در نظریه انتگرال توابع پله‌ای تنها نیاز به عملیات حساب، جمع، تفاضل، ضرب و تقسیم داریم. برای توسیع این نظریه از مفاهیم دیگری که تا اینجا مطرح شده، استفاده می‌کنیم. در این قسمت تعریف $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f$ را طوری تنظیم می‌کنیم که برای توابع کلی‌تر $f$ بکار خواهد رفت. تعریف به گونه‌ای ساخته می‌شود که انتگرال حاصل، کلیه خواص بیان شده تاکنون را دارا باشد. چند روش متفاوت برای توسیع نظریه فوق به کلاس وسیع‌تری از توابع وجود دارد و هر یک از آنها منجر به یکی از نظریه‌های انتگرال می‌شود. هر یک از این نظریه‌ها با انتگرال توابع پله‌ای به عنوان شروع، سروکار دارد و سپس انتگرال توابع کلی‌تر با در نظر گرفتن حد یا سوپریمم یا اینفیمم توابعی مانند توابع پله‌ای تقریب زده می‌شوند.

در قلب هر یک از تئوری‌های انتگرال، تکنیکی قرار دارد که توسط ادوکسوس کشف گردید و سپس به یک نظریه پیشرفته توسط ارشمیدس داده شد. ارشمیدس مساحت‌ها و حجم‌های تعدادی از اشکال هندسی را با تقریب آنها از داخل و خارج توسط چندضلعی‌ها محاسبه کرد. دلیل وی این بود که اگر $A$ یک ناحیه مسطح باشد و $s$ و $S$ دو چندضلعی باشند به طوری که $s \subset A \subset S$ آن‌گاه

$$\text{Area}(s) \le \text{Area}(A) \le \text{Area}(S) \qquad (۱۰۹)$$

بنابراین برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده، می‌توان تضمین کرد که $\text{Area}(s)$ و $\text{Area}(S)$ باید تقریباً $\text{Area}(A)$ با تقریب $\varepsilon$ باشند، به طور ساده‌تر

$$\text{Area}(S) - \text{Area}(s) < \varepsilon \qquad (۱۱۰)$$

تشابه این ایده برای توابع به شرح زیر است:

فرض کنید $f$ تابعی کراندار تعریف شده بر $[a,b]$ است و $s$ و $S$ توابع پله‌ای روی $[a,b]$ هستند به طوری که $s \le f \le S$. آن‌گاه با توجه به معنای $\int_a^b f$ باید داشته باشیم

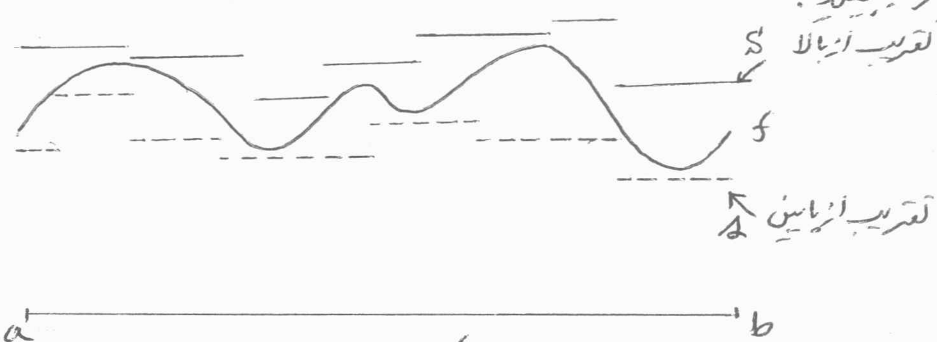
$$\int_a^b s \le \int_a^b f \le \int_a^b S \qquad (111)$$

بنابراین برای هر $\varepsilon > 0$، می‌توان تضمین کرد که هر دوی $\int_a^b s$ و $\int_a^b S$ تقریب $\int_a^b f$ با حدود $\varepsilon$ است. یا به طور ساده‌تر

$$\int_a^b S - \int_a^b s < \varepsilon$$

این روش تقریب زدن یک تابع توسط توابع پله‌ای که در نظریه انتگرال مورد استفاده قرار می‌گیرد توسط کُشی، داربکس، ریمان و دیگران توسعه داده شد و چیزی است که ما آن را انتگرال ریمان نامیم.

طرز عمل تا حدودی ادامه روش ارشمیدس است که در بخش (۱۰۲) شرح داده شد. با تقریب تابع f از پایین و بالا توسط توابع پله‌ای، آغاز می‌کنیم. شکل (۴۹) را ببینید.




شکل ۴۹

یعنی تابع پله‌ای دلخواهی، مثلاً s را طوری اختیار می‌کنیم که نمودار آن پایین نمودار f باشد و تابع پله‌ای دلخواهی، مانند S را به قسمی انتخاب می‌کنیم که نمودار آن بالای f قرار گیرد. سپس همهٔ اعداد $\int_a^b s(x)dx$ و $\int_a^b S(x)dx$ را که به ازای کلیه انتخاب‌های ممکن s و S به دست آمده‌اند، در نظر می‌گیریم. در حالت کلی بنا به قضیه (۹۲) داریم

$$\int_a^b s(x)dx < \int_a^b S(x)dx \qquad (112)$$

هرگاه انتگرال f بخواهد از قضیه (۹۲) پیروی کند، آن گاه باید چنان عددی باشد که به ازای هر زوج تابع تقریب کننده s و S میان $\int_a^b s(x)dx$ و

$\int_a^b s(x)\,dx$ قرار گیرد. چنانچه فقط یک عدد با این خاصیت وجود داشته باشد انتگرال $f$ را مساوی این عدد تعریف خواهیم کرد.

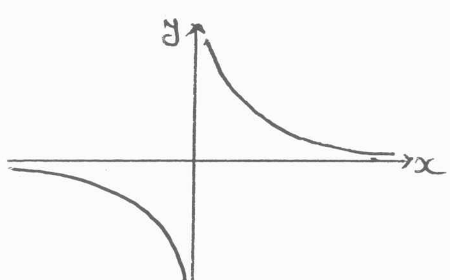
تنها یک موضوع هست که می‌تواند در این کار اشکال تولید کند و در همان قدم اول ظاهر می‌شود. امکان آنکه هر تابع را بشود از بالا و از پایین توسط توابع پله‌ای تخمین زد میسر نیست. به عنوان مثال تابع $f$ تعریف شده توسط

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \dfrac{1}{x} & x\neq 0\end{cases}$$

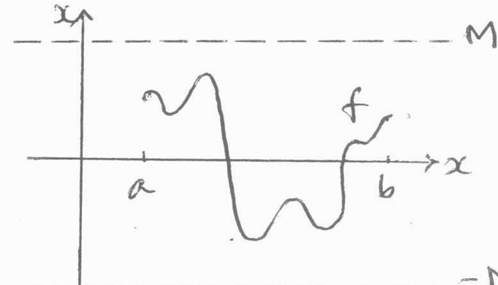
به ازای کلیه $x$های حقیقی تعریف شده است، لکن $f$ را نمی‌توان بر هر فاصله $[a,b]$ شامل مبداء مختصات در محاصره توابع پله‌ای درآورد. زیرا $f$ در مجاورت مبداء مقادیر بزرگ دلخواه دارد یا به عبارت دیگر $f$ در همسایگی مبداء بی‌کران است (شکل ۵۰). از این رو، ابتدا نظر خود را معطوف توابعی می‌کنیم که بر $[a,b]$ کراندارند یعنی عددی مانند $M>0$ برای $f$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x$ در $[a,b]$،

$$-M\leq f(x)\leq M \qquad (۱۱۴)$$

از نظر هندسی نمودار چنین تابعی بین نمودارهای دو تابع پله‌ای ثابت $s$ و $S'$ که به ترتیب دارای مقادیر $-M$ و $M$ اند قرار می‌گیرد (شکل ۵۱).




