۶.۲ انتگرال

۱.۶.۲ افرازها و توابع پله‌ای

تعریف ۵۲ . فرض کنید a و b دو عدد حقیقی و $b \geq a$ است. افراز P از فاصله $[a,b]$ مجموعه اکیداً صعودی متناهی مانند $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ است که در آن n یک عدد صحیح نامنفی و $x_0 = a$ و $x_n = b$ می‌باشد. برای افراز $P=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ اعداد $x_0, x_1, \ldots, x_n$ را نقاط افراز P نامیم.

اگر P و Q دو افراز $[a,b]$ باشند، گوییم Q یک تظریف P است هرگاه هر نقطه P نقطه‌ای از Q باشد، یعنی $P \subset Q$. برای دو افراز P و Q از $[a,b]$، تظریف مشترک P و Q افرازی از $[a,b]$ است که شامل نقاط P و Q یا هر دو باشد، یعنی $R = P \cup Q$ تظریف مشترک P و Q است.

لزوماً فواصل (x_{k-1}, x_k) از افراز $P=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ دارای طول یکسانی نمی‌باشند. اما اگر چنین باشد، گوییم افراز منظم است.

تعریف ۵۳. برای $a<b$ و عدد طبیعی n داده شده، یک n-افراز منظم از $[a,b]$ افراز $P=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ است که در آن برای هر $k=1,2,\ldots,n$ داشته باشیم

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n} \qquad k=0,1,\ldots,n \qquad (۸۸)$$

در این حالت، طول هر زیرفاصله (x_{k-1}, x_k) برابر $\frac{b-a}{n}$ است.

تعریف ۵۴.

برای افراز $P=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ از فاصله $[a,b]$، گاهی اوقات توجه به بزرگترین طول فواصل (x_{k-1}, x_k) برای هر $k=0,\ldots,n$ مهم است. این عدد را نُرم افراز P نامیده و با $\|P\|$ نمایش می‌دهیم.

توجه کنید اگر P یک n-افراز منظم از $[a,b]$ باشد آن گاه

$$\|P\| = \frac{b-a}{n} \qquad (۸۹)$$

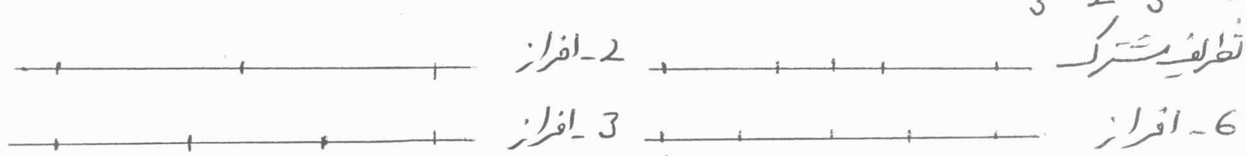
تعریف ۵۵. فرض کنید $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ افرازی از $[a,b]$ است و تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی هر فاصله باز (x_{k-1},x_k) برای $k=1,2,\dots,n$ تابع ثابت است یعنی

$$f(x)=\alpha_k \qquad x_{k-1}<x<x_k\,,\quad k=1,\dots,n \qquad (۹۰)$$

در این صورت گوییم یک تابع پله‌ای یا یک تابع قطعه قطعه ثابت روی $[a,b]$ است.
توجه کنید که تابع پله‌ای f درون افراز $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$، در نقاط $x_0,x_1,\dots,x_n$ می‌تواند هر مقداری را بپذیرد و لازم نیست همان α_k باشد.

حال فرض کنید $S\subset\mathbb{R}$ و $f:S\to\mathbb{R}$ تابعی است که روی فاصله‌ای مانند $[a,b]$ مشمول در S پله‌ای باشد یعنی افرازی مانند P از $[a,b]$ وجود دارد به طوری که f درون افراز P پله‌ای است و علاوه بر آن برای هر $x\in S\setminus[a,b]$ مقدار تابع f صفر باشد. در این صورت گوییم f روی S پله‌ای است. حال اگر f تابعی پله‌ای روی $\mathbb{R}$ باشد به طور ساده گوییم f تابع پله‌ای است.

مثال ۵۱. یک 3-افراز منظم از $[0,1]$ ظریف یک 2-افراز منظم نمی‌باشد. 6-افراز منظم از $[0,1]$ ظریف هر 2-افراز منظم و 3-افراز منظم از $[0,1]$ است، اما یک ظریف مشترک نمی‌باشد. ظریف مشترک 2-افراز منظم و 3-افراز منظم، افراز $P=(0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1)$ است.



شکل ۴۸

مثال ۵۲. فرض کنید n عددی طبیعی و P و Q به ترتیب 2^n-افراز منظم و 2^{n+1}-افراز منظم از فاصله $[a,b]$ باشند، آن‌گاه Q تظریف P است و $\|Q\| = \frac{1}{2}\|P\|$.

