی که موافق حرکت عقربه‌های ساعت منفی هستند. دو زاویه با موقعیت استاندارد هم پیموده نامیده می‌شوند هرگاه دارای ضلع انتهایی یکسان باشند. در شکل (۴۰) زاویه‌های هم پیموده $\frac{\pi}{4}$ و $-\frac{7\pi}{4}$ یک نقطه را روی دایره واحد مشخص می‌کنند درحالی که یکی در جهت مثبت مثلثاتی و دیگری در جهت منفی مثلثاتی پیموده شده‌اند. شکل (۴۰) را ببینید.



شکل ۴۰

دیگر توابع مثلثاتی ۴۹. چهار تابع مثلثاتی دیگر برحسب $\sin t$ و $\cos t$ است به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \quad \text{تانژانت} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t} \quad \text{کتانژانت} \tag{۷۲}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t} \quad \text{سکانت} \qquad \csc t = \frac{1}{\sin t} \quad \text{کسکانت}$$

با استفاده از شکل (۴۱) مقادیر عددی $\sin t$ و $\cos t$ برای برخی از زاویه‌ها روی دایره مثلثاتی نشان داده شده‌اند.

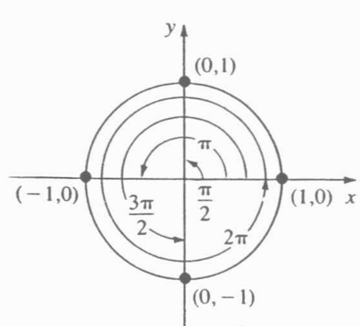
$$\sin 0 = 0 \qquad \cos 0 = 1$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1 \qquad \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin \pi = 0 \qquad \cos \pi = -1$$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1 \qquad \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\sin 2\pi = 0 \qquad \cos 2\pi = 1$$



شکل ۴۱

برخی از مقادیر عددی $\sin t$ و $\cos t$ در جدول زیر آورده شده‌اند که اکثر آنها در مطالب بیان شده فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

t رادیان	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

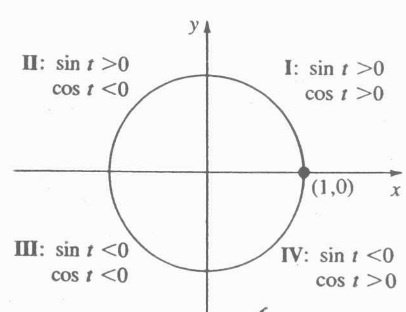
مقادیر توابع مثلثاتی دیگر را می‌توان از فرمول‌های تعریف کننده آنها و مقادیر sin و cos در جدول بالا به دست آورد.

مثال ۴۶. الف) $\tan\frac{\pi}{3} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

ب) $\sec\pi = \dfrac{1}{\cos\pi} = -1$

ج) $\cot 2\pi = \dfrac{\cos 2\pi}{\sin 2\pi}$ تعریف نشده است زیرا $\sin 2\pi = 0$.

در شکل (۴۲) علامت‌های جبری $\sin t$ و $\cos t$ در چهار ناحیه از صفحه دکارتی نشان داده شده است. با توجه به این شکل، قادر هستیم که جدول بالا را برای دیگر زاویه‌ها مثلاً $\frac{7\pi}{6}$ رادیان، $\frac{5\pi}{3}$ رادیان، $\frac{7\pi}{4}$ رادیان و به همین ترتیب به دست آوریم.



شکل ۴۲

۵۰. برخی از اتحادهای اساسی. چون زاویه‌های t و $t+2\pi$ هم پایانه (هم انتها) می‌باشند، مقادیر سینوس و کسینوس هر 2π رادیان تکرار می‌شود.

$$\sin t = \sin(t+2\pi), \qquad \cos t = \cos(t+2\pi) \tag{۷۳}$$

توابع $\sin t$ و $\cos t$، با توجه به (۷۳) را توابع تناوبی با دوره تناوب 2π گوییم. می‌توان ثابت کرد که $\tan t$ تناوبی با دوره تناوب π است.