شکل ۵۰




شکل ۵۱

دو نامساوی در (۱۱۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$|f(x)|\leq M$$

تعریف ۷۹. انتگرال یک تابع کراندار. فرض کنید $f$ تابعی تعریف شده بر $[a,b]$ و کراندار است. همچنین، فرض کنید $s$ و $S$ توابع پله‌ای دلخواهی تعریف شده بر $[a,b]$ باشند به طوری که به ازای هر $x$ در $[a,b]$،

$$s(x) \leq f(x) \leq S(x) \tag{۱۱۴}$$

اگر یک و فقط یک عدد $I$ وجود داشته باشد که به ازای هر زوج از توابع پله‌ای $s$ و $S$ برقرار در شرط (۱۱۴) داشته باشیم

$$\int_a^b s(x)dx \leq I \leq \int_a^b S(x)dx \tag{۱۱۵}$$

آن‌گاه این عدد $I$ را انتگرال $f$ از $a$ تا $b$ نامیم و آن را با علامت $\int_a^b f$ یا $\int_a^b f(x)\,dx$ نشان می‌دهیم. وقتی چنین $I$ ای وجود داشته باشد گوییم تابع $f$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است. تابع $f$ را انتگرالده (یا تابع زیر نشانه انتگرال)، اعداد $a$ و $b$ را حدود انتگرال‌گیری و بازه $[a,b]$ را بازه انتگرال‌گیری نامند.

## ۵.۶.۲ انتگرال‌های بالایی و پایینی

فرض کنید $f$ تابعی با مقادیر حقیقی تعریف شده بر $[a,b]$ و کراندار است. پس عدد $M>0$ وجود دارد به طوری که

$$|f(x)| \leq M \qquad \forall x \in [a,b] \tag{۱۱۶}$$

بنابراین $f$ بر هر زیرفاصله از هر افراز $P$ برای $[a,b]$ کراندار است. پس سوپریمم و اینفیمم تابع $f$ بر زیرفاصله‌های حاصل از هر افراز $P$ برای $[a,b]$ وجود دارند.

اگر $s$ تابعی پله‌ای بر $[a,b]$ بوده و برای هر $x \in [a,b]$ داشته باشیم

$$s(x) \leq f(x)$$

آن‌گاه افراز $P=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ از $[a,b]$ وجود دارد که $s$ درون $P$ پله‌ای است و

$$s(x) = \alpha_i \qquad x_{i-1} < x < x_i$$

در این حالت $\int_a^b s(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i-x_{i-1})$ را یک جمع پایینی برای $f$ روی $[a,b]$ نامیم.

به طور مشابه، اگر $S$ تابع پله‌ای بر $[a,b]$ بوده و برای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم

$$f(x)\le S(x)$$

آن‌گاه افراز $Q=(x_0,x_1,\dots,x_m)$ از $[a,b]$ وجود دارد که $S$ درون $Q$ پله‌ای است و

$$S(x)=\beta_j \qquad x_{j-1}<x<x_j$$

در این حالت $\int_a^b S(x)\,dx=\sum_{j=1}^{m}\beta_j(x_j-x_{j-1})$ را یک جمع بالایی برای $f$ روی $[a,b]$ نامیم.

حال دو مجموعهٔ $\mathcal{U}$ و $\mathcal{L}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{U}=\{A\mid \text{یک جمع بالایی } f \text{ روی } [a,b] \text{ است } A\} \qquad (۱۱۷)$$

$$\mathcal{L}=\{B\mid \text{یک جمع پایینی } f \text{ روی } [a,b] \text{ است } B\} \qquad (۱۱۸)$$

بنابراین اگر $A\in\mathcal{U}$ آن‌گاه تابع پله‌ای مانند $S$ روی $[a,b]$ وجود دارد به طوری که $f\le S$ ، $A=\int_a^b S(x)\,dx$ و اگر $B\in\mathcal{L}$ آن‌گاه تابع پله‌ای مانند $s$ روی $[a,b]$ وجود دارد به طوری که $s\le f$ و $B=\int_a^b s(x)\,dx$ .

با توجه به قضیه (۴۲)، هر عضو مجموعهٔ $\mathcal{U}$ یک کران بالایی مجموعهٔ $\mathcal{L}$ است و هر عضو مجموعهٔ $\mathcal{L}$ یک کران پایینی مجموعهٔ $\mathcal{U}$ است. پس $\mathcal{L}$ زیرمجموعه‌ای از بالا کراندار از اعداد حقیقی و $\mathcal{U}$ زیرمجموعه‌ای از پایین کراندار از اعداد حقیقی است.

از طرفی $\mathcal{L}\neq\emptyset$ زیرا با توجه به کرانداری تابع $f$ ، اگر قرار دهیم

$$s(x)=-M \qquad x\in[a,b]$$

آن‌گاه $s$ یک تابع پله‌ای است و $s\le f$ و $\int_a^b s(x)\,dx=-M(b-a)$ عضوی از $\mathcal{L}$ است. به طور مشابه $\mathcal{U}\neq\emptyset$ زیرا با توجه به کرانداری تابع $f$ ، اگر قرار دهیم

$$S(x)=M \qquad x\in[a,b]$$

تعریف ۸۲ . فرض کنید $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی نامنفی است. مجموعه

$$Q=\{(x,y) \mid a \le x \le b, \quad 0 \le y \le f(x)\} \qquad (۱۲۳)$$

را مجموعه عرضی $f$ نامیم.

قضیه ۸۳ . فرض کنید $f$ تابعی نامنفی و انتگرال پذیر بر فاصله $[a,b]$ است و $Q$ مجموعه عرضی $f$ روی $[a,b]$ باشد، در این صورت $Q$ اندازه پذیر است و مساحت آن مساوی انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ است.

اثبات . $S$ و $T$ را دو ناحیه پله‌ای در نظر بگیرید بطوری که $S \subset Q \subset T$ . پس دو تابع پله‌ای $s$ و $t$ برقرار در شرط $s \le f \le t$ بر $[a,b]$ وجود دارند به طوری که

$$Area(T)=\int_a^b t(x)\,dx, \qquad Area(S)=\int_a^b s(x)\,dx \qquad (۱۲۴)$$

چون $f$ بر $[a,b]$ انتگرال پذیر است پس عدد $I=\int_a^b f(x)\,dx$ تنها عددی است که در نامساوی‌های

$$\int_a^b s(x)\,dx \le I \le \int_a^b t(x)\,dx \qquad (۱۲۵)$$

به ازای کلیه توابع پله‌ای $s$ و $t$ که $s \le f \le t$ صدق می‌کند. بنابراین، این نیز تنها عددی است که در نامساوی‌های $Area(S) \le I \le Area(T)$ به ازای کلیه ناحیه‌های پله‌ای $S$ و $T$ که $S \subset Q \subset T$ ، صادق می‌باشد. حال با توجه به خاصیت اشباع، $Q$ اندازه پذیر است و $Area(Q)=I$ .