مثال ۵۳. تابع $f:[-3,\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده است

$$f(x) = \begin{cases} 3 & -3 \leq x < -1 \\ -2 & -1 < x \leq 1 \\ 2 & 1 < x < 2 \\ 4 & 2 \leq x < 5 \\ 1 & 5 < x < 7 \\ 0 & 7 \leq x \\ 4 & x = -1 \\ -1 & x = 5 \end{cases}$$

چون f درون افراز $P=(-3,-1,1,2,5,7)$ از $[-3,7]$ پله‌ای است و خارج از این فاصله صفر می‌باشد، پس f یک تابع پله‌ای روی $[-3,\infty]$ است.

مثال ۵۴. در این مثال به حالت کلی یک تابع پله‌ای که دامنه آن فاصله $[a,b]$ است، نگاه می‌کنیم. از تعریف (۵۵) زیرفاصله $[c,d]$ از $[a,b]$ و افراز $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ از $[c,d]$ را انتخاب می‌کنیم به طوری که f درون P پله‌ای بوده و برای هر $x\in[a,b]\setminus[c,d]$ داشته باشیم $f(x)=0$. حال نتیجه می‌شود که f روی افراز $Q=(a,x_0,x_1,\dots,x_n,b)$ از فاصله $[a,b]$ پله‌ای است.

۲.۶.۲ انتگرال توابع پله‌ای

تعریف ۵۶. فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی افراز P از $[a,b]$ که در آن

$P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ پله‌ای است. جمع تابع پله‌ای f روی افراز P را با $\Sigma(P,f)$ نمایش داده و توسط

$$\Sigma(P,f)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,(x_i-x_{i-1}) \qquad (۹۱)$$

تعریف می‌شود، که در آن برای هر $i=1,2,\dots,n$ عدد α_i مقدار ثابت f روی زیرفاصله (x_{i-1},x_i) است.

توجه کنید که در حالت $a=b$ باید $n=0$ باشد و چون $\Sigma(P,f)$ جمله‌ای ندارد باید داشته باشیم $\Sigma(P,f)=0$.

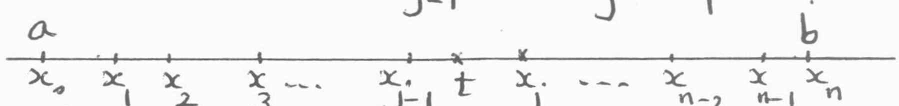
لم ۵۷.۱. فرض کنید تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی افراز P از $[a,b]$ پله‌ای است. فرض کنید Q تظریف P با اضافه کردن یک نقطه t به افراز P به دست آمده است، آنگاه

$$\Sigma(P,f)=\Sigma(Q,f). \qquad (۹۲)$$

اثبات. فرض کنید $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ و برای هر $i=1,2,\dots,n$

$$f(x)=\alpha_i,\qquad x_{i-1}<x<x_i$$

t را چنان انتخاب می‌کنیم که $x_{j-1}<t<x_j$.



چون تمام جملات در مجموع $\Sigma(Q,f)$ همان جملات متناظر در مجموع $\Sigma(P,f)$ است بجز جملات مربوط به فاصله (x_{j-1},x_j). بنابراین

$$\begin{aligned}\Sigma(Q,f)-\Sigma(P,f)&=\alpha_j(t-x_{j-1})+\alpha_j(x_j-t)-\alpha_j(x_j-x_{j-1})\\&=\alpha_j t-\alpha_j x_{j-1}+\alpha_j x_j-\alpha_j t-\alpha_j x_j+\alpha_j x_{j-1}\\&=0\end{aligned}$$

پس $\Sigma(Q,f)=\Sigma(P,f)$.

لم ۵۸. فرض کنید تابع $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ روی افراز P از $[a,b]$ پله‌ای بوده و Q یک تظریف P است. آن‌گاه $\sum(P,f)=\sum(Q,f)$.

اثبات. چون Q از اضافه کردن یک نقطه جدید متوالیاً به P به تعداد متناهی دفعه حاصل می‌شود، حکم از لم (۵۷) نتیجه می‌شود.

قضیه ۵۹. فرض کنید P و Q افرازهایی از $[a,b]$ است و $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی هر دو افراز P و Q پله‌ای است. آن‌گاه

$$\sum(P,f)=\sum(Q,f)$$

اثبات. فرض کنید R تظریف مشترک P و Q است. از لم (۵۸) داریم

$$\sum(P,f)=\sum(R,f)=\sum(Q,f)$$

با توجه به قضیه (۵۹)، تعریف زیر برای انتگرال یک تابع پله‌ای را می‌توان بیان کرد.