$$\tan t = \tan(t+\pi) \qquad (۷۴)$$

علاوه بر آن توابع سینوس و کسینوس در اتحاد اساسی زیر صدق می‌کنند

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \qquad (۷۵)$$

که در آن $\cos^2 t = (\cos t)^2$ و $\sin^2 t = (\sin t)^2$ ، زیرا مختصات نقطه $(\cos t, \sin t)$ باید در معادله دایره واحد یعنی $x^2+y^2=1$ صدق کند. از تقسیم (۷۵) بر $\cos^2 t$ و $\sin^2 t$ داریم

$$1+\tan^2 t = \sec^2 t \qquad (۷۶)$$

$$1+\cot^2 t = \csc^2 t \qquad (۷۷)$$

اتحادهای دیگری برحسب توابع مثلثاتی وجود دارد. برخی از مهمترین این اتحادها در زیر لیست شده‌اند. بررسی درستی هر یک بسیار ساده است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

$$\sin(-t) = -\sin t \qquad (۷۸)$$

$$\cos(-t) = \cos t \qquad (۷۹)$$

$$\sin(t_1 \pm t_2) = \sin t_1 \cos t_2 \pm \cos t_1 \sin t_2 \qquad (۸۰)$$

$$\cos(t_1 \pm t_2) = \cos t_1 \cos t_2 \mp \sin t_1 \sin t_2 \qquad (۸۱)$$

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t \qquad (۸۲)$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t \qquad (۸۳)$$

$$\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos t) \qquad (۸۴)$$

$$\cos^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos t) \qquad (۸۵)$$

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t) \qquad (۸۶)$$

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t) \qquad (۸۷)$$

توابع سینوس و کسینوس، توابعی تعریف شده در صفحه دکارتی اند. برای هر زاویه t تنها یک مقدار برای $\sin t$ و یک مقدار برای $\cos t$ وجود دارد. چون طول قوس

روی محیط دایره‌ای به شعاع r با زاویه مرکزی t طبق رابطه $s=rt$ قابل تبدیل هستند که در آن t برحسب رادیان اندازه گیری می شود، پس روی دایره واحد داریم

$$s=t$$

به عبارت دیگر، برای هر عدد حقیقی s زاویه ای وجود دارد که اندازه آن s رادیان است. بنابراین توابع سینوس و کسینوس دارای دامنه مشترک $\mathbb{R}$ می باشند. برای مثال، وقتی می نویسیم $\sin 2$ به معنای $\sin$ (2 رادیان) است نه $\sin 2^{\circ}$.

حال با استفاده از نمادهای معمولی برای متغیرهای مستقل و وابسته یعنی x و y داریم

$$y=\sin x, \qquad y=\cos x.$$

دامنه و برد یک هریک از توابع مثلثاتی در شکل (۴۳) نمایش داده شده‌اند، در شکل (۴۳) به وضوح مفهوم متناوب بودن توابع مثلثاتی دیده می شود. برای مثال قسمتی از نمودار $y=\sin x$ روی فاصله $[0, 2\pi]$ در هر طول به اندازه 2π تکرار شده است، همچنین توابع سینوس و کسینوس دارای ارتفاع 1 هستند زیرا ماکزیمم فاصله یک نقطه روی نمودارهای $y=\sin x$ و $y=\cos x$ از محور xها برابر یک واحد است.

در حالت کلی توابع

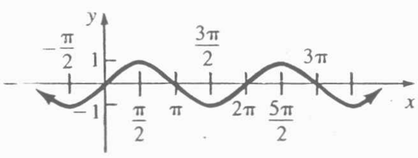
$$y=A\sin kx \qquad k>0$$

$$y=A\cos kx \qquad k>0$$

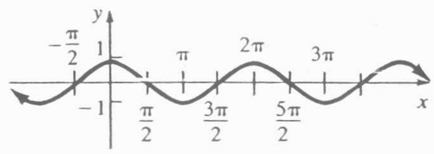
دارای ارتفاع $|A|$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{k}$ هستند.