توضیح ۸۴ . فرض کنید $Q$ مجموعه عرضی $f$ روی $[a,b]$ است و $Q'$ مجموعه بقیه نقاطی است که از برداشتن نقاط نمودار $f$ از $Q$ بجای می‌ماند یعنی

$$Q'=\{(x,y) \mid a \le x \le b, \quad 0 \le y < f(x)\} \qquad (۱۲۶)$$

با توجه به استدلال به کار رفته در اثبات قضیه (۸۳) ، $Q'$ اندازه پذیر است و

$$Area(Q')=Area(Q) \qquad (۱۲۷)$$

آن‌گاه $S$ یک تابع پله‌ای است و $f \le S$ و $\int_a^b S(x)dx = M(b-a)$ عضوی از $\mathcal{U}$ است. حال طبق اصل موضوع تمامیت، مجموعه $\mathcal{L}$ دارای کوچکترین کران بالایی و مجموعه $\mathcal{U}$ دارای بزرگترین کران پایینی است.

تعریف ۸۰. با توجه به توضیحات بالا، $\sup \mathcal{L}$ را انتگرال پایینی تابع $f$ روی $[a,b]$ و $\inf \mathcal{U}$ را انتگرال بالایی تابع $f$ روی $[a,b]$ نامیم و با

$$\sup \mathcal{L} = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{I}(f) \qquad (۱۱۹)$$

و

$$\inf \mathcal{U} = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{I}(f) \qquad (۱۲۰)$$

نمایش می‌دهیم. پس

$$\underline{I}(f) = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\left\{\int_a^b s(x)dx \mid s \le f, \text{ تابع پله‌ای } s\right\}$$

و

$$\overline{I}(f) = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\left\{\int_a^b S(x)dx \mid f \le S, \text{ تابع پله‌ای } S\right\}$$

با توجه به توضیحات قبل از تعریف (۸۰) در انتهای بخش (۲.۶.۲)، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۸۱. هر تابع $f$ که بر $[a,b]$ کراندار باشد دارای انتگرال پایینی $\underline{I}(f)$ و انتگرال بالایی $\overline{I}(f)$ است که در نامساوی‌های

$$\int_a^b s(x)dx \le \underline{I}(f) \le \overline{I}(f) \le \int_a^b S(x)dx \qquad (۱۲۱)$$

به ازای کلیه توابع پله‌ای $s$ و $S$ که $s \le f \le S$ صدق می‌کنند. تابع $f$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است اگر و فقط اگر انتگرال‌های بالایی و پایینی آن مساوی باشند که در این حالت خواهیم داشت

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{I}(f) = \overline{I}(f) \qquad (۱۲۲)$$

بنابراین طبق خاصیت تفاضلی مساحت، مجموعه $Q-Q'$ یعنی

$$Q-Q'=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ y=f(x)\}$$

(نمودار f) اندازه پذیر است و

$$\text{Area}(Q-Q')=\text{Area}(Q)-\text{Area}(Q')=0 \qquad (۱۲۸)$$

به عبارت دیگر، قضیه زیر را ثابت کردیم.

قضیه ۸۵. فرض کنید f تابعی نامنفی و انتگرال پذیر بر فاصله $[a,b]$ است. در این صورت نمودار f، یعنی مجموعهٔ $\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ y=f(x)\}$ اندازه پذیر بوده و مساحتی برابر صفر دارد.

حال با توجه به تعریف (۸۰) برای انتگرال های پایینی و بالایی و با استفاده از خواص اینفیمم و سوپریمم، محکی برای انتگرال پذیری تابع f با مقادیر حقیقی تعریف شده بر فاصله $[a,b]$ را بدست می آوریم. می دانیم که اگر $\alpha=\inf A$ باشد آن گاه برای هر $n\in\mathbb{N}$ با انتخاب $\varepsilon=\frac{1}{n}$ عضوی از مجموعه $A$ مانند $a$ که به دلیل وابستگی به $n$ انتخابی آن را $a_n$ می نامیم وجود دارد به طوری که

$$\alpha\le a_n<\alpha+\frac{1}{n} \qquad (۱۲۹)$$

حال وقتی $n$ در اعداد طبیعی بزرگ و بزرگتر می شود، $\frac{1}{n}$ کوچک و کوچکتر شده و نهایتاً می‌گوییم $a_n\to\alpha$ وقتی $n\to\infty$. به طور مشابه برای $\beta=\sup B$، به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ با انتخاب $\varepsilon=\frac{1}{n}$ عضوی از مجموعه $B$ مانند $b$ که به دلیل وابستگی به $n$ انتخابی آن را $b_n$ می نامیم وجود دارد به طوری که

$$\beta-\frac{1}{n}<b_n\le\beta \qquad (۱۳۰)$$

پس وقتی $n\to\infty$ داریم $b_n\to\beta$.

با توجه به توضیحات بالا، محک زیر برای انتگرال پذیری تابع کراندار f تعریف شده

بر فاصله $[a,b]$ برحسب توابع پله‌ای را داریم.

قضیه ۸۶. محکی برای انتگرال پذیری. فرض کنید $f$ تابعی کراندار روی فاصله $[a,b]$ است. در این صورت

الف) دنباله $\{s_n\}$ از توابع پله‌ای روی $[a,b]$ وجود دارد به طوری که برای هر $n\in\mathbb{Z}^+$، $s_n\leq f$ و

$$\int_a^b s_n(x)\,dx \to \underline{\int_a} f(x)\,dx \qquad (۱۳۱)$$

ب) دنباله $\{S_n\}$ از توابع پله‌ای روی $[a,b]$ وجود دارد به طوری که برای هر $n\in\mathbb{Z}^+$، $f\leq S_n$ و

$$\int_a^b S_n(x)\,dx \to \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \qquad (۱۳۲)$$

اثبات. الف) برای هر $n\in\mathbb{Z}^+$، تابع پله‌ای $s_n$ با شرط $s_n\leq f$ وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b s_n > \underline{\int_a} f - \frac{1}{n}$$

چون

$$\underline{\int_a} f(x)\,dx - \frac{1}{n} < \int_a^b s_n(x)\,dx \leq \underline{\int_a} f(x)\,dx \qquad (۱۳۳)$$

پس دنباله $\{s_n\}$ در (الف) برقرار است.

ب) مشابه قسمت (الف)، به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

تعریف ۸۷. فرض کنید $f$ تابعی کراندار بر فاصله $[a,b]$ است. گوییم یک زوج دنباله‌های $(s_n)$ و $(S_n)$ از توابع پله‌ای روی $[a,b]$ فشار تابع $f$ روی فاصله $[a,b]$ است، هرگاه به ازای هر $n\in\mathbb{Z}^+$ داشته باشیم $s_n\leq f\leq S_n$ و

$$\int_a^b (S_n - s_n) \to 0 \qquad (۱۳۴)$$

وقتی $n\to\infty$.

قضیه ۸۸. فرض کنید $f$ تابعی کراندار بر فاصله $[a,b]$ است. در این صورت شرایط زیر باهم معادلند

الف) $f$ روی $[a,b]$ انتگرال پذیر است.

ب) زوج دنباله‌های $(s_n)$ و $(S_n)$ از توابع پله‌ای وجود دارند به طوری که فشار تابع $f$ روی $[a,b]$ هستند.