تعریف ۶۰. فرض کنید f تابعی پله‌ای روی فاصله $[a,b]$ است. انتگرال f روی $[a,b]$ که با نماد $\int_a^b f$ نمایش می‌دهیم برابر با $\sum(P,f)$ تعریف می‌کنیم که در آن P افراز دلخواهی از $[a,b]$ است و f روی P پله‌ای می‌باشد. نماد دیگری که برای $\int_a^b f$ می‌توان به کار برد $\int_a^b f(x)dx$ است.

بنابراین انتگرال یک تابع پله‌ای روی $[a,b]$ همواره وجود دارد و توسط یک جمع تعریف می‌گردد. در زیر برخی از خواص انتگرال توابع پله‌ای را طرح کرده و ثابت می‌کنیم.

قضیه ۶۱. خطی بودن انتگرال توابع پله‌ای. فرض کنید f و g توابعی پله‌ای بر فاصله $[a,b]$ است و c عدد حقیقی ثابتی باشد. در این صورت

الف) $f+g$ روی $[a,b]$ تابعی پله‌ای است و $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$.

ب) cf روی $[a,b]$ تابعی پله‌ای است و $\int_a^b cf = c\int_a^b f$.

اثبات. الف) چون f و g روی $[a,b]$ پله‌ای اند پس افرازهای P و Q از $[a,b]$ وجود دارند به طوری که f روی P و g روی Q پله‌ای اند. R را تظریف مشترک P و Q تعریف می‌کنیم. پس f و g هر دو روی R پله‌ای اند. فرض کنید $R=(x_0, x_1, \dots, x_n)$ و برای هر $i=1,2,\dots,n$

$$f(x)=\alpha_i \qquad x_{i-1}<x<x_i \tag{۹۳}$$
$$g(x)=\beta_i \qquad x_{i-1}<x<x_i$$

در نتیجه $f+g$ روی هر زیرفاصله (x_{i-1}, x_i) مقدار ثابت $\alpha_i+\beta_i$ را می‌پذیرد. پس $f+g$ روی R پله‌ای است و

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g) &= \sum(R, f+g)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)(x_i-x_{i-1})\\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i-x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n}\beta_i(x_i-x_{i-1})\\
&= \sum(R,f)+\sum(R,g)\\
&= \int_a^b f + \int_a^b g.
\end{aligned}$$

اثبات قسمت (ب) مشابه است.

قضیه ۹۲. نامنفی بودن انتگرال توابع پله‌ای. اگر f تابع پله‌ای نامنفی روی $[a,b]$ باشد آن‌گاه $\int_a^b f \geq 0$.

تابع f نامنفی است، اگر برای هر x در دامنه تعریفش، $f(x)\geq 0$. در واقع، در حالت کلی‌تر قضیه (۹۲) بیان می‌کند که: برای دو تابع پله‌ای f و g روی $[a,b]$ با شرط $f\leq g$ داریم $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

اثبات. فرض کنید f و g توابع پله‌ای روی $[a,b]$ بوده و برای هر $x\in[a,b]$

$$f(x)\leq g(x)$$

مشابه اثبات قضیه (۶۱) افراز $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ از $[a,b]$ را چنان انتخاب می‌کنیم که هر دو تابع f و g درون P پله‌ای است و برای هر $i=1,2,\dots,n$ مقادیر f و g روی (x_{i-1},x_i) به ترتیب α_i و β_i است. پس

$$\alpha_i \leq \beta_i \qquad i=1,2,\dots,n$$

پس

$$\alpha_i(x_i-x_{i-1}) \leq \beta_i(x_i-x_{i-1}) \qquad i=1,2,\dots,n$$

بنابراین

$$\sum(P,f) \leq \sum(P,g)$$

یعنی $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

قضیه ۶۳. جمع پذیری انتگرال توابع پله‌ای. فرض کنید $a \leq b \leq c$ و f تابعی پله‌ای روی $[a,c]$ است. در این صورت تحدید f به $[a,b]$ و $[b,c]$ نیز پله‌ای روی $[a,b]$ و $[b,c]$ به ترتیب است و

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

اثبات. با توجه به توضیحات بیان شده در انتهای تعریف (۵۶) داریم

$$\int_a^a f = \int_b^b f = \int_c^c f = 0$$

بنابراین اگر $a=b$ یا $c=b$ باشد حکم واضح است. پس فرض کنید $a<b<c$. افراز P از $[a,c]$ را چنان انتخاب می‌کنیم که f درون P پله‌ای باشد و در صورت لزوم با اضافه کردن b به این نقاط تظریف P را بدست می‌آوریم. پس می‌توان فرض کرد که P افراز $(x_0,x_1,\dots,x_k,\dots,x_n)$ است و $x_k=b$. دو مجموعه نقاط $P_1=(x_0,\dots,x_k)$ و $P_2=(x_k,\dots,x_n)$ را در نظر بگیرید. P_1 افرازی از $[a,b]$ و P_2 افرازی از $[b,c]$ است و تحدید f به $[a,b]$ و $[b,c]$، به وضوح درون P_1 و P_2 پله‌ای اند. حال با توجه به رابطهٔ $\sum(P,f)=\sum(P_1,f)+\sum(P_2,f)$ حکم حاصل می‌شود.