باید توجه کرد که چهار تابع مثلثاتی تانژانت، کتانژانت، سکانت و کسکانت دارای ارتفاع محدود نمی باشند. در زیر نمایش هریک از شش تابع مثلثاتی، اطلاعات لازم آورده شده است. به عنوان مثال، در زیر نمایش تابع تانژانت، دامنه تعریف اعداد حقیقی بجز $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ برای $n\in\mathbb{Z}$ و برد $\mathbb{R}$

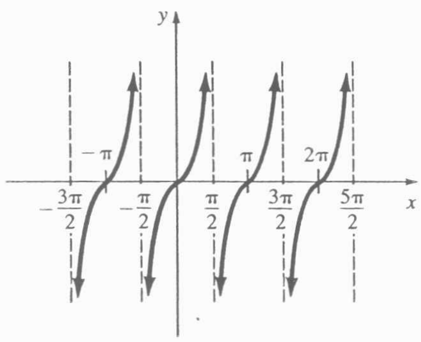
آمده است.



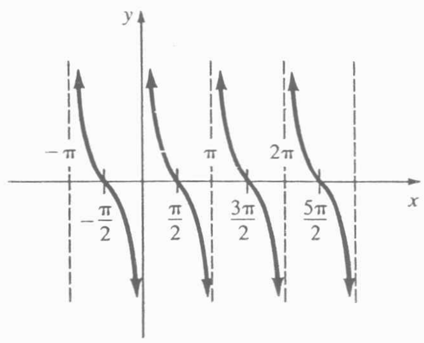
$y = \sin x$
دامنه $: R$
برد $: -1 \le y \le 1$



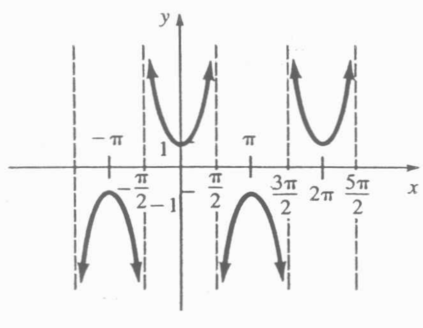
$y = \cos x$
دامنه $: R$
برد $: -1 \le y \le 1$



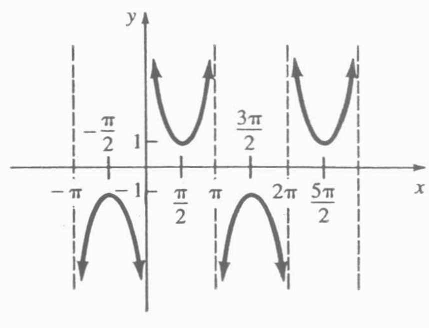
$y = \tan x$
دامنه $: x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$
برد $: R$



$y = \cot x$
دامنه $: x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$
برد $: R$



$y = \sec x$
دامنه $: x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$
برد $: y \ge 1, y \le -1$

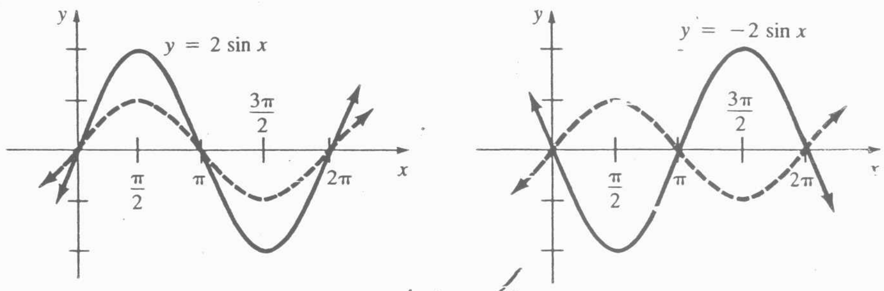


$y = \csc x$
دامنه $: x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$
برد $: y \ge 1, y \le -1$

شکل (۴۳)

مثال ۴۷. نمودارهای $y=2\sin x$ و $y=-2\sin x$ را با هم مقایسه کنید.