اثبات. (الف) $\Leftarrow$ (ب). فرض کنید $f$ روی $[a,b]$ انتگرال پذیر است، طبق قضیه (۸۶) برای هر $n\in\mathbb{Z}^+$، توابع پله‌ای $s_n$ و $S_n$ روی $[a,b]$ وجود دارند به طوری که $s_n\le f\le S_n$ و

$$\int_a^b s_n(x)dx \to \underline{\int_a^b} f(x)dx,$$

و

$$\int_a^b S_n(x)dx \to \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

پس

$$\int_a^b (S_n-s_n)(x)dx \to \overline{\int_a} f(x)dx-\underline{\int_a^b} f(x)dx=0$$

بنابراین زوج دنباله‌های $(s_n)$ و $(S_n)$ از توابع پله‌ای فشار تابع $f$ روی $[a,b]$ هستند.

(ب) $\Leftarrow$ (الف). فرض کنید زوج دنباله های $(s_n)$ و $(S_n)$ از توابع پله‌ای فشار تابع $f$ روی $[a,b]$ هستند، برای هر $n\in\mathbb{Z}^+$ داریم

$$0\le \overline{\int_a^b} f(x)dx-\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \int_a^b (S_n-s_n)(x)dx$$

حال وقتی $n\to\infty$ داریم $\int_a^b (S_n-s_n)\to 0$ پس

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx-\underline{\int_a^b} f(x)dx=0$$

یعنی $f$ روی $[a,b]$ انتگرال پذیر است.

در این مرحله دو سوال اساسی مطرح می شوند:

سوال ۱. از توابع کراندار، کدامیک انتگرال پذیرند؟

سؤال ۲. با فرض اینکه $f$ تابعی انتگرال پذیر باشد، چگونه انتگرال آن را محاسبه کنیم؟
سؤال اول تحت نام "نظریه انتگرال" و سوال دوم با اسم "فن انتگرال گیری" مطرح می شود. در این درس به سؤال اول پاسخ هایی جزئی خواهیم داد که در واقع از ابتدای بخش ۶.۲ به آن پرداخته ایم. در اینجا نخست رده مهمی از توابع موسوم به توابع یکنوا را معرفی می کنیم و نشان می دهیم که کلیه توابع یکنوای کراندار انتگرال پذیرند. خوشبختانه اغلب توابعی که در عمل ظاهر می شوند یکنوا یا مجموع هایی از توابع یکنوا هستند.
بحث در مورد "فن انتگرال گیری" از بخش های بعد شروع و در فصل های آتی ادامه می یابد.

## ۶.۶.۲ توابع یکنوا، قطعه قطعه یکنوا و انتگرال پذیری

تعریف ۸۹. تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بر مجموعه $S \subset \mathbb{R}$ صعودی گوییم، هرگاه به ازای هر زوج نقاط $x_1$ ، $x_2$ در $S$ که $x_1 < x_2$ داشته باشیم

$$f(x_1) \leq f(x_2) \tag{۱۳۵}$$

و اگر به ازای هر $x_1, x_2 \in S$ که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$، گوییم $f$ بر $S$ اکیداً صعودی است.

به طور مشابه، $f$ را بر $S$ نزولی نامیم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in S$ که $x_1 < x_2$ داشته باشیم

$$f(x_1) \geq f(x_2) \tag{۱۳۶}$$

و اگر نامساوی اکید باشد یعنی

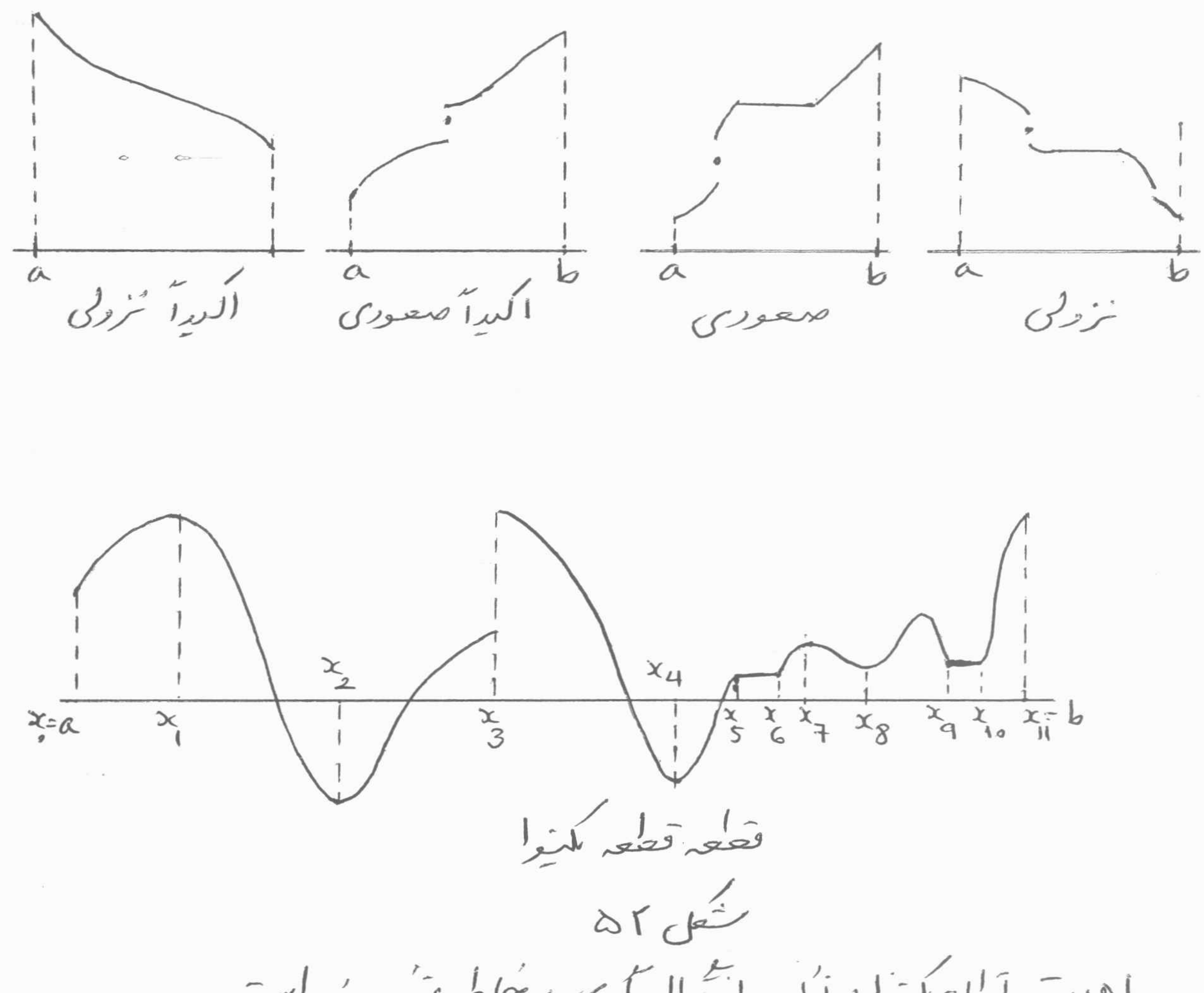
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

گوییم $f$ بر $S$ اکیداً نزولی است.

تابع $f$ بر $S$ یکنوا خوانده می شود هرگاه $f$ بر $S$ صعودی یا بر $S$ نزولی باشد و آن

را اکیداً یکنوا نامیم هرگاه $f$ بر $S$ اکیداً صعودی یا بر $S$ اکیداً نزولی باشد.