۲.۶.۲ توسیع برخی از نمادگذاری‌ها

الف) فرض کنید f تابعی پله‌ای روی $[a,b]$ است که در آن $a<b$. تصمیم (۹۳) را می‌توان برای مشخص کردن مفهوم $\int_b^a f(x)dx$ به کار برد. داریم

$$\int_a^b f + \int_b^a f = \int_a^a f = 0$$

پس

$$\int_b^a f = -\int_a^b f. \tag{۹۴}$$

ب) اگر a، b و c اعدادی حقیقی بوده و f تابعی پله‌ای بر فاصله‌ای که از کمترین مقدار تا بزرگترین مقدار بین a، b و c تغییر می‌کند، باشد آنگاه

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \tag{۹۵}$$

ج) فرض کنید f بر $[a,b]$ تابع ثابت $f(x)=c$ است. در این صورت

$$\int_a^b f = c(b-a). \tag{۹۶}$$

د) فرض کنید f تابعی پله‌ای بر $[a,b]$ و صفر برای هر $x\in\mathbb{R}\setminus[a,b]$ است، که در آن $[a,b]$ فاصله‌ای معین و داده شده است و $[c,d]$ فاصله‌ای شامل فاصله $[a,b]$ باشد. با انتخاب افراز $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ از $[a,b]$ به طوری که f درون P پله‌ای باشد و با تعریف افراز $Q=(c,x_0,x_1,\dots,x_n,d)$ از $[c,d]$ داریم

$$\int_a^b f = \sum(P,f) = \sum(Q,f) = \int_c^d f$$

پس اگر f تابعی پله‌ای روی $[a,b]$ بوده و $[a,b]\subset[c,d]$ و

$$f(x)=0 \qquad x\in\mathbb{R}\setminus[a,b]$$

آنگاه $\int_a^b f = \int_c^d f$ و به این ترتیب می‌توان تعریفی برای انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} f$ ارائه داد. به طور ساده تعریف می‌کنیم $\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_a^b f$ گرچه این انتگرال ممکن است ناسره باشد.

۴.۶.۲ توسیع انتگرال تابع پله‌ای f بر زیرمجموعه A از $\mathbb{R}$.

در این بخش، انتگرال‌هایی به صورت

$$\int_A f(x)\,dx \qquad (۹۷)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن f تابعی پله‌ای و A زیرمجموعه‌ای خاص از $\mathbb{R}$ است. اگر A به صورت فاصله $[a,b]$ باشد آن‌گاه مفهوم انتگرال (۹۷) واضح است. در این حالت داریم

$$\int_A f = \int_a^b f \qquad (۹۸)$$

توسیع طبیعی این ایده به مجموعه‌های Aیی است که می‌توان آن‌ها را به صورت اجتماع تعدادی متناهی از فواصل نوشت. برای این منظور، ابتدا مفهوم یک مجموعه مقدماتی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۶۴. تابع مشخصه. فرض کنید $A\subset \mathbb{R}$. تابع مشخصه A که با χ_A نمایش داده می‌شود تابعی از $\mathbb{R}$ بتوی $\mathbb{R}$ تعریف شده توسط

$$\chi_A(x)=\begin{cases}0 & x\in \mathbb{R}\setminus A=A^c\\ 1 & x\in A\end{cases} \qquad (۹۹)$$

است.

تعریف ۶۵. مجموعه مقدماتی. زیرمجموعه کراندار E از اعداد حقیقی را یک مجموعه مقدماتی نامیم، هرگاه χ_E تابعی پله‌ای باشد.

توضیح ۶۶. توجه کنید که χ_ϕ تابع ثابت صفر است. پس ϕ یک مجموعه مقدماتی است. اگر E مجموعه‌ای کراندار با کران پایین a و کران بالای b باشد، شرط مقدماتی بودن E به شرط ساده‌تر زیر تبدیل می‌شود:

"χ_E تحدید شده به $[a,b]$ تابعی پله‌ای روی $[a,b]$ باشد"

قبل از بیان و شرح مجموعه‌های مقدماتی، به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۵۵. فرض کنید

$$E=[0,1)\cup(1,2)\cup[3,4]\cup\{5\}\cup(6,7]\cup[8,9)$$

اگر افراز P به صورت $P=(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ از فاصله $[0,9]$ باشد آنگاه χ_E درون P پله‌ای است، زیرا

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1 & 0=x\\ 1 & 0<x<1\\ 1 & 1<x<2\\ 0 & 2<x<3\\ 1 & 3<x<4\\ 0 & 4<x<5\\ 0 & 5<x<6\\ 1 & 6<x<7\\ 0 & 7<x<8\\ 1 & 8<x<9\\ 0 & x=1,2,6,9\\ 1 & x=3,4,5,7,8\end{cases}$$

بنابراین E مجموعه‌ای مقدماتی است.