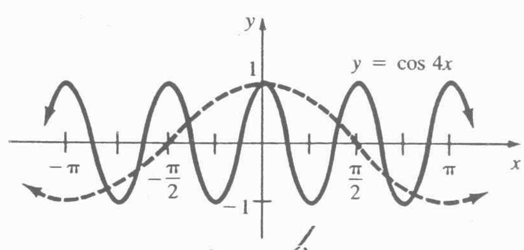
حل. در هر یک از این دو تابع ارتفاع برابر 2 و دوره تناوب 2π است. برای مقایسه، در شکل (۴۴) نمودار $y=\sin x$ را با خطچین نمایش داده ایم. البته نمودار $y=-2\sin x$ انعکاس نمودار $y=2\sin x$ نسبت به محور xها است.



شکل ۴۴

مثال ۴۸. نمودار $y=\cos 4x$ را رسم کنید.

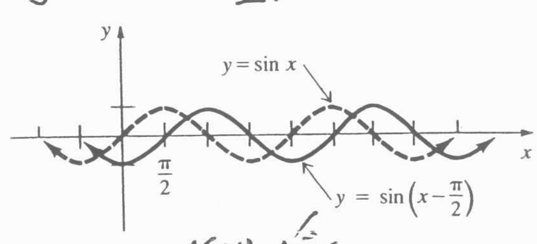
حل. ارتفاع تابع برابر ۱ و دوره تناوب آن $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ است. برای مقایسه نمودار $y=\cos x$ با خط چین در شکل (۴۵) نمایش داده شده است.



شکل ۴۵

مثال ۴۹. نمودار $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ را رسم کنید.

حل. از بحث انتقال نمودارها در (۴۵)، نمودار $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ همان نمودار $y=\sin x$ انتقال یافته به راست به اندازه $\frac{\pi}{2}$ واحد است. در شکل (۴۶) نمودار $y=\sin x$ با خط چین و نمودار $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})=-\cos x$ با خط ممتد نمایش داده شده است.



شکل (۴۶)

مثال ۵۰. فرض کنید $f(x)=\sin x$ و $g(x)=x^2$. مطلوب است fg، f/g، fog و gof.

حل. از تعاریف (۴۳) و (۴۴) داریم

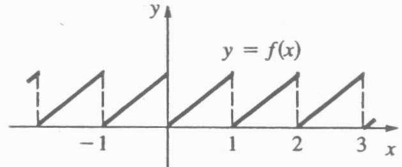
$$(fg)(x)=f(x)g(x)=x^2\sin x$$

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin x}{x^2}$$
$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \sin x^2$$
$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$$

توضیح ۵۱. الف) در برخی از قسمتهای قبل از نماد $\sin^2 x$ برای $(\sin x)^2$ استفاده کردیم. به عنوان یک قاعده، توان های صحیح مثبت توابع مثلثاتی را بدون پرانتز می‌نویسیم. برای مثال، $\tan^5 x$ و $\cos^3 x$ همان $(\tan x)^5$ و $(\cos x)^3$ می‌باشند. باید دقت کرد که عباراتی مانند $\sec^2 x$ و $\cot^6 x$ با $\sec x^2$ و $\cot x^6$ یکی نمی‌باشند.

ب) توابع چندجمله‌ای، توابع گویا و توابع توانی $y = kx^n$ که در آن n عددی گویا است، متعلق به کلاسی به نام توابع جبری اند. یک تابع جبری شامل تعدادی متناهی جمع، تفاضل، ضرب، خارج قسمت و ریشه‌های چندجمله‌ای ها است. برای مثال $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2+5}}$ یک تابع جبری است. شش تابع مثلثاتی مطرح شده در این بخش متعلق به کلاس دیگری است که آن را کلاس توابع متعالی نامیم. یک تابع متعالی، تابعی جبری نیست. در فصل های بعد با توابع متعالی دیگری آشنا خواهیم شد.

ج) دیدیم که هر کدام از توابع مثلثاتی متناوبی اند. در حالت کلی، تابع f متناوب است هرگاه عدد مثبت p وجود داشته باشد به طوری که برای هر x در دامنه تعریف f، $f(x+p) = f(x)$. اگر p کوچکترین عدد مثبت باشد که $f(x+p) = f(x)$ آنگاه p را دوره تناوب تابع f نامیم. تابع نمایش داده شده در شکل (۴۷) یک تابع تناوبی با دوره تناوب یک است.



شکل ۴۷