تابع $f$ را بر $S$ قطعه قطعه یکنوا گوییم، اگر نمودار آن از تعدادی متناهی قطعات یکنوا تشکیل شده باشد. به عبارت دیگر افراز $P=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ برای $S$ وجود داشته باشد به طوری که $f$ بر هر زیرفاصله از افراز $P$ یکنوا باشد. در شکل (۵۲) مثال هایی از توابع صعودی، نزولی، اکیداً صعودی، اکیداً نزولی و قطعه قطعه یکنوا نمایش داده شده است. معمولاً مجموعه $S$ مورد نظر یا فاصله ای باز یا فاصله ای بسته است.




شکل ۵۲

اهمیت توابع یکنوا در نظریه انتگرال گیری به خاطر قضیه زیر است.

قضیه ۹۰. اگر $f$ تابعی یکنوا بر فاصله $[a,b]$ باشد آنگاه $f$ بر $[a,b]$ انتگرال پذیر است.

اثبات. قضیه را در حالت تابع صعودی ثابت می کنیم. اثبات برای توابع نزولی مشابه

است، فرض کنید $f$ تابعی صعودی بوده و $\underline{I}(f)$ و $\overline{I}(f)$ به ترتیب انتگرال بالائی و پایینی $f$ بر $[a,b]$ است. ثابت می‌کنیم $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$.
برای $n \in \mathbb{N}$ افراز $P=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ از $[a,b]$ که $n$-افراز منظم است در نظر می‌گیریم و توابع پله‌ای $s_k$ و $S_k$ را به صورت زیر می‌سازیم

$$x_k = x_{k-1} + \frac{b-a}{n} \qquad k=1,2,\ldots,n$$
$$x_0 = a\,, \quad x_n = b \qquad (۱۳۷)$$

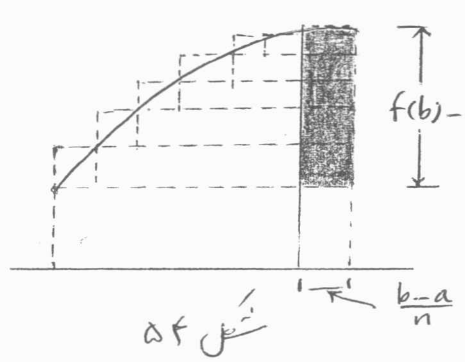
و

$$s_k(x) = f(x_{k-1}) \qquad x_{k-1} < x < x_k \qquad (۱۳۸)$$
$$S_k(x) = f(x_k) \qquad x_{k-1} < x < x_k \qquad (۱۳۹)$$

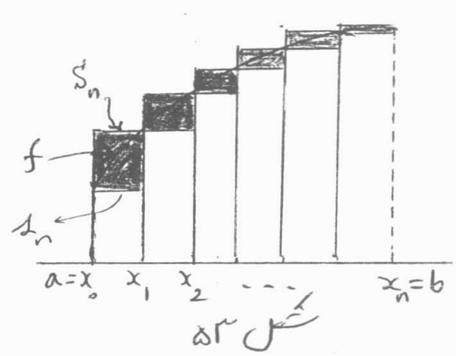
در نقاط $x_k$ توابع $s_k$ و $S_k$ را چنان تعریف می‌کنیم که روابط $s_k(x) \le f(x) \le S_k(x)$ در سراسر $[a,b]$ حفظ شوند (شکل (۵۳)). برای این توابع پله‌ای داریم

$$\int_a^b S_k - \int_a^b s_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$
$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})]$$
$$= \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)] \qquad (۱۴۰)$$

در واقع $\int_a^b S_k - \int_a^b s_k$ مساوی مجموع مساحت‌های مستطیل‌های سایه‌دار در شکل (۵۳) است. با لغزش مستطیل‌ها به راست طوری که بر قاعده مشترکی قرار گیرند (شکل ۵۴)، ملاحظه می‌شود که اینها مستطیلی به قاعده $\frac{b-a}{n}$ و ارتفاع $f(b)-f(a)$ را پر می‌کنند. بنابراین مجموع مساحت‌ها برابر $\frac{c}{n}$ است که $c$ مقدار ثابت $c=(b-a)[f(b)-f(a)]$ می‌باشد.



شکل ۵۴



شکل ۵۳

بنابراین

$$\int_a^b S_k - \int_a^b s_k = \frac{c}{n} \qquad (۱۴۱)$$

حال انتگرال های بالایی و پایینی $f$ در نامساوی های

$$\int_a^b s \le \bar{I}(f) \le \int_a^b S_k \quad , \quad \int_a^b s_k \le \underline{I}(f) \le \int_a^b S_k$$

صدق می‌کنند. پس

$$\bar{I}(f) - \underline{I}(f) \le \int_a^b S_k - \int_a^b s_k$$

بنابراین برای هر عدد صحیح $n \geq 1$ داریم

$$0 \le \bar{I}(f) - \underline{I}(f) \le \frac{c}{n}$$

در نتیجه $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$ یعنی $f$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

اثبات قضیه (۹۰) نه تنها نشان می‌دهد که انتگرال یک تابع صعودی کراندار وجود دارد بلکه روشی برای محاسبه مقدار انتگرال نیز ارائه می‌کند. این روش در قضیه زیر تشریح شده است.

قضیه ۹۱. فرض کنید $f$ بر فاصله $[a,b]$ صعودی است. به ازای $k=0,1,\dots,n$ قرار دهید $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$. اگر $I$ عددی باشد که در نامساوی های

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \le I \le \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \qquad (۱۴۲)$$

به ازای هر عدد صحیح $n \geq 1$ صدق کند آنگاه $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

اثبات. فرض کنید $s_n$ و $S_n$ توابع پله‌ای تقریب کننده خاصی باشند که از تقسیم فاصله $[a,b]$ به $n$ قسمت مساوی، به صورتی که در اثبات قضیه (۹۰) صحبت شده، حاصل شده‌اند. در این صورت نامساوی های (۱۴۲) مبین آنند که به ازای هر $n \geq 1$،

$$\int_a^b s_n \le I \le \int_a^b S_n$$

اما انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ در همان نامساوی هایی که برای $I$ برقرارند صدق می‌کند.
با استفاده از معادله (۱۴۱)، به ازای هر عدد صحیح $n \geq 1$ داریم

$$0 \leq \left| I - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{c}{n}$$

پس $I = \int_a^b f(x)dx$.

استدلالی مشابه، اثباتی را برای قضیهٔ متناظر، اما در مورد توابع نزولی به دست می‌دهد.

قضیهٔ ۹۲. فرض کنید $f$ بر $[a,b]$ نزولی است. به ازای $k = 0, 1, \ldots, n$ قرار دهید $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$. هرگاه $I$ عددی باشد که در نامساویهای

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leq I \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \qquad (۱۴۳)$$

به ازای هر عدد صحیح $n \geq 1$ صدق کند آنگاه

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

مثال ۶۲. از قضیهٔ (۹۱) مقدار انتگرال $\int_0^b x^m dx$ را به دست آورید که در آن $b > 0$ و $m$ عدد صحیح مثبتی است. این انتگرال وجود دارد زیرا انتگرالده بر $[0,b]$ کراندار و صعودی است.