مثال ۵۶. فرض کنید $E=[0,1]\setminus\{\frac{1}{m} : m\in\mathbb{Z}^+\}$. آنگاه برای هر افراز $(x_0,x_1,\dots,x_n)$ از $[0,1]$ تابع χ_E نمی‌تواند روی زیرفاصله (x_0,x_1) ثابت باشد پس E یک مجموعه مقدماتی نیست.

مثال ۵۷. فرض کنید $E=[0,1]\cap\mathbb{Q}$. مشابه مثال (۵۶)، E یک مجموعه

مقدماتی نیست .

مثال ۵۸ . فرض کنید $E=[0,1]\cup[2,\infty)$ است ، چون E کراندار نیست پس یک مجموعه مقدماتی نمی باشد ، در واقع فاصله کرانداری خارج از مجموعه E وجود ندارد که χ_E روی آن صفر شود .

قضیه ۴۷ . الف) هر فاصله کراندار یک مجموعه مقدماتی است .

ب) اشتراک دو مجموعه مقدماتی ، یک مجموعه مقدماتی است .

ج) اجتماع دو مجموعه مقدماتی ، مجموعه ای مقدماتی است .

د) تفاضل دو مجموعه مقدماتی ، مجموعه ای مقدماتی است .

هـ) مجموعه E مقدماتی است اگر و تنها اگر E اجتماع تعدادی متناهی فواصل کراندار باشد .

اثبات . (الف) واضح است .

ب) فرض کنید A و B مجموعه های مقدماتی اند ، پس χ_A و χ_B توابع پله ای اند حال داریم

$$\chi_{A\cap B}=\chi_A\cdot\chi_B \tag{۱۰۰}$$

و چون ضرب دو تابع پله ای ، باید پله ای باشد پس مجموعه $A\cap B$ مقدماتی است .

ج) برای دو مجموعه مقدماتی A و B ، توابع χ_A و χ_B پله ای اند ، از طرفی

$$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B \tag{۱۰۱}$$

تابعی پله ای است پس $A\cup B$ مقدماتی است .

د) فرض کنید A و B مجموعه های مقدماتی اند ، از پله ای بودن χ_A و χ_B و عبارت

$$\chi_{A\sim B}=\chi_A-\chi_A\chi_B \tag{۱۰۲}$$

نتیجه می شود که $\chi_{A\sim B}$ پله ای است پس $A\sim B$ مقدماتی است .

هـ) طبق (الف)، هر فاصله کراندار مجموعه‌ای مقدماتی است و از (ج) نتیجه می‌شود که اجتماع تعدادی متناهی فاصله کراندار یک مجموعه مقدماتی است.

برعکس، فرض کنید E یک مجموعه مقدماتی است. از تعریف (۹۵) نتیجه می‌شود که E باید کراندار باشد. فرض کنید a کران پایین E و b کران بالای E است.

چون χ_E یک تابع پله‌ای است، پس افراز $P=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ از $[a,b]$ را اختیار می‌کنیم به طوری که χ_E درون P پله‌ای باشد. پس E اجتماع برخی (احتمالاً هیچ یک) از فواصل (x_{i-1}, x_i) و برخی (یا احتمالاً هیچ یک) از نقاط P است یعنی E اجتماع تعدادی متناهی فاصله کراندار است.

تعریف ۹۸. انتگرال یک تابع پله‌ای روی مجموعه مقدماتی. فرض کنید f تابعی پله‌ای و E یک مجموعه مقدماتی است. انتگرال f روی E که با $\int_E f$ نمایش داده می‌شود به صورت

$$\int_E f = \int_{-\infty}^{\infty} f\chi_E \qquad (۱۰۳)$$

تعریف می‌شود. تابع $f\chi_E$ مقدار $f(x)$ را برای $x\in E$ و مقدار صفر را برای $x\in \mathbb{R}\sim E$ می‌پذیرد.

قضیه ۹۹. جمع پذیری. فرض کنید f تابعی پله‌ای و E و F مجموعه‌های مقدماتی مجزا اند. در این صورت

$$\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f \qquad (۱۰۴)$$

اثبات. با توجه به

$$f\chi_{E\cup F} = f\chi_E + f\chi_F$$

داریم

$$\int_{E\cup F} f = \int_{-\infty}^{\infty} f\chi_{E\cup F} = \int_{-\infty}^{\infty} (f\chi_E + f\chi_F) = \int_{-\infty}^{\infty} f\chi_E + \int_{-\infty}^{\infty} f\chi_F = \int_E f + \int_F f$$

قضیه ۷۰. فرض کنید $E=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ یک مجموعه متناهی و f تابعی پله‌ای است. دراین صورت $\int_E f = 0$.