حل. با توجه به اتحاد

$$b^m - a^m = (b-a)(b^{m-1} + b^{m-2}a + b^{m-3}a^2 + \cdots + ba^{m-2} + a^{m-1})$$

داریم

$$n^m < \frac{(n+1)^{m+1} - n^{m+1}}{m+1} < (n+1)^m,$$

با استفاده از استقرا، (تمرین) نتیجه می‌شود که برای هر دو عدد صحیح $n \geq 1$ و $m \geq 1$ داریم

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^m < \frac{n^{m+1}}{m+1} < \sum_{k=1}^{n} k^m$$

این نامساوی‌ها را در $\frac{b^{m+1}}{n^{m+1}}$ ضرب می‌کنیم. در نتیجه

$$\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{kb}{n}\right)^m < \frac{b^{m+1}}{m+1} < \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kb}{n}\right)^m$$

حال اگر $f(x)=x^m$ بوده و به ازای $k=0,1,2,\dots,n$ قرار دهیم $x_k=\frac{kb}{n}$

نامساوی‌های بالا به صورت زیر در می‌آیند

$$\frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) < \frac{b^{m+1}}{m+1} < \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

بنابراین $f(x)=x^m$ ، $a=0$ و $I=\frac{b^{m+1}}{m+1}$ در نامساوی‌های (۱۴۲)

قضیه (۹۱) صدق می‌کنند. پس

$$\int_0^b x^m dx = \frac{b^{m+1}}{m+1} \qquad (۱۴۴)$$

## ۷.۶.۲ خواص اساسی انتگرال

از تعریف انتگرال می‌توان خواص زیر را نتیجه گرفت.

قضیه ۹۳. خطی بودن نسبت به انتگرالده. اگر $f$ و $g$ بر فاصله $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند و $\alpha$ و $\beta$ اعداد حقیقی ثابت اند، آنگاه $\alpha f+\beta g$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx \qquad (۱۴۵)$$

اثبات. خاصیت خطی را به دو قسمت تفکیک می‌کنیم.

الف) $\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$

ب) $\int_a^c cf = c\int_a^b f$

برای اثبات (الف) قرار می‌دهیم $I(f)=\int_a^b f$ و $I(g)=\int_a^b g$. ثابت می‌کنیم

$$I(f+g)=I(f+g)=I(f)+I(g) \qquad (۱۴۶)$$

فرض کنید $s_1$ و $s_2$ به ترتیب توابع پله‌ای دلخواه پایینی $f$ و $g$ باشند، چون $f$ و $g$ انتگرال‌پذیرند داریم

$$I(f)=\sup\{\int_a^b s_1 \mid s_1\le f\},\quad I(g)=\sup\{\int_a^b s_2 \mid s_2\le g\}$$

با توجه به خاصیت جمع پذیری سوپریمم، داریم

$$I(f)+I(g)=\sup\{\int_a^b s_1+\int_a^b s_2 \mid s_1\le f,\ s_2\le g\} \qquad (۱۴۷)$$

اما، اگر $s_1\le f$ و $s_2\le g$ آن گاه مجموع $s=s_1+s_2$ تابعی پله‌ای پایینی $f+g$ است و داریم

$$\int_a^b s_1+\int_a^b s_2=\int_a^b s \le \underline{I}(f+g)$$

بنابراین عدد $\underline{I}(f+g)$ یک کران پایینی برای مجموعه سمت راست در (۱۴۷) است پس

$$I(f)+I(g)\le \underline{I}(f+g) \qquad (۱۴۸)$$

به طور مشابه از

$$I(f)=\inf\{\int_a^b S_1 \mid f\le S_1\},\quad I(g)=\inf\{\int_a^b S_2 \mid g\le S_2\}$$

که در آنها $S_1$ و $S_2$ به ترتیب توابع پله‌ای دلخواه بالایی $f$ و $g$ هستند، استفاده می‌کنیم و نامساوی

$$\bar{I}(f+g)\le I(f)+I(g) \qquad (۱۴۹)$$

بدست می‌آید، از (۱۴۸) و (۱۴۹) و قضیه (۸۱) نتیجه می‌شود

$$\underline{I}(f+g)=\bar{I}(f+g)=I(f)+I(g)$$

یعنی $f+g$ انتگرال پذیر است و (الف) برقرار می‌باشد.

ب) اگر $c=0$، حکم واضح است، چنانچه $c>0$ توجه می‌کنیم که هر تابع پله‌ای $s_1$ پایین $cf$ به شکل $s_1=cs$ است که در آن $s$ تابعی پله‌ای پایین $f$ می‌باشد، به همین نحو هر تابع پله‌ای $S_1$ بالای $cf$ به شکل $S_1=cS$ است که در آن $S$ تابع پله‌ای بالای $f$ می‌باشد، بنابراین

$$\underline{I}(cf)=\sup\{\int_a^b s_1 \mid s_1\le cf\}=\sup\{c\int_a^b s \mid s\le f\}=c\,I(f)$$

$$\bar{I}(cf)=\inf\{\int_a^b S_1 \mid S_1\ge cf\}=\inf\{c\int_a^b S \mid S\ge f\}=c\,I(f)$$

پس $\underline{I}(cf)=\bar{I}(cf)=cI(f)$ یعنی (ب) برای $c>0$ برقرار است، چنانچه $c<0$، اثبات (ب) مشابه قبل است جز آنکه هر تابع پله‌ای $s_1$ پایین $cf$ به شکل $s_1=cS$ می‌باشد که در آن $S$ یک تابع پله‌ای بالای $f$ است و هر تابع پله‌ای $S_1$ بالای $cf$ به شکل $S_1=cs$ خواهد بود که در آن $s$ یک تابع پله‌ای پایینی $f$ می‌باشد، علاوه بر آن از روابط

$$\inf\{cx\,|\,x\in A\}=c\sup\{x\,|\,x\in A\} \quad \text{و} \quad \sup\{cx\,|\,x\in A\}=c\inf\{x\,|\,x\in A\}$$

که به ازای $c<0$ برقرارند، استفاده می‌کنیم. داریم

$$\underline{I}(cf)=\sup\left\{\int_a^b s_1 \,\middle|\, s_1\le cf\right\}=\sup\left\{c\int_a^b S \,\middle|\, f\le S\right\}$$

$$=c\inf\left\{\int_a^b S \,\middle|\, f\le S\right\}=cI(f)$$

به همین نحو داریم $\bar{I}(cf)=cI(f)$ یعنی (ب) به ازای هر $c$ ی حقیقی برقرار است،

توضیح ۹۴. خاصیت خطی را می‌توان با استفاده از استقرای ریاضی تعمیم داده اگر $f_1, f_2, \ldots, f_n$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر بوده و $c_1, c_2, \ldots, c_n$ اعداد حقیقی ثابت باشند آنگاه $c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_nf_n$ نیز بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n} c_k\int_a^b f_k(x)\,dx. \qquad (۱۵۰)$$

قضیه ۹۵. جمع‌پذیری نسبت به بازه انتگرال‌گیری. اگر از سه انتگرال زیر دوتا وجود داشته باشند سومی نیز وجود دارد و

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx \qquad (۱۵۱)$$

اثبات. فرض کنید $a<b<c$ و دو انتگرال $\int_a^b f$ و $\int_b^c f$ وجود داشته باشند. همچنین $\underline{I}(f)$ و $\bar{I}(f)$ انتگرال‌های پایینی و بالایی $f$ روی فاصله $[a,c]$ باشند. ثابت می‌کنیم که

$$\underline{I}(f)=\bar{I}(f)=\int_a^b f+\int_b^c f \qquad (۱۵۲)$$

اگر $s$ تابع پله‌ای دلخواهی بر $[a,c]$ و پایین $f$ باشد ($s \le f$)، آن‌گاه (از قضیه (۶۴))
$$\int_a^c s = \int_a^b s + \int_b^c s$$
برعکس، هرگاه $s_1$ و $s_2$ به ترتیب توابع پله‌ای بر $[a,b]$ و $[b,c]$ و پایین $f$ باشند ($s_1 \le f$ و $s_2 \le f$) آن‌گاه تابع $s$ که بر $[a,b]$ مساوی $s_1$ و بر $[b,c]$ مساوی $s_2$ است، یک تابع پله‌ای بر $[a,c]$ و پایین $f$ خواهد بود که برای آن داریم
$$\int_a^c s = \int_a^b s_1 + \int_b^c s_2$$
حال از خاصیت جمع‌پذیری سوپریمم، داریم
$$\underline{I}(f) = \sup\{\int_a^c s \mid s \le f\} =$$
$$= \sup\{\int_a^b s_1 \mid s_1 \le f\} + \sup\{\int_b^c s_2 \mid s_2 \le f\} = \int_a^b f + \int_b^c f$$
به طور مشابه داریم
$$\bar{I}(f) = \int_a^b f + \int_b^c f.$$
پس (۱۵۲) وقتی $a < b < c$ برقرار است. اثبات در سور دیگر آرایش دیگری از نقاط $a$، $b$ و $c$ مشابه است.