اثبات. داریم

$$E=\{a_1\}\cup\{a_2\}\cup\dots\cup\{a_n\}$$

که درآن a_i ها متمایزند، طبق قضیه (۶۹) داریم

$$\int_E f=\int_{-\infty}^{\infty} f\chi_E=\int_{-\infty}^{\infty} f\chi_{\{a_1\}}+\int_{-\infty}^{\infty} f\chi_{\{a_2\}}+\dots+\int_{-\infty}^{\infty} f\chi_{\{a_n\}}$$
$$=\int_{\{a_1\}} f+\int_{\{a_2\}} f+\dots+\int_{\{a_n\}} f$$
$$=\int_{a_1}^{a_1} f+\int_{a_2}^{a_2} f+\dots+\int_{a_n}^{a_n} f=0$$

مفهوم طبیعی اندازه فاصله کراندار (a,b)، طول فاصله یعنی $b-a$ است.

$$I=(a,b)\ \Rightarrow\ \ell(I)=b-a \qquad (۱۰۸)$$

به وضوح اندازه فاصله های $[a,b]$، $(a,b]$ و $[a,b)$ نیز $b-a$ است. اگر E یک مجموعه مقدماتی باشد، طبق قضیه (۶۷) قسمت (ه)، E به صورت اجتماع تعدادی متناهی فاصله کراندار نوشته می‌شود. می‌توان این فاصله های کراندار را چنان مرتب کرد که فصل مشترک آنها تنها نقاط مرزی فاصله ها (احتمالاً) باشد. دراین صورت اندازه مجموعه E برابر با جمع طول های فواصل کراندار است. می‌توان از تعریف مقدماتی بودن مجموعه E و پله‌ای بودن تابع مشخصه χ_E نیز استفاده کرد. برای روشن‌تر شدن بحث به مثال های زیر توجه کنید.

مثال ۵۹. فرض کنید $a<b$ و E هر یک از چهار فاصله (a,b) یا $[a,b)$ یا $(a,b]$ یا $[a,b]$ است. اگر اندازه E را با $m(E)$ نمایش دهیم، دراین صورت

$$m(E)=\ell(I)=b-a.$$

مثال ۶۰. فرض کنید

$$E=(-1,0)\cup[1,3)\cup(4,9]\cup\{10\}$$

در این صورت E یک مجموعه مقدماتی است، زیرا اجتماع تعداد متناهی فاصله کراندار است. مفهوم طبیعی طول یا اندازه E که با $m(E)$ نمایش می‌دهیم به صورت

$$m(E)=(0-(-1))+(3-1)+(9-4)+0=8$$

است.

مثال ۶۱. مجموعه E در مثال (۶۰) را در نظر بگیرید. تابع مشخصه χ_E را بر $\mathbb{R}$ به صورت زیر داریم

$$\chi_E(x)=\begin{cases}0 & x\le -1\\ 1 & -1<x<0\\ 0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x<3\\ 0 & 3\le x\le 4\\ 1 & 4<x\le 9\\ 0 & 9<x<10\\ 1 & x=10\\ 0 & 10<x\end{cases}$$

در این صورت $m(E)=\int_E 1$ یا

$$\begin{aligned}m(E)&=\int_E 1=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_E=\int_{-1}^{10}\chi_E\\&=\int_{-1}^{1}1+\int_1^3 1+\int_4^9 1+\int_{10}^{10}1\\&=\sum_{i=1}^{6}1(x_i-x_{i-1})=1(0-(-1))+1(3-1)+1(9-4)\\&=8\end{aligned}$$

باتوجه به مثال های بیان شده، تفکر اندازه یک مجموعه مقدماتی E به صورت زیر خواهد بود.

تعریف ۷۱. فرض کنید E یک مجموعه مقدماتی است. اندازه E که با $m(E)$ نشان می دهیم، توسط

$$m(E)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_E=\int_E 1 \qquad (۱۰۶)$$

تعریف می شود.

قضیه ۷۲. فرض کنید A و B مجموعه های مقدماتی اند.

الف) $m(A)\geq 0$ و اگر A تهی باشد آن گاه $m(A)=0$.

ب) $m(A\cup B)\leq m(A)+m(B)$

ج) اگر A و B متقابلاً مجزا باشند آن گاه $m(A\cup B)=m(A)+m(B)$.

د) اگر $B\subset A$ آن گاه $m(A\setminus B)=m(A)-m(B)$.

هـ) اگر $B\subset A$ آن گاه $m(B)\leq m(A)$.

اثبات. الف) واضح است.

ب) چون $\chi_{A\cup B}\leq \chi_A+\chi_B$، از نامنفی بودن و خاصیت خطی انتگرال توابع پله ای داریم

$$\begin{aligned} m(A\cup B) &= \int_{-\infty}^{\infty}\chi_{A\cup B} \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty}(\chi_A+\chi_B) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\chi_A+\int_{-\infty}^{\infty}\chi_B = m(A)+m(B) \end{aligned}$$

ج) چون $A\cap B=\emptyset$ پس $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B$ و حکم مشابه (ب) به دست می آید.

د) اگر $B \subset A$ آنگاه $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_B$ پس

$$\begin{aligned} m(A\setminus B) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{A\setminus B} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\chi_A - \chi_B) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_A - \int_{-\infty}^{\infty} \chi_B \\ &= m(A) - m(B) \end{aligned}$$

ه) اگر $B \subset A$ آنگاه $A = B \cup (A\setminus B)$ و B با $A\setminus B$ اشتراکی ندارد. پس طبق قسمت (ج،) و (الف)

$$\begin{aligned} m(A) &= m(B) + m(A\setminus B) \\ &\geq m(B) + 0 \\ &= m(B) \end{aligned}$$

تعریف ۷۳. زیرمجموعه E از اعداد حقیقی را بسته نامیم، هرگاه یا E تناهی باشد یا E نامتناهی شامل نقاط مرزی خود باشد. مجموعه F را باز گوییم هرگاه F^c بسته باشد.

در قضیه بعد، مجموعه مقدماتی E از اعداد حقیقی توسط دو مجموعه کلی بسته از داخل و یکی باز از خارج تقریب زده می شود.

قضیه ۷۴. فرض کنید E یک مجموعه مقدماتی است.

الف) برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده، مجموعه مقدماتی بسته H و مجموعه مقدماتی باز U وجود دارند به طوری که $H \subset E \subset U$ و $m(U\setminus H) < \varepsilon$.

ب) برای $\varepsilon > 0$ داده شده، مجموعه مقدماتی بسته H و مجموعه مقدماتی باز U وجود دارند به طوری که $H \subset E \subset U$ و $m(H) > m(E) - \varepsilon$، $m(U) < m(E) + \varepsilon$.

اثبات. الف) نخست حالتی را در نظر می‌گیریم که E یک فاصله کراندار به صورت (a,b) است. برای $\varepsilon>0$ داده شده، اعداد s و t را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$a<s<t<b$$

و $t>b-\frac{\varepsilon}{2}$ و $s<a+\frac{\varepsilon}{2}$ است. قرار می‌دهیم $H=[s,t]$ و $U=(a,b)$. در نتیجه $H\subset E\subset U$ و

$$\begin{aligned} m(U\setminus H) &= m([a,s)\cup(t,b]) \\ &= m([a,s))+m((t,b]) \\ &= s-a+b-t<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \end{aligned}$$

حال حالتی را در نظر می‌گیریم که $E=\{a\}$ یک مجموعه تک نقطه‌ای است. برای $\varepsilon>0$ داده شده، اعداد s و t را چنان انتخاب می‌کنیم که $s<a<t$ و $t<a+\frac{\varepsilon}{2}$ و $s>a-\frac{\varepsilon}{2}$. قرار می‌دهیم $U=(s,t)$ و $H=\{a\}$. در نتیجه $H\subset E\subset U$ و

$$\begin{aligned} m(U\setminus H) &= m((s,a)\cup(a,t)) \\ &= m((s,a))+m((a,t)) \\ &= a-s+t-a<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \end{aligned}$$

حال اگر E یک مجموعه مقدماتی باشد آن‌گاه E اجتماع تعدادی متناهی فواصل باز کراندار و تعدادی متناهی مجموعه تک عضوی است. به عنوان مثال

$$E=(a_1,b_1)\cup\cdots\cup(a_n,b_n)\cup\{c_1\}\cup\cdots\cup\{c_m\}$$

برای هر (a_i,b_i) و $\varepsilon>0$ مجموعه‌های مقدماتی بسته H_i و باز مقدماتی U_i وجود دارد به طوری که

$$H_i\subset(a_i,b_i)\subset U_i \qquad i=1,\dots,n$$

و

$$m(U_i\setminus H_i)<\frac{\varepsilon}{2n}$$

همچنین برای هر $\{c_j\}$، مجموعه‌های مقدماتی بسته F_j و باز O_j برای $j=1,\dots,m$ وجود دارند به طوری که

$$F_j \subset \{c_j\} \subset O_j \quad , \qquad j=1,2,\dots,m$$

و

$$m(O_j \setminus F_j) < \frac{\varepsilon}{2m}$$

قرار می‌دهیم

$$U = U_1 \cup \dots \cup U_n \cup F_1 \cup \dots \cup F_m$$

و

$$H = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n \cup O_1 \cup \dots \cup O_m$$