توضیح ۹۶. اگر $f$ بر $[a,b]$ و بر $[b,c]$ انتگرال‌پذیر باشد آن‌گاه هر دو انتگرال $\int_a^b f$ و $\int_b^c f$ وجود دارند، پس $\int_a^c f$ نیز وجود داشته و مساوی مجموع دو انتگرال دیگر خواهد بود.

قضیه ۹۷. پایایی تحت انتقال. اگر $f$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی $c$ داریم
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx. \qquad (۱۵۳)$$
اثبات. فرض کنید $g$ تابعی است که بر فاصله $[a+c, b+c]$ با معادله
$$g(x) = f(x-c)$$
تعریف شده باشد. $\underline{I}(g)$ و $\bar{I}(g)$ را به ترتیب انتگرال پایینی و انتگرال بالایی $g$ بر فاصله

[a+c, b+c] می انگاریم. ثابت می کنیم که

$$\underline{I}(g)=\bar{I}(g)=\int_a^b f(x)dx.$$

فرض کنید $s$ تابع پله‌ای دلخواهی بر بازه $[a+c, b+c]$ و پایین $g$ است. در این صورت تابع $s_1$ که بر $[a,b]$ با معادله $s_1(x)=s(x+c)$ تعریف می‌شود تابعی پله‌ای بر فاصله $[a,b]$ و پایین $f$ خواهد بود. علاوه بر آن، هر تابع پله‌ای $s_1$ بر $[a,b]$ که پایین $f$ باشد، به ازای $s$ یی پایین $g$، از این شکل برخوردار است. همچنین، بنابر خاصیت انتقالی در مورد انتگرال‌های توابع پله‌ای، داریم

$$\int_{a+c}^{b+c} s(x)dx=\int_a^b s(x+c)dx=\int_a^b s_1(x)dx$$

بنابراین

$$\underline{I}(g)=\sup\left\{\int_{a+c}^{b+c} s \;\middle|\; s\le g\right\}=\sup\left\{\int_a^b s_1 \;\middle|\; s_1\le f\right\}=\int_a^b f(x)dx$$

به طور مشابه

$$\bar{I}(g)=\int_a^b f(x)dx$$

پس $g$ بر $[a+c, b+c]$ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f(x)dx=I(g)=\int_{a+c}^{b+c} g(x)dx$$
$$=\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$$

قضیه ۹۸. انبساط یا انقباض بازه انتگرال‌گیری. اگر $f$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد آن‌گاه به ازای هر $k\neq 0$ حقیقی داریم

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx. \qquad (۱۵۴)$$

اثبات. فرض کنید $k>0$ و $g$ را بر بازه $[ka, kb]$ با معادله $g(x)=f\left(\frac{x}{k}\right)$ تعریف کنید. فرض کنید $\underline{I}(g)$ و $\bar{I}(g)$ نشان دهندهٔ انتگرال‌های پایینی و بالایی $g$ بر $[ka, kb]$ است. ثابت می کنیم

$$\underline{I}(g)=\bar{I}(g)=k\int_a^b f(x)dx$$

اگر $s$ تابع پله‌ای دلخواهی بر $[ka,kb]$ در پایین $g$ باشد. در این صورت تابع $s_1$ که بر $[a,b]$ با معادله $s_1(x)=s(kx)$ تعریف می‌شود نیز تابع پله‌ای بر $[a,b]$ در پایین $f$ است. علاوه بر آن هر تابع پله‌ای $s_1$ که بر $[a,b]$ پایین $f$ باشد، از این شکل برخوردار است. همچنین، با توجه به خاصیت انبساط برای انتگرال‌های توابع پله‌ای داریم

$$\int_{ka}^{kb} s(x)\,dx = k\int_a^b s(kx)\,dx = k\int_a^b s_1(x)\,dx$$

بنابراین

$$\underline{I}(g) = \sup\left\{\int_{ka}^{kb} s \;\middle|\; s\le g\right\} = \sup\left\{k\int_a^b s_1 \;\middle|\; s_1\le f\right\} = k\int_a^b f(x)\,dx$$

به طور مشابه

$$\bar{I}(g) = k\int_a^b f(x)\,dx$$

پس $g$ بر $[ka,kb]$ انتگرال‌پذیر است و

$$k\int_a^b f(x)\,dx = I(g) = \int_{ka}^{kb} g(x)\,dx = \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx$$

توضیح ۹۹. در هر دو قضیه (۹۷) و (۹۸) وجود یکی از انتگرال‌ها موجودیت دیگری را ایجاب می‌کند. وقتی $k=-1$ باشد، قضیه (۹۸) خاصیت انعکاسی را نتیجه می‌دهد یعنی برای $a<b$ داریم

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_{-a}^{-b} f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx \qquad (١٥٥)$$

قضیه ۱۰۰. مقایسه‌ای. اگر $f$ و $g$ هر دو بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر بوده و به ازای هر $x$ در $[a,b]$، $g(x)\le f(x)$، آنگاه

$$\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \qquad (١٥٦)$$

اثبات. فرض کنید بر فاصله $[a,b]$ داریم $g\le f$ و $s$ تابع پله‌ای دلخواهی

باشد $g$ و $S$ تابع پله‌ای دلخواهی بالای $f$ است، در این صورت

$$\int_a^b s \leq \int_a^b S$$

و در نتیجه

$$\int_a^b g = \sup\{\int_a^b s \mid s \leq g\} \leq \inf\{\int_a^b S \mid f \leq S\} = \int_a^b f$$

مثال ۶۳. دستور انتگرال گیری

$$\int_0^b x^m dx = \frac{b^{m+1}}{m+1} \qquad (۱۵۷)$$

را به ازای $b>0$ و هر عدد صحیح مثبت $m$ در مثال (۶۲) بررسی کردیم. این دستور برای $b=0$ نیز معتبر است، زیرا در این حالت هر دو طرف آن مساوی صفر است. می‌توان قضیه (۹۸) را بکار برده و نشان داد که (۱۵۷) برای $b$های منفی هم برقرار است. کافی است در قضیه (۹۸)، $k$ را مساوی $-1$ بگیریم و داریم

$$\int_0^{-b} x^m dx = -\int_0^b (-x)^m dx = (-1)^{m+1}\int_0^b x^m dx = \frac{(-b)^{m+1}}{m+1}$$

حال از خاصیت جمع پذیری، قضیه (۹۵)، داریم

$$\int_a^b x^m dx = \int_0^b x^m dx - \int_0^a x^m dx$$

پس

$$\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}, \qquad (۱۵۸)$$

که به ازای کلیه $a$ و $b$های حقیقی و هر عدد صحیح $m \geq 0$ معتبر است.