پس

$$H \subset E \subset U$$

و با توجه به رابطه

$$U \setminus H = (U_1 \cup \dots \cup U_n \cup F_1 \cup \dots \cup F_m) \setminus (H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n \cup O_1 \cup \dots \cup O_m)$$
$$\subset (U_1 \setminus H_1) \cup (U_2 \setminus H_2) \cup \dots \cup (U_n \setminus H_n) \cup (F_1 \setminus O_1) \cup \dots \cup (F_m \setminus O_m)$$

داریم

$$m(U \setminus H) \le m(U_1 \setminus H_1) + \dots + m(U_n \setminus H_n) + m(F_1 \setminus O_1) + \dots + m(F_m \setminus O_m)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2n} + \dots + \frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2m} + \dots + \frac{\varepsilon}{2m}$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ب) فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده است. طبق (الف) مجموعه مقدماتی باز U و مجموعه بسته مقدماتی H وجود دارند به طوری که $H \subset E \subset U$ و $m(U \setminus H) < \varepsilon$.
چون $H \subset E \subset U$ پس $m(H) \le m(E) \le m(U)$ (طبق قضیه (۷۲) قسمت (ه))
و از قضیه (۷۲) قسمت (د)، چون $H \subset U$ داریم

$$m(U \setminus H) = m(U) - m(H)$$

پس $m(U) - m(H) < \varepsilon$ یعنی $m(H) > m(U) - \varepsilon$ و $m(U) < m(H) + \varepsilon$. با توجه به

$$m(H) \le m(E) \le m(U)$$

داریم

$$m(H) > m(U)-\varepsilon \geq m(E)-\varepsilon$$
$$m(U) < m(H)+\varepsilon \leq m(E)+\varepsilon$$

و حکم تمام است.

تعریف ۷۵. مجموعه مقدماتی E را منتظم گوییم هرگاه در شرط (ب) قضیه (۷۴) صدق کند.

توضیح ۷۶. با توجه به قضیه (۷۴) قسمت (الف)، دیده می‌شود که هر فاصله باز کرانداری یک مجموعه مقدماتی منتظم است. همچنین هر مجموعه تک عضوی، منتظم است. نشان می‌دهیم اجتماع دو مجموعه منتظم، مجموعه‌ای منتظم است. برای این منظور فرض کنید A و B منتظم باشند پس در شرط (ب) قضیه (۷۴) صدق می‌کنند. یعنی برای $\varepsilon > 0$ داده شده، مجموعه‌های مقدماتی لسته H و K و مجموعه‌های مقدماتی باز U و V وجود دارند به طوری که

$$H \subset A \subset U, \qquad K \subset B \subset V$$

و $m(U \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$ و $m(V \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$، پس

$$H \cup K \subset A \cup B \subset U \cup V$$

و از رابطه $(U \cup V) \setminus (H \cup K) \subset (U \setminus H) \cup (V \setminus K)$ داریم

$$m((U \cup V) \setminus (H \cup K)) \leq m(U \setminus H) + m(V \setminus K)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

پس اجتماع دو مجموعه منتظم، مجموعه‌ای منتظم است. حال از قضیه (۶۷) قسمت (هـ) نتیجه می‌شود که اگر E مجموعه‌ای مقدماتی باشد آنگاه E به صورت اجتماع تعدادی متناهی از فواصل باز و تعدادی متناهی مجموعه تک عضوی است. پس هر مجموعه مقدماتی منتظم است.

قضیه ۷۷. فرض کنید E یک مجموعه مقدماتی و f تابعی پله‌ای است. در این صورت

$$\left|\int_E f\right| \le \int_E |f| \qquad (۱۰۷)$$

اثبات. برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم

$$-|f(x)|\chi_E(x) \le f(x)\chi_E(x) \le |f(x)|\chi_E(x)$$

از قضیه (۶۲) داریم

$$-\int_{-\infty}^{\infty}|f|\chi_E \le \int_{-\infty}^{\infty} f\chi_E \le \int_{-\infty}^{\infty}|f|\chi_E$$

پس

$$-\int_E|f| \le \int_E f \le \int_E |f|$$

بنابراین

$$\left|\int_E f\right| \le \int_E |f|$$

قضیه ۷۸. فرض کنید E یک مجموعه مقدماتی و f تابعی پله‌ای است. اگر به ازای عددی مانند $k\in\mathbb{R}$ داشته باشیم

$$|f(x)|\le k \qquad \forall x\in E \qquad (۱۰۸)$$

آنگاه

$$\left|\int_E f\right| \le k\, m(E).$$

اثبات. داریم $|f|\chi_E \le k\chi_E$ پس

$$\begin{aligned}\left|\int_E f\right| &\le \int_E |f|\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}|f|\chi_E\\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} k\chi_E\\ &= k\int_{-\infty}^{\infty}\chi_E\\ &= k\,m(E).\end{aligned}$$