گاهی علامت مخصوص

$$P(x)\Big|_a^b$$

برای نمایش $P(b)-P(a)$ به کار برده می‌شود. پس

$$\int_a^b x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\Big|_a^b = \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1} \qquad m \in \mathbb{Z}^+ \qquad (۱۵۹)$$

در قسمت‌های بعد، توسیع دستور (۱۵۹) برای هر عدد حقیقی $m \neq -1$ را خواهیم دید. این دستور همراه با خاصیت خطی، ما را قادر می‌سازد تا از هر چند جمله‌ای انتگرال بگیریم.

مثال ۶۴. مطلوب است $I=\int_1^3 (x^2-3x+5)\,dx$

حل. انتگرال هر جمله را یافته و بعد نتایج را باهم جمع جبری می‌کنیم. پس

$$I=\int_1^3 (x^2-3x+5)\,dx=\int_1^3 x^2dx-3\int_1^3 x\,dx+5\int_1^3 dx$$
$$=\frac{x^3}{3}\Big|_1^3-3\frac{x^2}{2}\Big|_1^3+5x\Big|_1^3$$
$$=\frac{3^3-1^3}{3}-3\,\frac{3^2-1^2}{2}+5\,\frac{3^1-1^1}{1}$$
$$=\frac{26}{3}-12+10=\frac{20}{3}.$$

به طور کلی، برای محاسبهٔ انتگرال هر چندجمله‌ای، جمله به جمله انتگرال می‌گیریم

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{n} c_k x^k\,dx=\sum_{k=0}^{n} c_k\int_a^b x^k\,dx=\sum_{k=0}^{n} c_k\,\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1} \qquad (۱۴۰)$$

می‌توانیم از توابع پیچیده‌تری که از ترکیب چندجمله‌ای های مختلف درست شده‌اند نیز انتگرال بگیریم.

مثال ۶۵. مطلوب است $I=\int_0^1 |x(2x-1)|\,dx$

حل. انتگرالده به علت وجود علامت قدرمطلق، چندجمله‌ای نیست. اما با توجه به علامت $x(2x-1)$، می‌توانیم فاصلهٔ $[0,1]$ را به دو زیرفاصله طوری تقسیم کنیم که انتگرالده در هر یک از آنها چندجمله‌ای شود. وقتی $x$ از ۰ تا ۱ تغییر کند حاصلضرب عبارت $x(2x-1)$ در $x=\frac{1}{2}$ تغییر علامت می‌دهد.

$$|x(2x-1)|=\begin{cases}-x(2x-1) & 0\le x<\frac{1}{2}\\ x(2x-1) & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

حال با توجه به خاصیت جمع‌پذیری داریم

$$\int_0^1|x(2x-1)|\,dx=-\int_0^{1/2}x(2x-1)\,dx+\int_{1/2}^1 x(2x-1)\,dx$$
$$=\int_0^{1/2}(x-2x^2)\,dx+\int_{1/2}^1(2x^2-x)\,dx$$
$$=\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{7}{12}-\frac{3}{8}\right)$$
$$=\frac{1}{4}.$$

مثال ۹۶. فرض کنید $f(x)=x$ ، $0\le x\le 1$. با استفاده از تعریف $\int_0^1 x\,dx$ را به دست آورید.

حل. برای هر عدد طبیعی $n$ ، $n$-افراز منظم $P_n=(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n}{n})$ را درنظر بگیرید و توابع پله‌ای $s_n$ و $S_n$ را با قرار دادن

$$s_n(x)=S_n(x)=x \qquad x\in P_n$$

و

$$s_n(x)=\frac{i-1}{n}, \qquad \frac{i-1}{n}<x<\frac{i}{n}$$

$$S_n(x)=\frac{i}{n}, \qquad \frac{i-1}{n}<x<\frac{i}{n}$$

درنظر بگیرید. چون

$$\int_0^1 (S_n-s_n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\to 0$$

پس دنباله‌های $(s_n)$ و $(S_n)$ تابع $f$ را می‌فشارند. بنابراین $f$ روی $[0,1]$ انتگرال‌پذیر است. برای یافتن مقدار $\int_0^1 f$ ، به ازای هر $n$ داریم

$$\int_0^1 S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\to\frac{1}{2}$$

پس $\int_0^1 x\,dx=\int_0^1 f=\frac{1}{2}$ .

مثال ۹۷. با استفاده از تعریف $\int_0^1 x^2dx$ را به دست آورید.

حل. مانند مثال (۹۶) ، $n$-افراز منظم $P_n$ را برای هر $n\in\mathbb{N}$ درنظر می‌گیریم. توابع پله‌ای $s_n$ و $S_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$s_n(x)=S_n(x)=x^2, \qquad x\in P_n$$

$$s_n(x)=\frac{(i-1)^2}{n^2} \qquad \frac{i-1}{n}<x<\frac{i}{n}$$

$$S_n(x)=\frac{i^2}{n^2} \qquad \frac{i-1}{n}<x<\frac{i}{n}$$

واضح است که $s_n\le f\le S_n$ . چون

$$\int_0^1 (S_n-s_n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{i}{n}\right)^2-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right)\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)\to 0$$

پس زوج دنباله های $(s_n)$ و $(S_n)$ فشار f روی $[0,1]$ هستند، بنابراین تابع f انتگرال پذیر روی $[0,1]$ است. برای یافتن مقدار $\int_0^1 f$ توجه داریم که برای هر $n\in\mathbb{N}$ وقتی $n\to\infty$

$$\int_0^1 S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \to \frac{1}{3}$$

پس $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.

مثال ۶۸. آیا تابع f تعریف شده توسط

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\cap Q\\ 0 & x\in[0,1]\setminus Q\end{cases}$$

بر $[0,1]$ انتگرال پذیر است؟

حل. فرض کنید $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ افراز دلخواهی از $[0,1]$ است و s و S توابعی پله‌ای روی P باشند و $S\ge f\ge s$. در این صورت برای هر i، اگر $\alpha_i$ و $\beta_i$ به ترتیب مقادیر ثابت s و S در فاصله $(x_{i-1},x_i)$ باشند، آنگاه فاصله $(x_{i-1},x_i)$ هم شامل نقاط گویا و هم شامل نقاط گنگ است. پس

$$\alpha_i\le 0,\quad \beta_i\ge 1$$

بنابراین $\int_0^1 f(x)dx\le 0$ و $\int_0^1 f(x)dx\ge 1$. درنتیجه f روی $[0,1]$ انتگرال پذیر نیست.

روش های گوناگون محاسبه مقدار یک انتگرال را بدون نیاز به استفاده از تعریف در هر حالت مورد بحث قرار خواهیم داد. اما این روش ها فقط برای تعداد نسبتاً قلیلی از توابع قابل اجرا است و در مورد اکثر توابع انتگرال پذیر مقدار عددی واقعی انتگرال را فقط می شود تخمین زد. این کار معمولاً این طور صورت می گیرد که انتگرالده را از بالا و پایین به توابعی پله ای یا توابع ساده دیگری که انتگرال های آنها دقیقاً قابل ارزیابی باشند نزدیک می کنند. بعد قضیه مقایسه‌ای مورد استفاده قرار می گیرد تا تقریب های تناظری برای انتگرال تابع به دست آید.